



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

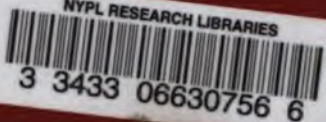
Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

NYPL RESEARCH LIBRARIES



3 3433 06630756 6













**ANNALES**

**SCIENTIFIQUES**

**DE**

**L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.**

L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1877, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

---

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.



# ANNALES

*France*

SCIENTIFIQUES

DE

## L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME SIXIÈME — ANNÉE 1877.

---

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,  
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—  
1877

(Tous droits réservés.)

151





## COMITÉ DE RÉDACTION

COMPOSÉ DES MAÎTRES DES CONFÉRENCES SCIENTIFIQUES.

### Sciences mathématiques.

MM.  
BERTRAND, de l'Institut.  
BONNET, de l'Institut.  
BOUQUET, de l'Institut.  
BOURGÉT, Directeur des Études  
(Sainte-Barbe).  
BRIOT, Prof. à la Sorbonne.  
DARBOUX, Suppl. à la Sorbonne.  
HERMITE, de l'Institut.  
PUISIEUX, de l'Institut.

### Sciences physiques.

MM.  
BERTHELOT, de l'Institut.  
BERTIN, Sous-Direct. de l'École  
Normale.  
DEBRAY.  
FRIEDEL, de l'École des Mines.  
GERNEZ, Professeur au Lycée  
Louis-le-Grand.  
HAUTEFECILLE.  
MASCART, Professeur au Collège  
de France.  
SAINT-CLAIRE DEVILLE (Henri),  
de l'Institut.  
TROOST, Prof. à la Sorbonne.

### Sciences naturelles.

MM.  
CLAUDE BERNARD, de l'Institut.  
DELAFOSSÉ, de l'Institut.  
DELESSE, Ingénieur en chef des  
Mines.  
DES CLOIZEAUX, de l'Institut.  
DE LACAZE-DUTHIERS, de l'In-  
stitut.  
PASTEUR, de l'Institut.  
PERRIER, Prof. au Muséum.  
POUCHET.  
VAN TIEGHEM.

---

## ADMINISTRATION.

MM. H. SAINT-CLAIRE DEVILLE..... *Directeur.*  
BOURGÉT, Directeur des Études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. *Secrétaire.*  
GERNEZ, Professeur au Lycée Louis-le-Grand..... *Secrétaire-Adjoint.*

---



# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

## L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

SUR

### LA RÉFRACTION DES GAZ,

PAR M. MASCART,  
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

---

#### I. — HISTORIQUE.

La réfraction de la lumière par les gaz présente un grand intérêt à cause des considérations théoriques qui s'y rattachent, en particulier dans la doctrine de l'émission.

Il résulte, en effet, de cette théorie que le poids spécifique d'un gaz est proportionnel à l'excès du carré de l'indice de réfraction sur l'unité. Nous croyons utile de rappeler ici la démonstration de cette loi, pour en montrer la véritable signification. Si un rayon de lumière passe du vide, où la vitesse de propagation est  $V$ , dans un milieu réfringent, où la vitesse de propagation est *plus grande* et égale à  $U$ , ce rayon se réfracte en se rapprochant de la normale, d'après la théorie de l'émission. Désignons par  $i$  et  $r$  les angles d'incidence et de réfraction. On peut décomposer la vitesse de la molécule lumineuse dans le milieu supérieur en deux, l'une parallèle à la surface de séparation et égale à  $V \sin i$ , l'autre normale à cette surface et égale à  $V \cos i$ . L'attraction exercée par le milieu réfringent sur cette molécule ne change

pas sa composante parallèle à la surface, ce qui donne l'équation

$$(1) \quad V \sin i = U \sin r.$$

D'autre part, le milieu considéré exerçant sur la molécule une attraction plus grande, la composante normale de la vitesse sera augmentée, pendant la réfraction, dans une couche moins épaisse que la sphère d'activité moléculaire. L'accroissement de force vive normale est proportionnel au travail de l'attraction exercée par le second milieu. Si l'on admet, en outre, que ce travail est proportionnel à la masse agissante, et que le rayon d'activité moléculaire ne dépend que de la nature du milieu et non de sa densité, il en résultera que le travail produit, ou la variation de force vive normale, sera simplement proportionnel au poids spécifique du milieu réfringent; on aura donc l'équation

$$(2) \quad V^2 \cos^2 i - U^2 \cos^2 r = A p,$$

dans laquelle  $A$  est une constante dépendant de la nature du milieu réfringent et  $p$  le poids spécifique de ce milieu.

De ces deux équations on déduit, en désignant par  $n$  l'indice de réfraction, qui est égal à  $\frac{U}{V}$ ,

$$n^2 - 1 = \frac{A}{V^2} p.$$

La théorie de l'émission étant à peu près abandonnée aujourd'hui, il n'y a pas lieu d'insister sur les objections que suggère la démonstration précédente, mais il est important de voir si la théorie des onduations ne conduit pas à un résultat analogue.

Pour expliquer le phénomène de la réfraction, Fresnel a été conduit à admettre que la densité de l'éther dans un corps réfringent est plus grande que dans le vide.

Fresnel applique ensuite à la propagation de la lumière la formule donnée par Newton pour la propagation du son, et il admet, en outre, que l'élasticité de l'éther est la même dans tous les milieux. Il résulte de ces différentes hypothèses que la vitesse de propagation de la lumière dans un milieu est simplement en raison inverse de la racine carrée de la densité de l'éther.

Si l'on prend pour unité la densité de l'éther dans le vide et si l'on désigne par  $1 + \Delta$  la densité de l'éther dans le milieu considéré, on peut donc écrire

$$\frac{V}{U} = \sqrt{1 + \Delta}.$$

Dans le cas actuel, la vitesse  $U$  est *plus petite* que  $V$ , et l'indice de réfraction du milieu est égal à  $\frac{V}{U}$ ; on en déduit

$$n^2 - 1 = \Delta.$$

Admettons encore que l'excès d'éther  $\Delta$  est proportionnel au poids spécifique de la matière pondérable, il en résulte aussi que la différence  $n^2 - 1$ , qu'on appelle la *puissance réfractive* d'un corps, est proportionnelle au poids spécifique, ou que le rapport  $\frac{n^2 - 1}{p}$  est une constante pour un même corps, un gaz par exemple, quelles que soient les circonstances dans lesquelles il est placé.

On arrive ainsi au même résultat que dans la théorie de l'émission, par une voie toute différente, mais le raisonnement n'est pas non plus irréprochable. Rien ne justifie, en particulier, l'emploi de la formule de Newton pour les phénomènes lumineux, puisque les vibrations acoustiques sont longitudinales, tandis que les vibrations lumineuses sont transversales; d'autre part, l'élasticité de l'éther n'a pas d'analogie avec la pression d'un gaz.

La portée théorique de la loi des puissances réfractives est donc très-contestable, et cette loi, quand il s'agit des gaz, ne peut guère avoir non plus de signification expérimentale.

En effet, la relation

$$n^2 - 1 = Ap$$

peut s'écrire

$$n - 1 = \frac{Ap}{n + 1}.$$

Comme la quantité  $n - 1$  n'atteint jamais  $\frac{1}{1000}$  à la pression atmosphérique, même pour les gaz les plus réfringents, le dénominateur  $n + 1$  du second membre dans l'équation précédente ne varie pas en

général d'une quantité appréciable dans les expériences. L'excès  $n^2 - 1$  est donc sensiblement le double de  $n - 1$ ; si le premier est proportionnel au poids spécifique du gaz ou à la pression, le second doit aussi varier de la même manière, et l'expérience sera généralement impuissante à saisir une différence entre ces deux relations.

Cette simple remarque a une importance pratique, parce qu'elle permet de rejeter l'emploi de formules compliquées et d'effectuer les calculs d'une manière beaucoup plus simple. Pour abrégér le langage, nous appellerons souvent *excès de réfraction*, ou simplement *réfraction* d'un corps, l'excès  $n - 1$  de l'indice de réfraction sur l'unité.

D'après la théorie de l'émission, la puissance réfractive d'un mélange de plusieurs gaz doit être égale à la somme des puissances réfractives des différents gaz séparément, chacun d'eux étant supposé occuper le volume du mélange. Il en résulte aussi, du moins avec une approximation de moins de  $\frac{1}{1000}$  pour les expériences faites à des pressions inférieures à la pression atmosphérique, que la réfraction du mélange est égale à la somme des réfractions des différents gaz.

La première détermination directe de la réfraction des gaz est due à Biot et Arago (<sup>1</sup>). Le titre même de ce Mémoire : *Sur les affinités des corps pour la lumière et particulièrement sur les forces réfringentes de différents gaz*, trahit les préoccupations théoriques qui ont guidé les auteurs. Biot et Arago ont réalisé un projet d'expériences conçu par Borda et avec les appareils qu'il avait fait construire dans ce but. La pièce importante était un tube de verre taillé en biseau et fermé par deux glaces, de manière à constituer un prisme réfringent; ce prisme communiquait avec un baromètre et une machine pneumatique, et l'on pouvait par des tubulures convenables y introduire un gaz quelconque. L'appareil était installé au Palais du Luxembourg; à l'aide d'un théodolite à cercle répétiteur, on visait à travers le prisme une mire éloignée, un paratonnerre de l'Observatoire.

Pour déterminer la réfraction de l'air, on faisait le vide dans le prisme, on mesurait le double de la déviation de la mire en le tournant de 180 degrés, et l'on notait avec soin la pression, la température extérieure et la tension de la vapeur d'eau.

---

(<sup>1</sup>) *Mémoires de la 1<sup>re</sup> Classe de l'Institut*, t. VIII, p. 301 (1806).

L'angle des lames qui formaient le prisme était de  $143^{\circ}7'28''$ . Comme ces lames n'étaient pas à faces rigoureusement parallèles, elles donnaient lieu à un petit déplacement qui a été évalué à  $16'',6$ ; la déviation causée par le prisme à gaz était d'environ  $5'50''$ . Malheureusement, Biot et Arago n'ont pas rapporté leurs observations isolées, mais seulement des moyennes de dix, vingt ou trente expériences. Ces moyennes elles-mêmes diffèrent quelquefois de  $\frac{1}{100}$ , ce qui fait supposer de grandes divergences dans les observations isolées. Il paraît, en effet, que les différences d'un jour à l'autre atteignaient quelquefois 16 secondes, ce qui faisait une erreur de  $\frac{1}{22}$  sur la réfraction. Il est donc difficile d'apprécier le degré de confiance qu'on peut accorder aux nombres renfermés dans ce Mémoire important.

Quoi qu'il en soit, voici la marche des calculs.

Appelons  $D$  la déviation du rayon lumineux, correction faite du déplacement causé par les lames, et  $A$  l'angle du prisme. Comme le prisme est sensiblement au minimum de déviation, on a

$$n = \frac{\sin \frac{A + D}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \cos \frac{D}{2} + \sin \frac{D}{2} \cot \frac{A}{2}.$$

A cause de la petitesse des déviations, on peut remplacer le cosinus par l'unité et le sinus par l'arc, ce qui donne

$$n - 1 = \frac{D}{2} \cot \frac{A}{2}.$$

Comme les diverses expériences étaient faites à des températures et à des pressions différentes, il fallait en déduire la valeur de l'indice de réfraction relatif à une température et à une pression déterminées. Pour cela, Biot et Arago avaient recours à la loi des puissances réfractives; mais on peut raisonner de la même manière sur les excès de réfraction, et l'on arrive plus rapidement à un même résultat. Si la différence  $n - 1$  est proportionnelle au poids spécifique du gaz, elle est proportionnelle à la pression et en raison inverse du binôme de dilatation; de sorte que, en appelant  $\alpha$  le coefficient de dilatation de

l'air,  $t$  la température et  $H$  la pression, l'expression

$$\frac{(n-1)(1+\alpha t)}{H}$$

doit être une quantité constante.

Si l'on appelle  $n_0$  l'indice de réfraction à la température de zéro et la pression de 760 millimètres, on aura donc

$$\frac{n_0-1}{760} = (n-1) \frac{1+\alpha t}{H},$$

et par suite

$$n_0-1 = (n-1)(1+\alpha t) \frac{760}{H};$$

il vient donc, en remplaçant  $n-1$  par sa valeur expérimentale,

$$n_0-1 = \frac{D}{2} \cot \frac{A}{2} (1+\alpha t) \frac{760}{H}.$$

Biot et Arago ont trouvé pour  $n_0$  la valeur 1,0002945; comme les expériences ont toujours donné le même nombre, quelle que fût la température ou la pression, on a pu en conclure l'exactitude de la loi des puissances réfractives ou de toute autre loi équivalente.

Le nombre qu'ils ont obtenu diffère peu de celui que Delambre avait déduit de la réfraction atmosphérique.

Quand on voulait opérer avec un autre gaz que l'air atmosphérique, il fallait remplir le prisme de ce gaz à la pression extérieure et observer la nouvelle déviation. En appelant  $D'$  cette déviation comptée en sens contraire,  $n$  l'indice de réfraction de l'air extérieur et  $n'$  celui du gaz à la même pression, on avait

$$\frac{n'}{n} = 1 + \frac{D'}{2} \cot \frac{A}{2},$$

équation qui donnait la valeur de  $n'$  en fonction de  $n$ . Cette équation peut s'écrire sous une autre forme plus commode pour le calcul

$$n' - n = n \frac{D'}{2} \cot \frac{A}{2},$$



ou, à moins d'un millième près,

$$n' - n = \frac{D'}{2} \cot \frac{A}{2}.$$

Si le prisme vide donne, à la même température et à la même pression, une déviation égale à  $D$ , on a finalement

$$\frac{n' - n}{n - 1} = \frac{D'}{D}.$$

Dulong (') a repris ces expériences pour comparer les réfractions des différents gaz. La préparation et la purification des gaz étaient une opération très-difficile à l'époque des recherches de Biot et Arago, et les progrès de la Chimie permettaient à Dulong d'espérer qu'il obtiendrait des résultats plus exacts que ses prédécesseurs. Son appareil se composait d'un prisme, comme celui de Borda, en communication avec un baromètre. Pour les gaz plus réfringents que l'air, on commence par viser une mire au travers du prisme plein d'air à la pression extérieure, puis on le remplit d'un gaz dont on diminue la pression progressivement jusqu'à ce que la mire apparaisse au même point, et l'on note la pression du gaz. S'il s'agit, au contraire, d'un gaz moins réfringent, on commence par en remplir le prisme à la pression barométrique et l'on vise la mire, puis on le remplit d'air dont on diminue la pression jusqu'à ce que la visée n'ait pas changé. L'indice de réfraction du gaz  $n'$  est alors le même que celui de l'air  $n$ .

En désignant par  $H$  la pression relative à l'air, par  $H'$  la pression relative au gaz, la température  $t$  étant la même dans les deux cas, on a

$$n_0 - 1 = (n - 1) (1 + \alpha t) \frac{760}{H},$$

$$n'_0 - 1 = (n' - 1) (1 + \alpha t) \frac{760}{H'};$$

on en déduit

$$\frac{n'_0 - 1}{n_0 - 1} = \frac{H}{H'},$$

équation qui donne  $n'_0$ .

(') *Annales de Chimie et de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. XXXI, p. 154 (1826).

Dulong a obtenu ainsi des nombres un peu différents de ceux de Biot et Arago. Il a vérifié que la puissance réfractive d'un mélange est égale à la somme des puissances réfractives des gaz mélangés, et que cette loi n'a plus lieu pour les gaz combinés. On peut, comme nous l'avons vu plus haut, en dire autant des excès de réfraction.

Au point de vue de la précision, ces expériences n'ont guère ajouté à celles de Biot et Arago. On y éprouvait, en effet, les mêmes difficultés pour déterminer ou pour maintenir constante la température du gaz, qui est un élément important dans ces sortes de phénomènes, et le mode de visée n'était pas sensiblement amélioré. Dulong dit bien que l'on pourrait rendre les erreurs inférieures à  $\frac{1}{3000}$ , parce que les pressions sont évaluées facilement à moins de  $\frac{1}{2}$  millimètre, mais il faudrait pour cela que la précision du pointé fût de même ordre, ce qui est loin d'avoir lieu. En fait, les dimensions du tube de Borda et du tube de Dulong et, par suite, les objectifs des lunettes d'observation, étaient trop petits pour qu'il fût possible d'éviter des erreurs de plusieurs secondes dans le pointé. Enfin Dulong n'a pas rapporté non plus ses observations isolées, ni indiqué avec assez de détails les précautions qu'il a prises, soit pour obtenir des gaz purs, soit pour faire les corrections que les impuretés inévitables devaient entraîner.

Arago <sup>(1)</sup> a proposé le premier l'emploi des phénomènes d'interférence pour déterminer la réfraction des gaz. Il a même fait des expériences avec Petit en se servant de deux tubes renfermant le même gaz à des pressions différentes et en évaluant par un compensateur de Fresnel la différence de marche de deux rayons lumineux qui les traversaient séparément. Ces physiciens disent avoir constaté la dispersion des gaz et déterminé par le même moyen des indices de réfraction de liquides, mais sans rapporter aucun résultat numérique.

Toutefois, Arago <sup>(2)</sup> a déterminé plus tard le pouvoir dispersif de l'air en l'achromatisant par un prisme de crown, et il a trouvé que le rapport du pouvoir dispersif de l'air à celui du crown est d'environ  $\frac{10}{13}$ .

Dans les expériences primitives de Biot et Arago, on n'avait aperçu aucune différence entre la réfraction de l'air sec et celle de l'air plus

<sup>(1)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. I<sup>er</sup>, p. 1 (1821).

<sup>(2)</sup> *Mémoires scientifiques*, t. II, p. 739.

ou moins humide à la même pression; on avait conclu de là que l'indice de réfraction de la vapeur d'eau est le même que celui de l'air, ou du moins qu'il en diffère si peu, qu'il n'y a nul compte à tenir de la différence dans les observations astronomiques.

M. Fizeau, en 1852 (<sup>1</sup>), a pu, avec l'appareil interférentiel d'Arago, constater l'inégale réfraction de l'air sec et de l'air humide.

L'appareil se composait d'un tube de 10 mètres de longueur, traversé par un des rayons interférents, l'autre passant dans l'air extérieur. On introduisait successivement dans le tube de l'air sec, puis de l'air que l'on avait saturé d'humidité en le faisant passer au travers d'éponges mouillées. On observait les franges d'interférence produites par les deux faisceaux qui, émanant d'une fente, traversaient ensuite deux fentes d'Young, puis un compensateur d'Arago.

La substitution du gaz humide au gaz sec donnait lieu à un déplacement de franges que l'on annulait au moyen du compensateur. La différence de marche due au compensateur a pour expression

$$\Delta = 2e(m \cos r - \cos i) - 2em,$$

$m$  désignant l'indice de réfraction des lames,  $e$  leur épaisseur,  $i$  l'angle d'incidence ou l'inclinaison, et  $r$  l'angle de réfraction correspondant. L'épaisseur  $e$  a été déterminée directement au sphéromètre et trouvée égale à 2,485; l'indice  $m$ , mesuré par le déplacement des divisions d'une règle, fut trouvé égal à 1,54.

En appelant  $n$  et  $n'$  les indices de réfraction de l'air sec et de l'air humide qu'on lui substitue,  $L$  la longueur des tubes,  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière blanche, laquelle a été prise égale à 0<sup>mm</sup>,000589, et  $f$  le nombre de franges auquel correspond cette différence de marche géométrique, on a

$$\Delta = f\lambda = (n - n')L.$$

En opérant à des températures différentes, on a trouvé

A 6°.....	$f = 5,72$
A 17°.....	$f = 11,71$

Si l'on compare ces nombres avec les tensions de la vapeur d'eau

(<sup>1</sup>) *Mémoires scientifiques d'Arago*, t. II, p. 724.

aux températures correspondantes, on trouve qu'il y a proportionnalité entre les valeurs de  $m$  et les poids spécifiques de la vapeur d'eau. Il en résulte que la diminution de l'indice de réfraction de l'air, due à la présence de la vapeur d'eau, est proportionnelle au poids spécifique de cette vapeur, et, par suite, que l'excès de l'indice de réfraction de la vapeur d'eau sur l'unité est aussi proportionnel au poids spécifique de la vapeur.

On peut enfin déduire de là, par une série de calculs faciles et en adoptant pour l'air le nombre de Biot et Arago, les indices de réfraction de l'air saturé d'humidité à différentes températures.

Températures.	Air sec. $1000(n-1)$	Air humide. $1000(n'-1)$
0°	0,2945	0,2943
5	0,2892	0,2889
20	0,2792	0,2786
..	.....	.....
100	0,2155	0,1877

Du nombre relatif à la température de 100 degrés et qui correspondrait à la vapeur d'eau pure, on déduit pour l'indice  $n_0$  de cette vapeur qui correspondrait à la température de zéro et à la pression de 760 millimètres, si l'expérience était possible dans ces conditions,

$$1000(n_0-1) = 0,1877 \left(1 + \frac{100}{273}\right) = 0,257.$$

On peut encore présenter ces résultats sous une autre forme. Comme l'humidité diminue la réfraction, elle produit le même effet qu'une élévation de température convenable. Ainsi à zéro, la présence de la vapeur d'eau dans l'air produit un effet moindre qu'une élévation de température de 0°,2; l'influence sera plus grande pour d'autres températures, comme l'indique le tableau suivant :

A 0°.....	0,2
A 12.....	0,5
A 20.....	1,0
A 30.....	1,6
A 35.....	2,3

Ces nombres montrent bien que la présence de la vapeur d'eau ne

modifie pas les propriétés de l'air d'une quantité qui soit appréciable pour le cas de la réfraction atmosphérique.

M. Jamin (1) a employé aussi la méthode des interférences pour déterminer directement la réfraction de l'air. Son appareil se composait de deux tubes de 1 mètre de longueur pleins de gaz sec, traversés par deux faisceaux lumineux issus d'une même fente et qui interféraient après s'être réfléchis sur les deux miroirs de Fresnel. Quand la pression change dans l'un des tubes, il en résulte entre les deux faisceaux une différence de marche que l'on mesure à l'aide d'un compensateur analogue à celui de Fresnel; pour plus de précision, M. Jamin observait avec un verre rouge.

Soient  $H$  et  $H'$  les pressions dans les deux tubes,  $n$  et  $n'$  les indices de réfraction correspondants,  $\Delta$  la différence de marche et  $L$  la longueur des tubes; on a

$$(n - n')L = \Delta.$$

La loi des réfractions donne

$$\frac{n - 1}{H} = \frac{n' - 1}{H'}.$$

On en déduit

$$\frac{n - 1}{H} = \frac{n - n'}{H - H'}.$$

Remplaçons dans cette équation  $n - n'$  par sa valeur tirée de l'expérience, et  $n - 1$  par son expression en fonction de l'indice de réfraction à zéro, il vient

$$\frac{n_0 - 1}{760(1 + \alpha t)} = \frac{\Delta}{L(H - H')},$$

et par suite

$$n_0 - 1 = \frac{\Delta}{L} \frac{760}{H - H'} (1 + \alpha t).$$

En opérant ainsi, M. Jamin a trouvé :

Pour une 1 <sup>re</sup> série à 20,0.....	$n_0 = 0,297$
Pour une 2 <sup>e</sup> série à 22,2.....	$n_0 = 0,291$
Pour une 3 <sup>e</sup> série à 23,2.....	$n_0 = 0,294$

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XLIX, p. 282.

La moyenne de ces expériences donne 0,294, c'est-à-dire sensiblement le nombre de Biot et Arago.

M. Jamin a déterminé les indices de réfraction de quelques gaz par le même moyen et trouvé des nombres peu différents de ceux de ses prédécesseurs.

Voici, d'ailleurs, le tableau des résultats obtenus pour les principaux gaz par ces différents physiciens :

Gaz.	1000( $n_s - 1$ ).			
	Biot et Arago.	Dulong.	Jamin.	Arago.
Air .....	0,2945		0,294	
Oxygène.....	0,280	0,272	0,275	
Azote .....	0,295	0,300		
Hydrogène.....	0,142	0,138	0,143	
Protoxyde d'azote.....		0,503	0,507	
Bioxyde d'azote.....		0,303		
Acide carbonique.....	0,449	0,449	0,450	
Oxyde de carbone.....		0,340		0,365
Cyanogène.....		0,834		0,825
Chlore.....		0,772		
Ammoniaque.....	0,381	0,385		
Acide chlorhydrique.....	0,439	0,449		

Les nombres attribués à Arago sont déduits des moyennes des expériences qui ont été rapportées dans le tome II, p. 711, de ses *Mémoires scientifiques*.

Les résultats obtenus par M. Jamin présentent encore entre eux des différences qui dépassent  $\frac{1}{100}$ , et M. Jamin ajoute d'ailleurs : « Si la mesure de l'indice des gaz par les interférences ne le cède pas en exactitude aux méthodes déjà employées, elle ne peut certainement être vantée comme étant plus précise. » On voit aisément qu'un changement de pression de 1 millimètre produit un déplacement d'environ 0,6 de frange. « Or, à cause des difficultés de toute nature que l'on rencontre dans ces recherches, à cause surtout de la trépidation des franges, on peut à peine mesurer le déplacement à  $\frac{1}{2}$  frange près. » J'espère montrer plus loin que ces difficultés ne sont pas insurmontables, et que la méthode des interférences présente, au contraire, des avantages marqués sur la mesure des déviations par un prisme.

M. Jamin a employé une méthode un peu différente pour déterminer l'indice de réfraction de la vapeur d'eau et le changement qu'éprouve

la réfraction de l'eau par la compression. Il a eu recours aux franges des lames épaisses, c'est-à-dire à l'interférence de deux faisceaux qui se sont réfléchis convenablement sur les deux faces des deux lames de verre à faces parallèles. Deux tubes, de 4 mètres de longueur, traversés par les faisceaux interférents, étaient parcourus, l'un par un courant d'air sec, l'autre par un courant d'air qui avait emprunté de l'humidité à une solution titrée d'acide sulfurique. Les choses étant ainsi disposées, on amenait la frange centrale en un certain point, à l'aide d'un compensateur, puis on intervertissait les courants de gaz et l'on tournait de nouveau le compensateur pour ramener les franges au même point. Le compensateur ayant été gradué expérimentalement, on savait ainsi le nombre de franges auquel correspondait le changement d'indice de réfraction de l'air, produit par la vapeur d'eau dont on connaissait en même temps la force élastique. On peut déduire de là la valeur de l'indice  $n_0$ , qui correspondrait à la vapeur d'eau à zéro et à la pression de 760 millimètres; M. Jamin a trouvé ainsi

$$1000(n_0 - 1) = 0,261.$$

Ce nombre s'accorde, autant qu'on peut l'espérer, avec celui qui résulte des expériences de M. Fizeau.

On peut d'ailleurs calculer théoriquement la réfraction de la vapeur d'eau de diverses manières, soit en la déduisant de la réfraction de l'eau par la loi des puissances réfractives ou par les excès de réfraction, soit en considérant la vapeur comme un mélange d'hydrogène et d'oxygène condensés. On obtient ainsi :

Par les puissances réfractives.....	$1000(n_0 - 1) = 0,312$
Par les excès de réfraction.....	$1000(n_0 - 1) = 0,268$
Par le mélange d'H et d'O.....	$1000(n_0 - 1) = 0,274$

On voit que la loi des puissances réfractives ne convient pas, comme Arago l'avait annoncé, mais les résultats des deux autres calculs diffèrent assez peu de l'expérience, et les mesures directes n'ont pas été effectuées encore avec assez de précision, pour qu'on en puisse tirer aucune conclusion définitive.

Je citerai encore les expériences de M. Le Roux sur la réfraction de certaines vapeurs, celles du soufre, du phosphore, de l'arsenic et du

mercure; M. Le Roux a employé la méthode de Biot et Arago, mais ses recherches n'ont qu'un rapport éloigné avec le sujet que je me propose de traiter.

Dans ces dernières années, M. Ketteler <sup>(1)</sup> a cherché à déterminer la dispersion de l'air. Son appareil est identique à celui de M. Jamin, et les tubes à gaz communiquaient avec un manomètre pouvant aller jusqu'à 4 atmosphères. Il se servait de trois sources monochromatiques, des flammes colorées par du lithium, du sodium et du thallium, dont il avait déterminé les longueurs d'onde par la méthode des anneaux de Newton. L'expérience était dirigée de la manière suivante. Les deux tubes étant remplis de gaz à la même pression, on éclairait l'appareil avec deux sources de lumière, jaune et rouge par exemple, et l'on obtenait deux systèmes de franges d'interférence avec même frange centrale; on faisait alors varier la pression d'une manière continue dans l'un des deux tubes : les franges se déplaçaient dans un certain sens et l'on comptait le nombre de bandes nécessaires pour rétablir au même point une nouvelle coïncidence entre les franges des deux systèmes. M. Ketteler a trouvé que 7 franges de la lumière rouge du lithium équivalent dans l'air à 8 franges de la lumière jaune de la soude, et 19 franges de celle-ci à 21 du vert de thallium. L'expérience a été poussée jusqu'à  $2\frac{1}{2}$  atmosphères et les nombres observés ont toujours donné ces rapports simples d'une manière absolue.

M. Ketteler déduit de là les changements d'indices de réfraction par une série de calculs un peu longs, que l'on peut réduire aux termes suivants.

Soient  $n_1, n_2$  les indices de l'air pour les deux longueurs d'onde  $\lambda_1, \lambda_2$  et à la pression H de l'un des tubes;  $n'_1, n'_2$  les indices à la pression H' de l'autre tube. En désignant par L la longueur des tubes, la différence de marche étant de  $f_1$  longueurs d'onde pour la première source et de  $f_2$  pour la deuxième, on a

$$(n'_1 - n_1)L = f_1 \lambda_1,$$

$$(n'_2 - n_2)L = f_2 \lambda_2,$$

---

<sup>(1)</sup> *Pogg. Annalen*, t. CXXIV, p. 390 (1865).



d'où l'on déduit

$$\frac{n'_1 - n_1}{f_1 \lambda_1} = \frac{n'_2 - n_2}{f_2 \lambda_2}.$$

On a d'ailleurs, comme nous l'avons vu plus haut,

$$\frac{n'_1 - 1}{H'} = \frac{n_1 - 1}{H} = \frac{n'_1 - n_1}{H' - H}.$$

On peut donc écrire aussi, en remplaçant les différences  $n'_1 - n_1$  et  $n'_2 - n_2$  par les quantités  $n_1 - 1$  et  $n_2 - 1$  qui leur sont proportionnelles,

$$\frac{n_1 - 1}{f_1 \lambda_1} = \frac{n_2 - 1}{f_2 \lambda_2}.$$

L'expérience donnant le rapport  $\frac{f_1}{f_2}$  par les coïncidences, et les longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant connues, on en déduit l'un des indices de réfraction en fonction de l'autre.

En adoptant pour la raie D le nombre 0,2947 et en corrigeant les résultats de M. Ketteler d'une petite erreur commise sur la longueur d'onde du thallium, on obtient pour les trois raies considérées les valeurs suivantes :

Lithium (raie rouge).....	0,29367
Sodium (D).....	0,29470
Thallium (raie verte).....	0,29572

M. Ketteler a déduit de là, par une formule de dispersion, l'indice de réfraction de l'air pour toutes les raies du spectre ; il résulte de ses nombres que la dispersion pour les raies A et H est de  $\frac{1}{40}$ . La dispersion du crown pour les mêmes raies étant  $\frac{1}{25}$  environ, le rapport des deux dispersions est  $\frac{25}{40} = \frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ , nombre notablement plus faible que celui qu'avait donné Arago.

Enfin je citerai, pour mémoire seulement, un travail de M. Croullebois (') sur la réfraction et la dispersion des gaz et des vapeurs. La méthode employée est celle des demi-lentilles de M. Billet, avec l'aide du compensateur à lames prismatiques, imaginé aussi par M. Billet.

---

(') *Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. XX, p. 136 (1870).

Les nombres renfermés dans ce Mémoire sont trop discordants entre eux et trop éloignés de la vérité pour qu'il me paraisse utile de les discuter.

## II. — PROCÉDÉS D'OBSERVATION.

Il résulte de tous ces travaux que l'excès de l'indice de réfraction d'un gaz sur l'unité, du moins dans les limites de précision des expériences, est proportionnel à la pression et en raison inverse du binôme de dilatation. Comme cette loi est analogue à celles de Mariotte et de Gay-Lussac, il y a lieu de chercher jusqu'à quel point elle est exacte, et, dans le cas où son exactitude serait mise en défaut, si on ne rétablirait pas l'accord en remplaçant la pression par une quantité proportionnelle au poids spécifique réel du gaz, déduit de la loi de compressibilité qui lui est propre. Il faut voir encore si la correction de température qui entre dans la formule doit être faite avec le coefficient de dilatation ordinaire; enfin les nombres relatifs aux différents gaz, tant pour la réfraction que pour la dispersion, ont besoin d'être déterminés avec une approximation plus grande qu'ils ne paraissent l'avoir été jusqu'à présent.

J'ai employé d'abord la méthode de Borda en y introduisant quelques perfectionnements. La réfraction d'un rayon lumineux à travers un prisme creux, dans lequel on a fait le vide, atteignant à peine 6 minutes, il faut que l'erreur expérimentale soit inférieure à 1 seconde, si l'on veut connaître la réfraction à  $\frac{1}{100}$  près, c'est-à-dire si l'on veut obtenir trois chiffres significatifs exacts dans la partie décimale de l'indice de réfraction. Cette condition n'était certainement pas réalisée dans l'appareil de Biot et Arago, ni dans celui de Dulong. L'appareil dont je me suis servi est un tube de métal à section rectangulaire, dont les côtés ont, l'un 6 centimètres, et l'autre 8 centimètres; ce tube est fermé par deux glaces, formant entre elles un angle de  $132^{\circ}27'$ . Le point de visée était la fente d'un collimateur que l'on observait avec une lunette à micromètre. Les objectifs du collimateur et de la lunette avaient 55 millimètres de diamètre; ils pouvaient donc dédoubler un angle de 3 secondes et l'on pouvait espérer que le pointé se ferait à moins d'une seconde. J'ai essayé d'améliorer les mesures, soit en mul-

tipliant la déviation par plusieurs passages de la lumière à travers le même prisme, soit en observant l'image de la fente avec un microscope à micromètre au lieu de l'examiner avec un oculaire simple; mais on perd rapidement, par le trouble des images, les avantages que semblent promettre ces moyens d'amplification.

L'emploi d'un cercle divisé n'est pas même utile pour la mesure d'angles aussi faibles; il suffit de déterminer la valeur angulaire des divisions du tambour micrométrique. L'appareil est ainsi plus simple, sans aucun préjudice pour la précision.

Le prisme à gaz était en relation permanente avec un manomètre à mercure à deux branches, et, par une disposition de tubes et de robinets qu'il n'est pas utile de décrire, on pouvait isoler ce prisme ou le mettre en communication, soit avec l'atmosphère, soit avec une machine pneumatique, soit avec un réservoir ou une pompe foulante, pour y introduire le gaz sur lequel on voulait expérimenter.

La fente du collimateur était éclairée, soit par une lampe ordinaire, soit par une source de lumière monochromatique. A l'aide de l'oculaire à micromètre, on pointait l'image de cette fente et l'on notait la pression correspondante : on avait ainsi le changement de déviation produit par un changement connu de la pression, ce qui suffisait pour déterminer l'indice de réfraction. Comme les variations de température ont une influence considérable sur la réfraction des gaz, il faut avoir soin, dans ces sortes d'expériences, de déterminer la température avec une grande exactitude. Le prisme était entouré autant que possible d'une longue caisse en bois, remplie de coton, dans laquelle plongeaient les réservoirs de quatre thermomètres. On ne peut considérer ces thermomètres comme donnant la température des gaz, que si l'on a soin d'attendre, avant de faire les pointés, que le gaz échauffé ou refroidi par le jeu des pompes ait eu le temps de prendre la température de son enveloppe.

Avec toutes ces précautions on peut obtenir des mesures très-exactes, et les différents nombres relatifs à une même série d'expériences présentent une concordance remarquable; néanmoins, je ne rapporterai pas les résultats que j'ai obtenus par cette méthode, parce que j'y ai rencontré des difficultés particulières et que je n'ai pas tardé à l'abandonner pour différents motifs.

Les lames de verre servant à fermer le prisme avaient de trop grandes dimensions pour supporter sans danger des pressions de 5 ou 6 atmosphères auxquelles je voulais soumettre les gaz; ces lames n'étaient pas parfaitement planes, de sorte que l'interposition du prisme donnait lieu à un petit changement de mise au point dans la lunette. Quand on employait la lumière blanche, l'image de la fente était un peu irisée par l'interposition du prisme rempli d'air à la pression atmosphérique. Un changement de pression modifiait bien l'aspect de l'image, d'une manière assez sensible pour qu'il fût possible de constater la dispersion des gaz, mais sans permettre de la mesurer avec sécurité, et c'est là un des éléments que je m'étais proposé d'étudier. Enfin je n'étais pas suffisamment assuré que la température des gaz fût indiquée par les thermomètres extérieurs au prisme, à cause des grandes dimensions de cet instrument.

J'ai donc interrompu mes recherches dans cette voie et je suis revenu au phénomène des interférences. Je n'insisterai pas sur les raisons qui m'ont décidé à ne pas avoir recours aux appareils généralement employés, tels que les franges d'Young, les miroirs de Fresnel, les demi-lentilles de M. Billet ou les lames de M. Jamin; on verra, par la suite, les avantages que me paraît offrir un phénomène trop peu connu, qui a été découvert par Talbot (<sup>1</sup>). Ce phénomène consiste en une série de bandes alternativement brillantes et obscures, qui se manifestent dans un spectre lumineux, lorsqu'on introduit un retard sur l'une des moitiés du faisceau qui sert à le former. On peut produire ce retard à l'aide d'une mince lame de verre ou de mica. Si l'on emploie un spectroscope ordinaire, on placera cette lame, soit à la suite du collimateur, soit entre le prisme et la lunette, soit même derrière la lunette, entre l'oculaire et l'œil de l'observateur, de manière à couvrir la moitié de la pupille; si l'on produit la dispersion par un prisme à liquide, on peut encore introduire une lame dans le liquide que renferme le prisme. Pour apercevoir des franges, il faut enfin tenir compte d'une circonstance remarquable signalée pour la première fois par Brewster (<sup>2</sup>), c'est qu'avec un prisme de verre le bord de la lame re-

---

(<sup>1</sup>) *Philosophical Magazine*, t. X, p. 364 (1837).

(<sup>2</sup>) *Report of the British Association*, part. II, p. 12 (1837).

tardatrice doit être parallèle à l'arête réfringente et intercepter la moitié du faisceau qui traverse le prisme dans le voisinage de l'arête. Plus généralement, la moitié du faisceau qui éprouve le plus grand retard doit traverser le prisme du côté opposé à celui vers lequel a lieu la déviation. Ainsi, quand on produit ces bandes par l'interposition d'une lame dans un prisme à liquide, cette lame devra être placée dans le voisinage de l'arête, si elle est plus réfringente que le liquide, et plus près de sa base, au contraire, si elle est moins réfringente que le liquide.

Les bandes ont leur maximum d'éclat quand le spectre est pur et au point, mais on les aperçoit encore de part et d'autre de cette position. M. Airy (<sup>1</sup>), qui a donné une théorie complète de ce phénomène, l'a expliqué, dans le cas général, par des calculs compliqués qui ont sans doute rebuté beaucoup de lecteurs. Les apparences qui se manifestent en dehors du foyer ne présentent aucune utilité pratique, et il suffit de s'en tenir au cas le plus simple, qui est le suivant :

La lumière qui tombe sur le prisme est supposée formée de rayons parallèles ; elle provient, par exemple, d'une fente située au foyer principal d'une lentille sans aberration. A la sortie du prisme, les rayons tombent sur un objectif, dans le plan focal principal duquel ils produisent un spectre pur. Il est à peine nécessaire d'ajouter que le calcul conviendra aussi bien au cas où les rayons incidents ne sont plus parallèles, à condition que l'on observe au foyer conjugué de la fente.

Supposons d'abord qu'une ouverture soit ménagée dans un écran, qu'on y fasse tomber une série d'ondes planes parallèles à l'écran, et qu'on place une lentille convergente sur le trajet des rayons transmis. Pour déterminer l'état vibratoire produit en un point P du plan focal principal de la lentille, il suffit, comme on sait, de joindre ce point P au centre optique et de calculer la résultante des vibrations envoyées par tous les éléments de l'ouverture, parallèlement à cette direction, sur un plan qui lui est perpendiculaire. Si l'ouverture est un rectangle dont la longueur est très-grande par rapport à sa largeur, le phénomène est formé d'une série de bandes parallèles à la plus grande dimension de l'ouverture, et il suffit de considérer ce qui a lieu dans un plan perpendiculaire à cette direction. Enfin les apparences ne sont pas modi-

---

(<sup>1</sup>) *Philosophical Transactions*, 1840, part. II, p. 225, et 1841, p. 1.

fiées et l'éclat est plus grand si les ondes lumineuses, au lieu d'émaner d'un point très-éloigné ou placé au foyer principal du collimateur, proviennent d'une fente étroite parallèle à la longueur de l'ouverture.

Prenons donc pour plan de figure un plan mené par le point P perpendiculairement aux bords de l'ouverture et à la fente qui sert de source. Soient AB (*Pl. I, fig. 1*) la section de cette ouverture,  $\theta$  l'angle que fait avec la normale AN à l'écran la direction AX suivant laquelle on veut déterminer la diffraction, et Q un plan perpendiculaire à cette direction. Désignons par T la période de vibration et par  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière considérée.

Si l'on représente par  $\alpha - \frac{2\pi t}{T}$  la phase de la vibration envoyée au plan Q à l'époque  $t$ , dans la direction considérée, par le bord A de l'ouverture, cette vibration, évaluée parallèlement à un axe quelconque, sera proportionnelle à  $\cos\left(\alpha - \frac{2\pi t}{T}\right)$ .

La phase de la vibration due à un point M de l'ouverture, situé à une distance  $x$  du point A, est

$$\alpha - \frac{2\pi t}{T} - 2\pi \frac{AC}{\lambda} = \alpha - \frac{2\pi t}{T} - 2\pi \frac{x \sin \theta}{\lambda}.$$

La vibration envoyée par un élément  $dx$  est donc une expression de la forme

$$a \cos\left(\alpha - 2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x \sin \theta}{\lambda}\right) dx,$$

et la vibration résultante due à l'ouverture entière est, en appelant  $l$  la largeur de cette ouverture,

$$\begin{aligned} a \int_0^l \cos\left(\alpha - 2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x \sin \theta}{\lambda}\right) dx \\ = \frac{a\lambda}{\pi \sin \theta} \sin \frac{\pi l \sin \theta}{\lambda} \cos\left(\alpha - 2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{l \sin \theta}{2\lambda}\right). \end{aligned}$$

Telle est l'expression bien connue de la diffraction par une fente. On voit d'abord que la phase de la vibration résultante est la même que celle qui provient du milieu O de l'ouverture. L'amplitude de la vibration est proportionnelle au facteur

$$\frac{\lambda}{\pi \sin \theta} \sin \frac{\pi l \sin \theta}{\lambda}.$$

En désignant par  $m$  un nombre entier quelconque différent de zéro, ce facteur devient nul pour toutes les directions données par la condition

$$\frac{l \sin \theta}{\lambda} = m \quad \text{ou sensiblement} \quad \theta = m \frac{\lambda}{l}.$$

On aura donc, dans le plan focal principal d'une lentille située derrière l'ouverture, une frange centrale brillante dont l'ouverture angulaire, vue du centre optique, sera égale à  $\frac{2\lambda}{l}$ , et des franges latérales séparées par des minima nuls à des distances successives égales à  $\frac{\lambda}{l}$ .

L'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude; elle est donc représentée par

$$I = a^2 \left( \frac{\lambda}{\pi \sin \theta} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi l \sin \theta}{\lambda} = a^2 l^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi l \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi l \sin \theta}{\lambda}} \right)^2.$$

Considérons maintenant deux ouvertures rectangulaires parallèles AB et A'B' (*Pl. I, fig. 2*), de largeurs  $l$  et  $l'$ , qui sont séparées par un intervalle opaque BA' de largeur  $\epsilon$ , et supposons que le faisceau qui a traversé la deuxième fente A'B' a subi en outre un retard  $\Delta$ , dû, par exemple, à l'interposition d'une lame réfringente.

Représentons par  $\varphi$ , pour simplifier l'écriture, la phase de la vibration qui correspond au bord A de la première ouverture; la vibration résultante produite par les deux ouvertures, dans une direction qui fait l'angle  $\theta$  avec la normale à l'écran, a pour expression

$$\frac{a\lambda}{\pi \sin \theta} \left\{ \sin \frac{\pi l \sin \theta}{\lambda} \cos \left( \varphi - 2\pi \frac{l \sin \theta}{\lambda} \right) + \sin \frac{\pi l' \sin \theta}{\lambda} \cos \left[ \varphi - 2\pi \frac{\left( l + \epsilon + \frac{l'}{2} \right) \sin \theta - \Delta}{\lambda} \right] \right\}.$$

Posons

$$y = \frac{\pi l \sin \theta}{\lambda}, \quad z = \frac{\pi \epsilon \sin \theta}{\lambda},$$

$$y' = \frac{\pi l' \sin \theta}{\lambda}, \quad \delta = \frac{2\pi \Delta}{\lambda};$$

cette expression devient

$$\frac{a\lambda}{\pi \sin \theta} [\sin \gamma \cos (\varphi - \gamma) + \sin \gamma' \cos (\varphi - 2\gamma - 2z - \gamma' + \delta)].$$

L'intensité est alors, d'après la règle connue,

$$\begin{aligned} I &= a^2 \frac{\lambda^2}{\pi^2 \sin^2 \theta} [\sin^2 \gamma + \sin^2 \gamma' + 2 \sin \gamma \sin \gamma' \cos (\gamma + 2z + \gamma' - \delta)] \\ &= a^2 \left( \frac{l + l'}{\gamma + \gamma'} \right)^2 [\sin^2 \gamma + \sin^2 \gamma' + 2 \sin \gamma \sin \gamma' \cos (\gamma + \gamma' + 2z - \delta)]. \end{aligned}$$

Pour que les minima résultant de l'interférence des deux faisceaux puissent être nuls, il faut évidemment que les ouvertures soient égales; c'est là une condition que l'on cherchera toujours à réaliser dans les expériences. Posons donc  $l = l'$ , il vient

$$I = 2a^2 l^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2} [1 + \cos (2\gamma + 2z - \delta)] = 4a^2 l^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2} \cos^2 \left( \gamma + z - \frac{\delta}{2} \right).$$

L'expression de l'intensité se compose de deux facteurs, dont l'un

$$\frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2} = \left( \frac{\sin \frac{\pi l \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi l \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$$

représente la diffraction due à chacune des ouvertures, et dont l'autre

$$\cos^2 \left( \gamma + z - \frac{\delta}{2} \right) = \cos^2 \pi \frac{(l + \varepsilon) \sin \theta - \Delta}{\lambda}$$

donne aussi des minima nuls qui correspondent à la condition

$$\frac{(l + \varepsilon) \sin \theta - \Delta}{\lambda} = \frac{2m' + 1}{2},$$

$m'$  étant un nombre entier quelconque. Comme les déviations sont toujours très-faibles, on voit que la distance angulaire des minima successifs est ici constante et égale à  $\frac{\lambda}{l + \varepsilon}$ .

On peut donc se représenter le phénomène en imaginant que les bandes de diffraction produites par l'une des deux fentes sont inter-



rompues par une série de franges noires équidistantes, qui ne coïncideront en général avec aucun des minima primitifs.

Enfin, si l'intervalle opaque  $\varepsilon$  est nul ou négligeable par rapport à la largeur des ouvertures, la distance des minima est la même pour les deux facteurs, et l'on a simplement, en remarquant que la lumière n'est sensible que pour des déviations très-faibles,

$$I = 4a^2 b^2 \frac{\sin^2 r}{r^2} \cos^2 \left( r - \frac{\delta}{2} \right) = 4a^2 b^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi l \theta}{\lambda}}{\frac{\pi l \theta}{\lambda}} \right)^2 \cos^2 \pi \frac{l \theta - \Delta}{\lambda}.$$

Si l'on prend pour abscisses les valeurs de  $l\theta$ , on peut représenter par la courbe n° 1 (*Pl. I, fig. 3*) les variations du premier facteur

$$\left( \frac{\sin \frac{\pi l \theta}{\lambda}}{\frac{\pi l \theta}{\lambda}} \right)^2.$$

L'intensité est maximum à l'origine, qui correspond à la normale à l'écran, et les minima nuls ont lieu pour des abscisses égales successivement à  $\lambda$ ,  $2\lambda$ ,  $3\lambda$ , ....

M. Airy a calculé les Tables du produit des deux facteurs, pour un certain nombre de valeurs de la différence de marche  $\Delta$ . Les courbes n° 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 représentent la manière dont varie ce produit, c'est-à-dire la nature des apparences que l'on observe, quand on donne successivement à la différence de marche les valeurs  $0$ ,  $\frac{\lambda}{6}$ ,  $2\frac{\lambda}{6}$ ,  $3\frac{\lambda}{6}$ ,  $4\frac{\lambda}{6}$ ,  $5\frac{\lambda}{6}$  et  $\lambda$ . Rien n'est changé au phénomène quand on ajoute à la différence de marche un nombre entier quelconque de longueurs d'onde. On voit qu'il se manifeste une sorte de glissement des franges vers celui des deux faisceaux qui est modifié, en même temps qu'une variation des intensités, à mesure que la différence de marche augmente d'une manière continue.

Les mêmes formules conviennent au cas où l'écran est un peu incliné sur la direction de la lumière incidente; il suffit alors de compter l'angle  $\theta$  à partir du prolongement des rayons incidents.

Quand la lumière incidente n'est pas homogène, les minima de pre-

mier ordre, c'est-à-dire ceux qui correspondent au premier facteur ou à la courbe n° 1, sont sensiblement superposés pour toutes les couleurs ; mais les minima de second ordre (2<sup>e</sup> facteur) sont dans des positions particulières pour chaque valeur de la longueur d'onde, parce qu'il n'est guère possible que le retard corresponde pour toutes les couleurs à un même nombre, entier ou fractionnaire, de longueurs d'onde. Tous ces minima de second ordre disparaîtront donc le plus souvent dans le phénomène général.

Supposons, au contraire, que la lumière incidente soit formée d'une série de faisceaux cylindriques, dont l'inclinaison sur la normale à l'écran varie d'une manière continue en même temps que la longueur d'onde. Si la différence de marche a la même valeur absolue pour toutes les couleurs, elle correspondra à un nombre de longueurs d'onde croissant, à mesure qu'on ira du rouge au violet. Si, par exemple, cette différence de marche est due à l'interposition d'un milieu réfringent, elle ira en croissant en valeur absolue du rouge au violet, et, à plus forte raison, en valeur relative à la longueur d'onde.

Il peut alors se présenter deux cas :

1<sup>o</sup> Si le retard a lieu sur le faisceau de droite, comme nous l'avons supposé, et si, à mesure que la longueur d'onde diminue, les faisceaux incidents font avec la normale à l'écran, du côté des rayons transmis, un angle de plus en plus grand vers la droite, c'est-à-dire du côté vers lequel s'opère le glissement des franges d'interférences, on voit que le déplacement continu des franges dû à la différence de marche sera augmenté de la rotation progressive des différents faisceaux. La discordance des minima de second ordre sera augmentée et les minima de premier ordre eux-mêmes ne seront plus superposés. On n'apercevra donc qu'un éclaircissement continu, quel que soit le retard introduit et quelles que soient les dimensions des ouvertures. Cette condition est réalisée quand on fait tomber un faisceau de lumière sur un prisme dont l'arête réfringente est située à gauche de l'observateur, et qu'on établit un retard sur la moitié du faisceau située à droite.

2<sup>o</sup> Mais, si les faisceaux incidents s'inclinent progressivement du côté opposé, les franges correspondant à des longueurs d'onde successivement décroissantes se déplaceront d'autant, en sens contraire de celui vers lequel elles avaient glissé par l'effet du retard, et il pourra

arriver, comme on le voit aisément sur la figure, que les minima des couleurs successives soient superposés. C'est le cas où, dans l'expérience du prisme, le retard est établi sur la moitié du faisceau située du côté de l'arête réfringente. Il est facile d'établir la condition nécessaire pour qu'il y ait compensation complète entre ces déplacements en sens opposés, et superposition exacte des minima successifs des différentes couleurs. Si le retard augmente d'une longueur d'onde pendant que le faisceau incident tourne d'un angle égal à  $\frac{\lambda}{l}$ , c'est-à-dire à la distance de deux minima ou à la largeur d'une frange, le premier minimum de droite  $A_8$  de la courbe n° 8 viendra se superposer au premier minimum de gauche  $A_2$  de la courbe n° 2; comme les variations des retards et des déviations sont nécessairement proportionnelles dans une petite étendue du spectre, les minima successifs  $A_2, A_3, A_4, A_5, \dots, A_8$  seront tous superposés, et l'on verra dans le spectre une frange absolument noire. Si l'on désigne par  $\alpha$  la distance angulaire des franges, on doit donc avoir, pour que le phénomène soit pur,

$$\alpha = \frac{\lambda}{l}.$$

Le nombre des franges qui existent entre deux points du spectre est évidemment proportionnel à la différence de marche absolue  $\Delta$ ; la distance des franges est donc proportionnelle à la dispersion  $D$  et en raison inverse de la différence de marche, et l'on peut écrire, en appelant  $K$  une constante,

$$(1) \quad K \frac{D}{\Delta} = \alpha \quad \text{ou} \quad KDl = \Delta\lambda.$$

Si la dispersion est plus grande ou plus petite que celle qui satisfait à cette équation, l'inclinaison des faisceaux incidents varie plus vite ou moins vite que le glissement des franges; les minima ne sont plus nuls, et ils finissent même par disparaître entièrement. On obtiendrait des apparences analogues en modifiant la largeur des ouvertures et la différence de marche.

En général, l'équation (1) n'est satisfaite d'une manière suffisante que pour des longueurs d'onde comprises entre des limites assez rapprochées, de sorte que les bandes ne sont bien nettes que dans une

petite étendue du spectre; mais, si l'on a recours à des appareils très-dispersifs, et si l'on modifie la loi de dispersion en écartant de la position du minimum de déviation dans un sens convenable les prismes qui servent à la produire, on peut obtenir un phénomène très-pur dans une grande étendue du spectre. La différence de marche étant alors considérable, on peut la modifier beaucoup et faire passer en un point plusieurs centaines de franges, sans que les minima cessent d'être sensiblement nuls.

S'il existe un nombre  $f$  de franges entre deux points du spectre dont les longueurs d'onde sont  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et pour lesquels les retards géométriques sont  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , on a, en désignant par  $p_1$  l'ordre de la frange qui correspond à la plus grande des deux longueurs d'onde  $\lambda_1$ ,

$$\Delta_1 = p_1 \lambda_1, \quad \Delta_2 = (p_1 + f) \lambda_1;$$

on en déduit

$$\frac{\Delta_2}{\lambda_2} - \frac{\Delta_1}{\lambda_1} = f.$$

Les applications de ce phénomène sont très-nombreuses. Si, par exemple, le retard est causé par une lame réfringente d'épaisseur  $e$  dont les indices de réfraction relatifs aux mêmes longueurs d'onde sont  $n_1$  et  $n_2$ , on a aussi

$$\Delta_1 = (n_1 - 1) e, \quad \Delta_2 = (n_2 - 1) e,$$

ce qui donne

$$f = e \left( \frac{n_2 - 1}{\lambda_2} - \frac{n_1 - 1}{\lambda_1} \right).$$

Si les deux faisceaux interférents traversent séparément deux milieux différents de même épaisseur, on aura de même, en indiquant par des accents les indices relatifs au second milieu,

$$f = e \left( \frac{n_2 - n'_2}{\lambda_2} - \frac{n_1 - n'_1}{\lambda_1} \right).$$

Supposons enfin que l'on fasse varier d'une manière continue, de  $n$  à  $n'$  pour une longueur d'onde  $\lambda$ , l'indice de réfraction du milieu traversé par l'un des faisceaux, le nombre des franges  $f$  qui passeront au

point correspondant du spectre, pendant cette modification, sera donné par l'équation

$$f\lambda = (n' - n) e.$$

Les franges marchent vers le rouge ou vers le violet, suivant que la différence de marche augmente ou diminue. C'est là le phénomène dont nous ferons le plus grand usage.

Pour utiliser ces franges dans un appareil interférentiel, il faut pouvoir modifier à volonté la différence de marche, indépendamment des effets que l'on veut mesurer, afin de donner au phénomène son maximum de netteté; il est nécessaire, en outre, d'écarter les deux faisceaux, afin de pouvoir les modifier séparément, et de les ramener ensuite au contact pour supprimer l'intervalle qui existe entre eux. Les bilames imaginées par M. Fizeau permettent de satisfaire à ces deux conditions d'une manière très-simple.

En principe, l'appareil qui m'a servi se compose d'un collimateur K (*Pl. I, fig. 4*) formé d'un objectif au foyer principal duquel se trouve une fente F éclairée par une source de lumière blanche. Les rayons qui sortent du collimateur tombent sur une bilame M formée par deux morceaux d'une lame de verre à faces parallèles collés à angle droit. Les deux moitiés du faisceau de lumière sont ainsi déplacées à droite et à gauche par la réfraction et cheminent parallèlement entre elles. Ces deux faisceaux peuvent alors être modifiés d'une manière quelconque et traverser des milieux différents; ils rencontrent plus loin une deuxième bilame M', dirigée en sens contraire, qui les ramène en contact. Une fente plus large L empiète également sur les deux faisceaux et constitue les deux ouvertures rectangulaires que nous avons considérées. Enfin les rayons sont reçus sur un système de prismes réfringents P, et l'on observe le phénomène avec une lunette K'.

Si l'on n'interpose aucun milieu particulier sur le trajet de la lumière et si les faces de chacune des bilames sont également inclinées sur la direction des rayons, les faisceaux n'ont aucune différence de marche. Il suffit maintenant, à l'aide d'une vis micrométrique, de faire tourner l'une des bilames autour d'un axe vertical et dans un sens convenable, pour introduire un retard croissant sur celui des deux faisceaux interférents qui est situé du côté de l'arête du prisme et produire dans le

spectre des bandes aussi larges ou aussi fines qu'on le veut. En donnant alors à la fente  $L$  une ouverture convenable, on peut rendre les minima absolument obscurs.

J'ai vérifié d'abord, avec un appareil analogue, la relation  $\alpha = \frac{\lambda}{l}$  qui doit exister entre la largeur des franges et celle de l'ouverture. On mesurait la distance angulaire des franges situées entre la raie D et la raie du thallium, et l'on déterminait par une vis micrométrique la largeur de la fente  $L$ , c'est-à-dire la valeur de  $2l$  qui donnait les minima les plus sombres. Voici quelques résultats :

Distance de deux minima $\alpha$ .	Largeur de la fente $2l$ .	Produit $l\alpha$ .
	<sup>mm</sup>	
6,23	0,70	2,18
3,45	1,25	2,15
2,21	1,81	2,00
1,56	2,00	1,56
1,25	2,45	1,52
0,93	3,50	1,62
	Moyenne...	1,84

Comme la minute est égale à 0,0003 environ, le nombre 1,84 équivaut à 0<sup>mm</sup>,000552, ce qui est sensiblement la valeur de la longueur d'onde pour cette région du spectre. On remarquera que l'on a toujours une tendance à rendre la fente trop large quand les bandes du spectre sont elles-mêmes très-écartées, et trop étroite, au contraire, quand elles sont plus resserrées; cette circonstance s'explique aisément par ce que l'éclairement général est d'autant plus faible que la valeur de  $l$  est plus petite.

Pour étudier la réfraction des gaz, on place entre les deux bilames deux tubes de même longueur, fermés par des lames de verre. Supposons qu'on observe une région du spectre où la longueur d'onde est  $\lambda$ , que la masse de gaz renfermée dans l'un des tubes soit invariable, et que l'on compte le nombre  $f$  des franges qui passent en ce point pendant que la pression dans l'autre tube varie de  $H_1$  à  $H_2$ . Les indices de réfraction correspondants de ce gaz étant  $n_1$  et  $n_2$ , on aura

$$(n_1 - n_2) L = f\lambda,$$

équation dont on peut déduire les indices de réfraction.

En effet, si l'on admet la proportionnalité, au moins approximative, des réfractions aux pressions, on a

$$\frac{n_1 - 1}{H_1} = \frac{n_2 - 1}{H_2} = \frac{n_1 - n_2}{H_1 - H_2}.$$

On en déduit

$$\frac{n_1 - n_2}{H_1 - H_2} = \frac{f}{H_1 - H_2} \times \frac{\lambda}{L}$$

ou bien, en désignant par P le changement de pression,

$$\frac{n_1 - 1}{H_1} = \frac{f}{H_1 - H_2} \frac{\lambda}{L} = \frac{f \lambda}{P L}.$$

Les quantités qu'il importe de déterminer le plus exactement sont le nombre des franges  $f$  et la différence de pression correspondante P. Avec un appareil de 2 mètres de longueur, comme celui qui a servi, une variation de pression de 1 millimètre donnait plus d'une frange; si l'on voulait pointer le  $\frac{1}{10}$  de frange, il fallait donc mesurer la différence de pression à moins de  $\frac{1}{10}$  de millimètre, ce qui est presque impossible à réaliser avec une colonne de mercure de 6 à 7 mètres de longueur.

Pour éviter cette difficulté, on mettait les deux tubes à gaz en communication avec les branches d'un manomètre différentiel, et l'on mesurait la différence des pressions avant et après le passage des franges. Soient  $H_1$  et  $H'_1$  les pressions initiales,  $H_2$  et  $H'_2$  les pressions finales dans les deux tubes,  $n_1$  et  $n'_1$ ,  $n_2$  et  $n'_2$  les indices de réfraction correspondants. Le changement qui s'est produit dans la différence de marche des deux faisceaux lumineux est

$$(n_1 - n_2) L - (n'_1 - n'_2) L = [(n_1 - n'_1) - (n_2 - n'_2)] L = f \lambda.$$

Si l'on admet la loi approchée, on a encore

$$\frac{n_1 - 1}{H_1} = \frac{n_1 - n_2}{H_1 - H_2} = \frac{n'_1 - n'_2}{H'_1 - H'_2} = \frac{(n_1 - n'_1) - (n_2 - n'_2)}{(H_1 - H'_1) - (H_2 - H'_2)}.$$

Le dénominateur de cette dernière fraction est le changement qui s'est produit dans la différence de pression des deux tubes. Désignons ce changement par P, il vient encore

$$\frac{n_1 - 1}{H_1} = \frac{f \lambda}{P L}.$$

Les différences  $H_1 - H'_1$  et  $H_2 - H'_2$  peuvent maintenant être évaluées au cathétomètre avec toute la précision désirable. On a été ainsi conduit à l'appareil représenté (*Pl. I, fig. 5*).

1° Les tubes à gaz A et A' sont en cuivre rouge, à section carrée, de 2 mètres environ de longueur. Ils sont soudés l'un à l'autre dans toute leur longueur et fermés solidement à leurs extrémités par des plaques de verre. De petites lames de caoutchouc entre le verre et les faces terminales permettent d'obtenir une fermeture absolue. Le tout est placé dans une grande enveloppe en métal, remplie d'eau que l'on peut agiter avec des palettes verticales auxquelles on imprime un mouvement alternatif à l'aide d'une roue à bielles. La température est donnée par plusieurs thermomètres  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ . Enfin les tubes à gaz portent chacun deux tubulures  $a$  et  $a_1$ ,  $a'$  et  $a'_1$ , munies des robinets  $r$  et  $r_1$ ,  $r'$  et  $r'_1$ .

2° Les tubulures  $a$  et  $a'$  sont reliées séparément par des tubes de plomb avec les deux branches B et B' d'un manomètre différentiel. Une branche latérale ouverte C sert à introduire le mercure, et sa communication avec le manomètre peut être interrompue à volonté. Un robinet  $r_2$  permet encore de faire communiquer ou d'isoler l'une de l'autre les deux branches du manomètre différentiel.

3° Un des tubes à gaz A communique en outre par un robinet à trois voies  $r_3$  avec un manomètre à air libre, dont la plus courte branche D est d'un gros diamètre et de 1<sup>m</sup>, 20 de hauteur, et dont l'autre branche plus étroite E s'élève à 8 mètres environ. Le mercure est introduit dans ce manomètre, à l'aide d'une pompe Q, par un tube de fer muni d'un robinet à vis R. La troisième branche du robinet  $r_3$  permet d'introduire ou de laisser échapper les gaz, dont l'écoulement est réglé par un robinet à vis  $R_1$ .

4° La partie optique comprend un collimateur K à fente verticale, à la suite duquel se trouve une bilame M montée sur un trépied qui permet de rendre l'arête d'intersection exactement parallèle à la fente. Ce trépied, qui est représenté avec plus de détails *fig. 6*, porte en outre une vis de rappel par laquelle on peut faire tourner lentement la bilame autour d'un axe vertical. Une deuxième bilame M' est disposée de la même manière à la suite des tubes à gaz. Le trépied de celle-ci est porté lui-même par une planchette à coulisse, qui permet de le faire



glisser horizontalement, de façon que les deux faisceaux lumineux, après l'avoir traversée, se trouvent exactement en contact. Il est bon que cette bilame soit un peu plus épaisse que la première, précisément pour mieux assurer le rapprochement des faisceaux.

Vient ensuite une fente L, que l'on peut agrandir ou diminuer par une vis micrométrique et déplacer latéralement. On modifie cette fente par tâtonnements, de façon que les minima dans le spectre paraissent absolument noirs. Enfin, après cette fente, les rayons tombent sur plusieurs prismes réfringents P, P', P'', et l'on observe le spectre avec une lunette K' à réticule.

La source de lumière est une lampe de Drummond S, placée en face du collimateur. Pour obtenir des points de repère dans le spectre, il suffit de mettre un instant devant la fente une flamme quelconque renfermant de la soude. On pointe une fois pour toutes le réticule sur la raie D, et l'on vérifie de temps en temps que la lunette ne s'est pas déplacée. Si l'on veut avoir dans le spectre des traits de repère permanents, on dispose horizontalement, devant la fente du collimateur, deux fils de métal  $m$  et  $m'$  en regard l'un de l'autre, et l'on fait passer entre eux une série d'étincelles d'induction. La présence de ces fils ne gêne en rien le passage de la lumière de la lampe, et le spectre illuminé dans toute son étendue est sillonné par les raies brillantes caractéristiques des métaux qui servent d'électrodes.

Pour introduire les gaz dans l'appareil à des pressions considérables, on employait le tube D du grand manomètre comme pompe foulante. On remplissait d'abord ce tube de gaz à la pression ordinaire, puis, tournant d'une manière convenable le robinet à trois voies  $r_3$ , on refoulait le gaz à l'aide de la pompe à mercure.

Dans quelques expériences, en particulier celles qui avaient pour but de déterminer l'influence de la température, j'ai été obligé de renoncer à ce grand appareil. Les dimensions sont telles, en effet, qu'il était impossible d'y maintenir constante la température du bain à quelques degrés seulement au-dessus de la température ambiante. D'ailleurs, une fois l'influence de la pression connue, il était inutile d'employer des tubes à gaz aussi longs, puisqu'il suffisait d'augmenter la variation de pression pour obtenir le déplacement de franges qui paraissait le mieux convenir aux observations.

J'ai donc fait construire un second appareil de dimensions beaucoup moindres. Les tubes à gaz A et A' (*Pl. I, fig. 7*), aussi en cuivre et à section carrée, ont environ 25 centimètres de longueur, et sont terminés par des glaces bien travaillées. Ces tubes sont renfermés dans une première enceinte MN en cuivre, remplie d'eau. Une seconde enceinte M'N', également pleine d'eau, entoure complètement la première, sauf dans le voisinage des glaces terminales où l'on a ménagé, en avant et en arrière, deux cheminées bouchées extérieurement par de nouvelles glaces. Des thermomètres T<sub>1</sub> et T<sub>2</sub> donnent la température du premier bain, et d'autres thermomètres T<sub>3</sub> et T<sub>4</sub> celle du second bain; enfin des agitateurs convenablement disposés permettent d'obtenir de part et d'autre des températures sensiblement constantes. Si les températures des deux bains diffèrent très-peu, on peut considérer que la température du gaz est égale à celle du bain intérieur, et que la petite cause d'erreur qui peut provenir des extrémités est absolument négligeable.

Les autres parties de l'appareil sont les mêmes que dans le premier cas. La disposition optique n'a pas été modifiée. Les tubes à gaz portent deux tubulures  $\alpha$  et  $\alpha'$  munies de robinets  $r$  et  $r'$ , que l'on fait communiquer aux deux branches B et B' (*Pl. I, fig. 5*) du manomètre différentiel. Pour l'étude des températures, le manomètre latéral C donnait des pressions suffisantes et l'on supprimait la communication des appareils avec le grand manomètre DE. En manœuvrant d'une manière convenable le robinet  $r_2$  pendant l'introduction du gaz, on peut faire en sorte que la pression soit très-inégale dans les deux tubes; on fait alors un premier pointé, et l'on mesure la différence de niveau du mercure dans les deux branches du manomètre. On laisse écouler lentement du mercure par la branche latérale C, on compte toutes les franges qui passent sur le réticule de la lunette; puis on arrête l'écoulement et l'on mesure la nouvelle différence des niveaux quand le phénomène optique est devenu immobile. L'observation des thermomètres est faite avant et après l'expérience, et la température du gaz est donnée par la moyenne des quatre lectures relatives aux deux thermomètres intérieurs T<sub>1</sub> et T<sub>2</sub>.

Comme on évaluait le  $\frac{1}{10}$  de frange, on voit que, pour obtenir le rapport  $\frac{f}{p}$  à  $\frac{1}{1000}$  près, il suffirait de compter cent franges. Il n'y a pas

d'avantage à en compter un très-grand nombre, car l'attention ne tarde pas à se fatiguer quand on observe cette sorte de grillage se mouvant d'une manière régulière. Au bout de quelque temps, la vision se trouble, les franges paraissent s'agiter, et l'on peut aisément en laisser échapper quelques-unes. Je pouvais régulièrement et avec sécurité compter jusqu'à 300 franges lorsque le mouvement était assez lent pour qu'il en passât une ou deux seulement par seconde; l'expérience durait donc deux ou trois minutes. Un pareil déplacement de franges équivalait pour l'air à une différence de pression d'environ 25 centimètres avec le grand appareil, et à une différence de pression de 2 mètres avec le plus petit.

Pour avoir un degré d'approximation égal à celui que donnait l'observation des franges, il fallait donc observer les hauteurs de mercure à  $\frac{1}{20}$  de millimètre dans le premier cas, tandis que, dans le second, une erreur de  $\frac{1}{6}$  de millimètre était sans importance.

### III. — INFLUENCE DE LA PRESSION.

Pour étudier l'influence de la pression, on évaluait à 1 centimètre près, par des divisions marquées sur la planchette du grand manomètre, la pression absolue  $H_1$  de l'un des tubes A, on mesurait la différence  $H_1 - H'_1$  par le manomètre différentiel, et l'on pointait la frange qui se trouvait sur la raie D. On faisait ensuite diminuer lentement la pression en laissant écouler, soit du gaz par le robinet à vis  $R_1$ , soit du mercure par le robinet R. On notait le nombre des franges qui avaient passé pendant cette opération, et l'on mesurait de même la pression finale  $H_2$  du premier tube et la nouvelle différence  $H'_2 - H_2$ , que je supposerai de sens contraire à la première. Le changement qui s'est produit dans la différence de pression des deux tubes est

$$P = (H_1 - H'_1) + (H'_2 - H_2).$$

On connaît ainsi le rapport  $\frac{f}{P}$  entre les deux pressions  $H_1$  et  $H_2$ .

Si les réfractions étaient proportionnelles aux pressions, ce rapport serait constant, et l'on aurait

$$\frac{n_1 - 1}{H_1} = \frac{n_2 - 1}{H_2} = \frac{f}{P} \frac{\lambda}{L}.$$

L'expérience indique que cette condition n'est pas remplie. Le rapport  $\frac{f}{p}$  est donc une fonction de la pression à laquelle on opère, et l'on peut rendre compte des observations d'une manière complète en admettant que ce rapport varie proportionnellement à la pression moyenne, ce qui donne

$$(1) \quad \frac{f}{p} = A \left( 1 + B \frac{H_1 + H_2}{2} \right).$$

Si la pression  $H$  varie infiniment peu, le premier membre représente la dérivée du nombre des franges par rapport à la variation de pression ; on a donc

$$\frac{df}{dH} = A (1 + BH).$$

D'autre part, la variation  $dn$  de l'indice de réfraction sera liée au déplacement des franges par la relation

$$Ldn = \lambda df,$$

ce qui donne

$$\frac{dn}{dH} = \frac{\lambda}{L} A (1 + BH).$$

Comme l'indice de réfraction est égal à l'unité lorsque la pression est nulle, il vient finalement

$$(2) \quad n - 1 = \frac{\lambda}{L} AH \left( 1 + B \frac{H}{2} \right).$$

En d'autres termes, le rapport  $\frac{n-1}{H}$  est égal au produit de la constante  $\frac{\lambda}{L}$  par la valeur du rapport  $\frac{f}{p}$  relatif à la pression moyenne  $\frac{H}{2}$ .

Les différentes expériences d'une même série ne sont pas exactement à la même température, comme nous l'avons supposé, à cause des variations continuelles de la température ambiante. Si ces variations sont très-faibles, on peut admettre que l'indice de réfraction varie proportionnellement au poids spécifique du gaz, c'est-à-dire en raison inverse du binôme de dilatation. Pour un même changement de pression, les déplacements  $f$  et  $f'$  des franges aux températures  $t$  et  $t'$ , dans un tube

de longueur invariable, satisferaient à l'équation

$$\frac{f}{f'} = \frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t},$$

dans laquelle  $\alpha$  désigne le coefficient de dilatation du gaz. On en déduit

$$f = f' \frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t} = f' [1 + \alpha (t' - t)] = f' + \alpha f' (t' - t),$$

approximation suffisante, si les températures  $t$  et  $t'$  diffèrent très-peu. Comme de petites variations de température n'ont qu'une influence négligeable sur la dilatation du mercure et des règles de métal, on a, en désignant par  $\left(\frac{f}{P}\right)$  le rapport que l'on aurait dû obtenir à la température  $t$ , par  $\left(\frac{f}{P}\right)'$  celui qui a été observé à la température  $t'$ ,

$$\frac{f}{P} = \left(\frac{f}{P}\right)' + \alpha \left(\frac{f}{P}\right)' (t' - t).$$

Une table permet de faire très-rapidement cette correction, parce que le facteur  $\alpha \left(\frac{f}{P}\right)'$  peut être considéré comme constant dans le dernier terme.

Enfin, pour n'avoir pas à tenir compte, dans la suite, de la dilatation du mercure qui sert de manomètre, de la règle de cathétomètre et des tubes à gaz, il est bon de ramener chaque expérience à ce qu'elle serait si le gaz seul était à la température  $t$  et tout le reste à zéro. Si l'on appelle  $L_0$  la longueur des tubes à gaz à zéro et  $a$  leur coefficient de dilatation,  $b$  le coefficient de dilatation du mercure,  $c$  celui de la règle, et  $\frac{f_t}{P_0}$  le nombre que l'on aurait obtenu si tous ces organes eussent été à zéro, on a

$$\frac{f_t}{P_0} \frac{\lambda}{L_0} = \frac{f}{P} \frac{\lambda}{L_0} \frac{1 + bt}{(1 + at)(1 + ct)}.$$

Le rapport  $\frac{f_t}{P_0}$  est celui qu'il faudra faire intervenir dans les équations (1) et (2) pour calculer l'indice de réfraction  $n$  à la température  $t$ . Représentons ce rapport par  $\varphi_t$ , il vient

$$\varphi_t = \frac{f_t}{P_0} = \frac{f}{P} \frac{1 + bt}{(1 + at)(1 + ct)}.$$

A cause de la petitesse des coefficients, on peut écrire

$$\varphi_t = \frac{f}{p} [1 - (a + c - b)t] = \frac{f}{p} - \frac{f}{p} (a + c - b)t.$$

Une nouvelle table permet encore de faire rapidement la correction indiquée dans le dernier terme.

#### AIR ATMOSPHERIQUE.

Voici, comme exemples, trois séries d'expériences faites avec le grand appareil sur l'air atmosphérique. La pression est évaluée en millimètres pour le calcul de  $\varphi$ .

*Première série.* — La température du gaz a varié de 22°, 69 à 22°, 83. Les valeurs de  $\varphi$  ont été ramenées à la température de 22 degrés.

Pression moyenne H.	Valeurs de $\varphi_{22}$ .
5,59 <sup>m</sup>	1,2135
4,71	1,2123
4,39	1,2100
4,13	1,2112
3,92	1,2109

*Deuxième série.* — La température a varié de 22°, 23 à 22°, 32.

Pression moyenne H.	Valeurs de $\varphi_{22}$ .
5,77 <sup>m</sup>	1,2136
5,54	1,2133
5,28	1,2143
5,05	1,2134
4,17	1,2117
3,94	1,2115
2,74	1,2110
2,38	1,2097
1,90	1,2108
1,72	1,2103
1,55	1,2105
1,27	1,2105
1,00	1,2104

*Troisième série.* — La température a varié de  $21^{\circ},37$  à  $21^{\circ},77$ .

Pression moyenne H.	Valeurs de $\varphi_{21}$ .
6,05 <sup>m</sup>	1,2168
5,72	1,2181
5,43	1,2163
5,16	1,2163
4,21	1,2154
3,98	1,2139
3,77	1,2124
2,51	1,2112
1,80	1,2102
1,61	1,2101
1,16	1,2086
0,98	1,2071
0,80	1,2067
0,46	1,2094
0,31	1,2077

Malgré quelques irrégularités inévitables dans la marche des expériences, on voit que la valeur de  $\varphi$  augmente d'une manière sensible avec la pression.

En portant sur un papier quadrillé les nombres de la dernière série, qui est plus complète et plus régulière, on peut ensuite tracer une courbe qui représente le plus exactement possible toutes les expériences et déduire de cette courbe les nombres qui conviennent à un certain nombre de pressions variant d'une manière régulière. Cette courbe est très-sensiblement une ligne droite, ce qui démontre que les valeurs de  $\varphi$ , comme nous l'avons dit, varient proportionnellement à la pression moyenne. On peut donc écrire

$$\varphi = A (1 + BH).$$

En déterminant les coefficients A et B par la méthode de Cauchy, qui fait intervenir toutes les expériences dans le calcul, on trouve

$$\varphi = 1,2069 + 0,00175 H = 1,2069 (1 + 0,00145 H).$$

La différence des nombres calculés par cette formule avec ceux que donne l'expérience n'atteint pas  $\frac{1}{600}$ .

On trouve, en effet :

Pression moyenne.	Valeurs de $\varphi$		Différence calc.-obs.
	observées.	calculées.	
<sup>m</sup> 0,31	1,2077	1,2072	— 5
0,46	1,2094	1,2076	— 18
0,80	1,2067	1,2084	+ 17
0,98	1,2071	1,2086	+ 15
1,16	1,2086	1,2089	+ 3
1,61	1,2101	1,2096	— 5
1,80	1,2102	1,2101	— 1
2,51	1,2112	1,2113	+ 1
3,77	1,2124	1,2134	+ 10
3,98	1,2139	1,2139	0
4,21	1,2154	1,2143	— 11
5,16	1,2163	1,2159	— 4
5,43	1,2163	1,2164	+ 1
5,72	1,2181	1,2167	— 14
6,05	1,2168	1,2175	+ 7

#### AZOTE.

L'azote a été préparé par l'action du phosphore à chaud sur l'air, et le gaz résultant de cette opération a été introduit dans l'appareil en passant dans un tube de cuivre, rempli de limaille de cuivre et chauffé à une température voisine du rouge. En outre, on recueillait de temps en temps le gaz qui s'échappait de l'appareil à réfraction et l'on en faisait l'analyse. Quand l'expérience était bien conduite, il ne restait pas 1 pour 100 d'oxygène. Comme la réfraction de l'oxygène ne diffère pas de  $\frac{1}{10}$  de celle de l'azote, l'erreur causée par cette petite trace de gaz étranger ne pouvait altérer de  $\frac{1}{1000}$  la réfraction absolue et ne modifiait pas l'influence de la pression. Il n'y a donc pas lieu d'en tenir compte pour le moment.

Pour la température moyenne de 21 degrés, les expériences peuvent être représentées par la formule

$$\varphi_{21} = 1,2297 + 0,0021 H = 1,2297 (1 + 0,00171 H).$$

Voici la comparaison des nombres de l'expérience avec les résultats ainsi calculés :



Pression moyenne.	Valeurs de $\varphi$		Différence calc.-obs.
	observées.	calculées.	
<sup>m</sup> 3,01	1,2356	1,2360	+ 4
3,02	1,2362	1,2360	— 2
2,98	1,2363	1,2360	— 3
1,98	1,2345	1,2344	— 1
1,26	1,2340	1,2332	— 8
0,69	1,2325	1,2323	— 2
0,40	1,2305	1,2318	+ 13

## OXYGÈNE.

L'oxygène a été préparé par le chlorate de potasse, puis introduit à plusieurs reprises dans les tubes interférentiels, de manière à éliminer autant que possible tous les gaz étrangers. L'analyse des gaz, faite sur différentes prises pendant la série des expériences, montra qu'il y restait encore de 4 à 5 pour 100 d'azote. La correction n'est pas nécessaire si l'on veut évaluer seulement l'influence de la pression.

Les phénomènes suivent exactement la même marche. A la température de 13°, 5, on peut les représenter par la formule

$$\varphi = 1,1537 + 0,00256 H = 1,1537 (1 + 0,00222 H),$$

comme on le voit par la comparaison suivante des observations avec les résultats du calcul :

Pression moyenne.	Valeurs de $\varphi$		Différence calc.-obs.
	observées.	calculées.	
<sup>m</sup> 5,50	1,1677	1,1673	+ 1
5,20	1,1676	1,1670	— 6
3,97	1,1627	1,1639	+ 12
3,68	1,1613	1,1631	+ 18
3,43	1,1610	1,1625	+ 15
3,21	1,1606	1,1619	+ 13
2,82	1,1596	1,1609	+ 13
2,51	1,1595	1,1601	+ 6
1,95	1,1591	1,1587	— 4
1,76	1,1589	1,1582	— 7
1,27	1,1577	1,1569	— 8
1,11	1,1557	1,1565	+ 8
1,04	1,1586	1,1560	— 26
0,83	1,1569	1,1558	— 11
0,69	1,1585	1,1555	— 30
0,50	1,1549	1,1550	+ 1

L'action de l'oxygène sur le mercure ne présente ici aucun inconvénient, puisque les pressions interviennent seules dans les calculs.

## HYDROGÈNE.

L'hydrogène présente un intérêt particulier à cause de la manière dont il se comporte au point de vue de sa compressibilité. Le gaz était préparé par l'action de l'acide chlorhydrique sur le zinc, purifié par les procédés ordinaires, et on l'analysait un certain nombre de fois, dans le cours de chaque série d'expériences, à l'aide de l'eudiomètre de M. Regnault. Voici une série d'expériences dans lesquelles, d'après plusieurs analyses concordantes, l'hydrogène recueilli renfermait à peine 1 pour 100 de gaz étrangers.

Les valeurs obtenues pour  $\varphi$  à la température de 22 degrés ont été :

Pression moyenne.	Valeur de $\varphi$		Différence calc. obs.
	observées.	calculées.	
<sup>m</sup> 5,87	0,5712	0,5717	+ 5
5,50	0,5717	0,5721	+ 4
5,00	0,5724	0,5726	+ 2
4,58	0,5730	0,5730	0
4,08	0,5732	0,5735	+ 3
3,64	0,5745	0,5740	— 5
3,22	0,5752	0,5744	— 8
2,83	0,5751	0,5748	— 3
2,40	0,5753	0,5752	— 1
2,12	0,5755	0,5754	— 1
1,72	0,5759	0,5758	— 1
1,36	0,5760	0,5762	+ 2
1,02	0,5762	0,5765	+ 3
0,69	0,5767	0,5769	+ 2

La valeur de  $\varphi$  augmente ici d'une manière très-sensible à mesure que la pression diminue, et les expériences peuvent être représentées par la formule

$$\varphi = 0,57757 - 0,001 \text{ H} = 0,57757 (1 - 0,00173 \text{ H}),$$

qui a servi à déterminer les valeurs calculées.

## OXYDE DE CARBONE.

Pour obtenir ce gaz parfaitement pur, on l'a préparé par l'action de l'acide sulfurique sur le cyanure jaune de potassium; on l'a absorbé ensuite dans une dissolution acide de sous-chlorure de cuivre, et on le faisait dégager de cette solution par la chaleur pour l'introduire dans l'appareil, après purification et dessiccation convenables. On recueillait de temps en temps des éprouvettes de gaz et l'on vérifiait sa pureté en l'absorbant par la même solution de sous-chlorure de cuivre. Voici une série d'expériences dans lesquelles le gaz était à la température de 12 degrés et renfermait environ 1 pour 100 de gaz non absorbable. Les résultats peuvent être représentés par la formule

$$\varphi = 1,4414 + 0,00257 H = 1,4414 (1 + 0,00178 H)$$

Pression moyenne.	Valeurs de $\varphi$		Différence calc.-obs.
	observées.	calculées.	
<sup>m</sup> 5,09	1,4483	1,4544	+ 61
4,87	1,4538	1,4539	+ 1
4,73	1,4536	1,4536	0
4,38	1,4530	1,4527	— 3
4,30	1,4529	1,4525	— 4
3,64	1,4510	1,4507	— 3
3,59	1,4510	1,4506	— 4
3,15	1,4492	1,4495	+ 3
3,05	1,4495	1,4492	— 3
2,44	1,4474	1,4476	+ 2
2,40	1,4476	1,4475	— 1
1,50	1,4453	1,4453	0
1,43	1,4449	1,4451	+ 2
1,42	1,4444	1,4450	+ 6
1,41	1,4452	1,4449	— 3

## ACIDE CARBONIQUE.

L'acide carbonique est un gaz sur la préparation et l'analyse duquel il n'y a pas lieu d'insister. J'ai fait, avec l'acide carbonique, un très-grand nombre d'expériences dont je citerai seulement quelques-unes. La température était de 17 degrés, et l'acide renfermait environ

1 pour 100 de gaz non absorbable par la potasse. Les résultats peuvent être représentés par la formule

$$\varphi = 1,8760 + 0,0270 H = 1,8760 (1 + 0,0144 H).$$

Pression moyenne.	Valeurs de $\varphi$		Différence calc.-obs.
	observées.	calculées.	
<sup>m</sup> 6,18	2,062	2,044	— 18
5,99	2,056	2,038	— 18
5,58	2,031	2,027	— 4
4,99	2,028	2,011	— 17
4,58	2,015	2,000	— 15
4,32	1,988	1,992	+ 4
3,64	1,974	1,975	+ 1
3,35	1,971	1,966	— 5
3,03	1,962	1,958	— 4
2,36	1,940	1,940	0
2,28	1,937	1,937	0
2,07	1,933	1,932	— 1
1,95	1,928	1,928	0
1,61	1,919	1,920	+ 1
1,44	1,915	1,915	0
1,05	1,901	1,905	+ 4
0,93	1,900	1,901	+ 1
0,70	1,894	1,895	+ 1
0,33	1,893	1,885	— 8

La comparaison des résultats du calcul avec ceux de l'expérience montre que la formule par laquelle on a exprimé la valeur de  $\varphi$  devient sensiblement inexacte lorsque la pression est très-grande. Si, à l'aide des expériences citées plus haut, on calcule la valeur de  $\varphi$  qui convient à l'air à la température de 17 degrés, on en déduit, par la loi des mélanges, pour l'acide carbonique pur à la même température,

$$\varphi = 1,8825 + 0,02725 H = 1,8825 (1 + 0,0145 H).$$

#### PROTOXYDE D'AZOTE.

Le gaz a été préparé par la décomposition de l'azotate d'ammoniaque. En l'analysant plusieurs fois, soit au moyen de sa solubilité dans l'alcool, soit surtout par l'eudiomètre, on a trouvé qu'il renfermait envi-

ron 10 pour 100 de gaz étrangers, formés d'azote et d'oxygène à peu près dans le rapport de 2 à 1.

Pour ce mélange, la valeur de  $\varphi$  relative à la température de 13°, 5 pouvait être exprimée par la formule

$$\varphi = 2,1040 + 0,037 H = 2,1040 (1 + 0,0176 H).$$

La comparaison des résultats de l'observation avec ceux que l'on peut ainsi calculer donne :

Pression moyenne.	Valeurs de $\varphi$		Différence calc.-obs.
	observées.	calculées.	
5,25	2,307	2,298	— 9
5,17	2,309	2,295	— 14
4,34	2,262	2,265	+ 3
4,26	2,250	2,262	+ 12
4,11	2,255	2,256	+ 1
3,72	2,234	2,242	+ 8
3,65	2,233	2,239	+ 6
3,04	2,223	2,216	— 7
2,90	2,208	2,211	+ 3
2,27	2,182	2,188	+ 6
2,07	2,176	2,180	+ 4
1,48	2,154	2,159	+ 5
1,37	2,146	2,154	+ 8
0,91	2,142	2,139	— 3
0,87	2,136	2,136	0
0,64	2,128	2,127	— 1
0,55	2,125	2,124	— 1

## BIOXYDE D'AZOTE.

Le gaz a été préparé par l'action de l'acide azotique sur le mercure. Les expériences qui suivent ont été faites avec le petit appareil, à des pressions qui ont varié dans des limites trop restreintes pour que les résultats présentent autant de garanties.

Le bioxyde renfermait environ 10 pour 100 de gaz non absorbable par le sulfate de protoxyde de fer. A la température de 12 degrés, on a ainsi obtenu

$$\varphi = 0,17085 + 0,00024 H = 0,17085 (1 + 0,0014 H).$$

Pression moyenne.	Valeurs de $\varphi$		Différences calc.-obs.
	observées.	calculées.	
<sup>m</sup> 2,08	0,17138	0,17136	- 3
1,82	0,17121	0,17129	+ 8
1,12	0,17115	0,17112	- 3

## CYANOGENE.

Le cyanogène a été préparé par la décomposition du cyanure de mercure. Les expériences ont été faites à la température de 25 degrés, et elles peuvent être représentées par

$$\varphi = 3,0876 + 0,1653 H = 3,0876 (1 + 0,5354 H).$$

Pression moyenne.	Valeurs de $\varphi$		Différences calc.-obs.
	observées.	calculées.	
<sup>m</sup> 4,04	3,753	3,755	+ 2
3,95	3,734	3,741	+ 7
3,51	3,742	3,668	- 74
1,42	3,321	3,323	+ 2
1,41	3,319	3,321	+ 2
1,41	3,321	3,321	0
1,40	3,316	3,319	+ 3
1,27	3,303	3,297	- 6
1,22	3,317	3,289	- 28

Le gaz renfermait 8 pour 100 d'azote. Si l'on calcule, d'après ces résultats, la formule qui doit exprimer la réfraction du cyanogène pur, on trouve

$$\varphi = 3,250 + 0,180 H = 3,250 (1 + 0,0554 H).$$

Les expériences sur le cyanogène sont d'ailleurs très-difficiles, parce que le gaz ne tarde pas à attaquer le caoutchouc qui ferme les tubes, et à donner des dépôts noirs sur les verres, ce qui rend toute observation impossible.

## ACIDE SULFUREUX.

Le gaz préparé par l'action de l'acide sulfurique sur le mercure était soluble dans l'eau sans résidu appréciable.

Les expériences ont été faites aussi avec le petit appareil, et la

pression est restée encore entre des limites trop restreintes; mais l'insuffisance de la loi approchée est bien manifeste. Voici quelques expériences pour lesquelles le résultat a été ramené à zéro, à l'aide d'un coefficient déterminé comme on le verra plus loin. La valeur de  $\varphi_0$  ainsi obtenue peut être exprimée par la formule

$$\varphi_0 = 0,3807 + 0,01903 H = 0,3807 (1 + 0,05 H).$$

Température.	Pression moyenne.	Valeurs de $\varphi_0$ .		Différences calc. obs.
		observées.	calculées.	
10,90	1,33	0,4099	4061	— 38
13,38	1,14	0,4027	4023	— 4
13,29	1,05	0,4000	4006	+ 6
13,51	0,80	0,3970	3959	— 11
14,35	0,60	0,3918	3921	+ 3
15,36	0,40	0,3879	3883	+ 4

## COMPARAISON DE LA RÉFRACTION DES GAZ AVEC LA COMPRESSIBILITÉ.

Il faut chercher maintenant si la réfraction d'un gaz, laquelle n'est pas proportionnelle à la pression, comme nous l'avons vu, est proportionnelle au poids spécifique du gaz. La relation qui existe entre le poids spécifique  $p$  d'un gaz et la pression correspondante  $H$  peut être mise sous la forme

$$(1) \quad p = A'H (1 + B'H).$$

Cette formule satisfait, à moins de  $\frac{1}{10000}$  près, aux expériences de M. Regnault, entre les limites de pression dans lesquelles sont comprises mes observations. Comme la réfraction du gaz peut aussi être exprimée par la formule

$$(2) \quad (n-1) = \frac{\lambda}{L} AH \left(1 + \frac{B}{2} H\right),$$

il faut donc, pour que le rapport  $\frac{n-1}{p}$  soit constant, que les deux coefficients  $B'$  et  $\frac{B}{2}$  soient égaux.

Les expériences de M. Regnault (1) donnent directement les valeurs que prend le rapport  $\frac{V_0 H_0}{V_1 H_1}$ , lorsque le volume d'une même masse de gaz passe de  $V_0$  à  $\frac{V_0}{2} = V_1$ , ou, ce qui est équivalent, le rapport des volumes  $\frac{V_0}{V_1}$ , lorsque la pression finale  $H_1$  est double de la pression initiale  $H_0$ . On connaît ainsi le rapport  $\frac{p_1}{p_0}$  des poids spécifiques du gaz dans les mêmes conditions. Pour l'air, par exemple, on a

Pression initiale $P_0$ .	$\frac{V_1}{V_0} = \frac{p_0}{p_1}$ .
1 <sup>m</sup>	$2 \times 1,00122 = 2,00244$
2	$2 \times 1,00230 = 2,00460$
4	$2 \times 1,00330 = 2,00660$
8	$2 \times 1,00550 = 2,01100$

On peut déduire de là les rapports du poids spécifique du gaz sous les pressions de 2 mètres, 4 mètres et 8 mètres, au poids spécifique relatif à la pression de 1 mètre. On obtient ainsi :

Pression.	Poids spécifique.
1 <sup>m</sup>	1
2	$2,00244 = 2(1,00122)$
4	$4,01409 = 4(1,00122)(1,0023)$
8	$8,05467 = 8(1,00122)(1,0023)(1,0033)$
16	$16,19792 = 16(1,00122)(1,0023)(1,0033)(1,0055)$

Enfin, pour obtenir l'expression du poids spécifique  $p$  en fonction de la pression par la formule (1), il suffit de déterminer le coefficient  $B'$  en comparant le premier nombre à chacun des suivants. On trouve ainsi :

Gaz.	Valeurs de $B'$ calculées par les poids spécifiques relatifs aux pressions de				Valeurs moyennes de $B'$ pour les pressions de 1 <sup>m</sup> à 5 <sup>m</sup> .
	2 <sup>m</sup>	4 <sup>m</sup>	8 <sup>m</sup>	16 <sup>m</sup>	
Air.....	+ 0,00122	+ 0,00117	+ 0,00098	+ 0,00082	+ 0,00120
Azote.....	+ 0,00075	+ 0,00068	+ 0,00065	+ 0,00059	+ 0,00072
Hydrogène.....	- 0,00043	- 0,00051	- 0,00060	- 0,00067	- 0,00048
Acide carbonique.	+ 0,0086	+ 0,0088	+ 0,0091	+ 0,0099	+ 0,0087

(1) *Mémoires de l'Académie*, t. XXI, p. 419 et suiv.



Plus tard <sup>(1)</sup>, M. Regnault a fait une étude plus complète des différents gaz avec un appareil simple où la pression pouvait atteindre 6 mètres de mercure. Les expériences donnent les valeurs du produit  $VH$  pour une même masse de gaz à différentes pressions. Comme le volume  $V$  est en raison inverse du poids spécifique, le produit  $VH$  est proportionnel à  $\frac{H}{p}$ , l'inverse de ce produit est proportionnel à  $\frac{p}{H}$ , c'est-à-dire à  $A'(1 + B'H)$ , d'après la forme que nous avons adoptée, ce qui permet de déterminer le coefficient  $B'$  par deux expériences.

En comparant entre elles les observations qui correspondent aux pressions de 0<sup>m</sup>, 76, 2<sup>m</sup>, 35 et 5 mètres, lesquelles ont servi de repères à M. Regnault pour calculer les coefficients de sa formule d'interpolation, on trouve ainsi :

Nature des gaz.	Valeurs de $B'$ déterminées par les expériences faites aux pressions de		Moyennes.
	2 <sup>m</sup> , 35	5 <sup>m</sup>	
Air.....	0,00109	0,00119	0,00114
Oxygène.....	0,00166	0,00165	0,00165
Oxyde de carbone.....	0,0048	0,0028	0,0038
Protoxyde d'azote.....	0,0074	0,0105	0,0080
Bioxyde d'azote.....	0,0024	0,0016	0,0020

Enfin M. Regnault <sup>(2)</sup> a déterminé encore la compressibilité de quelques autres gaz entre les pressions de 1 et de 2 atmosphères. On en déduit, pour le cyanogène et l'acide sulfureux,

Valeur de $B'$ .	
Cyanogène .....	0,0316
Acide sulfureux .....	0,0333

Voici maintenant la comparaison de ces résultats avec ceux qui ont été obtenus par l'étude de la réfraction :

<sup>(1)</sup> *Mémoires de l'Académie*, t. XXVI, p. 229.

<sup>(2)</sup> *Mémoires de l'Académie*, t. XXVI, p. 243.

Nature des gaz.	Compressibilité.		Réfraction.	
	Température des expériences.	Coefficient relatif à la variation de poids spécifique B'.	Température des expériences.	Coefficient relatif à la variation de réfraction $\frac{B}{2}$ .
Air .....	0	+ 0,00120	22	+ 0,00072
Azote .....	5	+ 0,00072	21	+ 0,00085
Oxygène .....	9,3	+ 0,00165	13,5	+ 0,00111
Hydrogène .....	4 et 10	- 0,00058	22	- 0,00086
Oxyde de carbone...	9,3	+ 0,0038	12	+ 0,00089
Acide carbonique...	3	+ 0,0087	17	+ 0,0072
Protoxyde d'azote...	9,3	+ 0,0080	13,5	+ 0,0088
Bioxyde d'azote....	9,3	+ 0,0020	12	+ 0,0007
Acide sulfureux....	1,7	+ 0,0333	»	+ 0,025
Cyanogène .....	7,7	+ 0,0316	25	+ 0,0277

Les coefficients B' et  $\frac{B}{2}$ , pour un même gaz, ne sont pas absolument égaux, mais ils varient dans le même sens. Si l'on considère que ce sont là des quantités très-petites, difficiles à déterminer, soit par les phénomènes de réfraction, soit par ceux de compressibilité, et que les deux ordres d'expériences n'ont pas été faits à la même température, on peut admettre que les différences qui se manifestent entre les deux coefficients rentrent dans les limites d'erreur des observations.

Pour deux gaz seulement, l'oxyde de carbone et le bioxyde d'azote, le désaccord est manifeste. Mes expériences sur le bioxyde d'azote n'ont pas été assez nombreuses pour qu'il y ait lieu d'insister sur ce point. Pour l'oxyde de carbone, le coefficient relatif à la compressibilité paraît un peu trop grand, si on le compare aux autres propriétés physiques de ce gaz.

Dans les limites d'exactitude des observations, il semble donc que la réfraction d'un gaz, à température constante, est sensiblement proportionnelle à son poids spécifique.

On peut même remarquer que la loi des puissances réfractives ne paraît pas s'accorder aussi bien avec les expériences. En effet, on a

$$\frac{n^2 - 1}{p} = \frac{n - 1}{p} (n + 1).$$

Si le rapport  $\frac{n - 1}{p}$  est constant, le rapport  $\frac{n^2 - 1}{p}$  doit croître avec

la pression. Pour l'air, par exemple, cet accroissement devrait être d'environ  $\frac{1}{1000}$  à la pression de 7 atmosphères. Le coefficient  $\frac{B}{2}$  devrait donc, pour tous les gaz, être un peu plus grand que le coefficient  $B'$  relatif à la compressibilité, tandis que les expériences donnent plutôt une valeur un peu moindre.

#### IV. — DISPERSION DES GAZ.

Pour connaître la dispersion d'un gaz, il suffirait de déterminer, par la méthode précédente, la réfraction relative à différentes raies de longueurs d'onde déterminées. J'ai pris comme points de repère dans le spectre, outre la raie D appartenant au sodium, plusieurs raies, dont l'une rouge, deux vertes et une bleue, produites par la vapeur de cadmium. On faisait apparaître ces raies en provoquant des étincelles entre deux fils de métal  $m$  et  $m'$  placés devant la fente du collimateur (*fig. 5*).

J'avais déterminé autrefois les longueurs d'onde de ces raies, et les nombres que j'ai obtenus sont parfaitement concordants avec ceux qu'a donnés plus tard M. Thalén. Voici ces nombres exprimés en millièmes de millimètre :

Raies.	Longueur d'onde.		Différence. T. — M.
	Mascart.	Thalén.	
1 Cadmium .....	0,64370	0,64380	10
2 Sodium .....	0,5888	0,58890	10
3 Cadmium .....	0,53771	0,53780	11
4 Cadmium .....	0,50844	0,50850	6
5 Cadmium .....	0,47986	0,47990	4

La différence à peu près constante qui se manifeste entre ces deux séries de résultats tient surtout à l'erreur commise sur l'unité de mesure, et les rapports des longueurs d'onde sont sensiblement les mêmes dans les deux cas.

Il serait fastidieux de déterminer directement la réfraction relative à ces différentes raies, mais on arrive au même résultat, d'une manière plus simple et plus sûre, en évaluant directement la différence des réfractions quand on passe de l'une à l'autre. Il suffit alors de connaître l'une d'elles pour en déduire toutes les autres.

L'un des tubes à gaz étant à la pression  $H_1$  et le phénomène bien stationnaire, on compte le nombre des franges qui existent entre les différentes raies brillantes; on donne ensuite à la pression dans ce même tube, la pression de l'autre restant constante, une valeur différente  $H_2$ , et l'on compte de nouveau les franges qui existent entre les mêmes raies. Les différences de ces deux séries de nombres, qui vont intervenir dans le calcul, ne peuvent être évaluées avec une certaine précision que si le changement de pression  $H_2 - H_1$  est très-grand. Dans ce cas, le nombre des franges qui passent est tellement considérable qu'il serait impossible de les observer directement, mais cette opération n'est pas nécessaire.

Soient, par exemple,  $\lambda$  et  $\lambda'$  les longueurs d'onde de deux raies,  $\delta$  la diminution du nombre de franges comprises entre ces deux raies, quand on passe de la pression  $H_1$  à une pression plus faible  $H_2$ , et  $f$  le nombre inconnu de celles qui ont passé sur la première; il en sera passé alors sur la seconde  $f + \delta$ . Soient encore  $n_1$  et  $n_2$ ,  $n'_1$  et  $n'_2$  les indices de réfraction des deux raies aux pressions  $H_1$  et  $H_2$ ; on a les équations

$$(n_1 - n_2) L = f \lambda,$$

$$(n'_1 - n'_2) L = (f + \delta) \lambda';$$

on en déduit

$$\frac{(n'_1 - n'_2) - (n_1 - n_2)}{n_1 - n_2} = \frac{\lambda'}{\lambda} \left( 1 + \frac{\delta}{f} \right) - 1,$$

ou bien

$$\frac{(n'_1 - n'_2) - (n_1 - n_2)}{n_1 - n_2} = \frac{\lambda'}{\lambda} \left( 1 + \frac{\frac{\delta}{P}}{\frac{f}{P}} \right) - 1.$$

$P$  représente, comme plus haut, la différence des pressions  $H_1 - H_2$ . Le second membre de cette équation est connu : l'expérience donne directement le rapport  $\frac{\delta}{P}$ ; quant au rapport  $\frac{f}{P}$ , qui correspond à la longueur d'onde  $\lambda$  pour la pression moyenne  $\frac{H_1 + H_2}{2}$  et la température de l'expérience, il peut être déduit des observations précédentes relatives à l'influence des variations de pression. En réalité, les mesures des deux genres étaient faites simultanément; on intercalait de

temps en temps une observation sur la dispersion entre celles qui étaient relatives à la pression. On voit même que, pour le cas actuel, il n'y a aucune correction de température à faire. D'ailleurs, ce rapport  $\frac{f}{p}$  n'intervient que dans un terme de correction, et l'on peut, sans erreur sensible, prendre la valeur moyenne qui convient au gaz considéré. Quant au premier membre de l'équation, il n'est autre chose que le pouvoir dispersif, c'est-à-dire le rapport de la différence des indices de réfraction des deux raies à l'excès de l'un d'eux sur l'unité. L'expérience indique, en effet, que le second membre est indépendant de la pression entre les limites de précision des mesures, et, si l'on suppose que la pression  $H_2$  soit nulle, le premier membre se réduit à  $\frac{n' - n}{n - 1}$ .

Lorsque la pression diminue, la variation  $\delta$  est positive, si  $\lambda'$  est plus petit que  $\lambda$ , et négative en sens contraire. L'indice  $n$  correspondant à la raie D, le rapport  $\frac{n' - n}{n - 1}$  est toujours négatif pour la raie rouge, positif pour les autres, et d'autant plus grand que la longueur d'onde est plus faible. La dispersion des gaz est donc du même sens que celle de tous les corps solides, si l'on excepte les cas très-rares et encore insuffisamment étudiés de dispersion anormale.

Il convient de représenter la dispersion des gaz par un seul coefficient, afin de donner une idée plus simple du phénomène. Comme la dispersion est faible, on peut exprimer l'indice de réfraction d'un gaz, au moins entre les limites dans lesquelles sont comprises les expériences et avec le degré d'approximation qu'elles comportent, par la formule de Cauchy réduite à ses deux premiers termes. Cette formule peut être mise sous la forme

$$n - 1 = a \left( 1 + \frac{b}{\lambda^2} \right).$$

Si on l'applique aux résultats obtenus pour deux longueurs d'onde  $\lambda$  et  $\lambda'$ , on en déduit

$$\frac{n' - n}{n - 1} = b \frac{\frac{1}{\lambda'^2} - \frac{1}{\lambda^2}}{1 + \frac{b}{\lambda^2}}.$$

Le premier membre de cette équation est déterminé par l'expé-

rience; on peut donc en déduire la valeur du coefficient  $b$ , lequel suffira pour caractériser la dispersion.

Voici quelques expériences :

## AIR ATMOSPHÉRIQUE.

Raies.	Valeurs de $\frac{\delta}{P}$ .			Moyennes.	$\frac{n'-n}{n-1}$ .	Valeur du coefficient $b$ .
1	- 0,1108	- 0,1093	- 0,1081	- 0,1094	- 0,0023	+ 0,0050
3	+ 0,1240	+ 0,1224	+ 0,1241	+ 0,1235	+ 0,0035	0,0062
4	0,2063	0,2049	0,2057	0,2056	0,0057	0,0059
5	0,298	0,296	0,2965	0,2968	0,0086	0,0060
					Moyenne...	0,0058

Le calcul de la dispersion et celui du coefficient  $b$  renferment tant d'éléments, et les nombres que l'on veut déterminer sont si petits, que la concordance des résultats doit paraître entièrement satisfaisante.

## AZOTE.

Raies.	$\frac{\delta}{P}$ .	$\frac{n'-n}{n-1}$ .	$b$ .
1	- 0,108	- 0,0024	0,0052
3	+ 0,123	+ 0,0043	0,0076
4	0,205	0,0070	0,0073
		Moyenne...	0,0067

## OXYGÈNE.

Raies.	$\frac{\delta}{P}$ .	$\frac{n'-n}{n-1}$ .	$b$ .
1	- 0,122	- 0,0022	0,0049
3	+ 0,115	+ 0,0045	0,0078
4	0,192	0,0062	0,0064
		Moyenne...	0,0064

Les résultats relatifs à l'oxygène et à l'azote paraissent tous deux supérieurs à celui qui a été obtenu pour l'air, ce qui ne doit pas être; mais la divergence des nombres qui correspondent aux différentes raies montre que la dispersion est sensiblement la même pour les trois gaz. Il faudrait des expériences plus complètes pour constater les différences qui existent entre eux.

## HYDROGÈNE.

Raies.	Valeurs moyennes de $\frac{\delta}{p}$ .	$\frac{n'-n}{n-1}$ .	$b$ .
1	— 0,0523	— 0,00176	0,0038
3	+ 0,0587	+ 0,0023	0,0040
4	0,0985	+ 0,0050	0,0051
Moyenne...			0,0043

La dispersion de l'hydrogène paraît sensiblement plus faible que celle des gaz précédents.

## OXYDE DE CARBONE.

Raies.	Valeurs moyennes de $\frac{\delta}{p}$ .	$\frac{n'-n}{n-1}$ .	$b$ .
1	— 0,1282	— 0,0034	0,0073
3	+ 0,1440	+ 0,0039	0,0069
4	0,2413	0,0073	0,0075
5	0,3497	0,0116	0,0079
Moyenne...			0,0075

## ACIDE CARBONIQUE.

Raies.	Valeurs moyennes de $\frac{\delta}{p}$ .	$\frac{n'-n}{n-1}$ .	$b$ .
1	— 0,0877	— 0,0026	0,0056
3	+ 0,0979	+ 0,0027	0,0048
4	0,1628	0,0041	0,0043
5	0,2387	0,0095	0,0063
Moyenne...			0,0052

D'après cela, la dispersion de l'oxyde de carbone serait sensiblement plus grande que celle de l'acide carbonique.

## PROTOXYDE D'AZOTE.

Raies.	Valeurs moyennes de $\frac{\delta}{p}$ .	$\frac{n'-n}{n-1}$ .	$b$ .
1	— 0,0887	— 0,0038	0,0081
3	+ 0,1032	+ 0,0075	0,0132
4	0,1701	0,0104	0,0108
5	0,2451	0,0148	0,0104
Moyenne...			0,0106

La dispersion du protoxyde d'azote paraît sensiblement plus grande que celle de l'air; en outre, comme le gaz renfermait 10 pour 100 d'impuretés, composées d'azote et d'oxygène, il en résulte que la dispersion réelle du protoxyde doit être à peu près double de celle de l'air. Le coefficient  $b$ , pour le protoxyde d'azote pur, doit donc être égal environ à 0,0125.

## CYANOGENÈNE.

Raies.	Valeurs moyennes de $\frac{\delta}{P}$ .	$\frac{n' - n}{n - 1}$ .	$b$ .
1	— 0,336	— 0,0030	0,0064
3	0,377	+ 0,0053	0,0095
4	0,633	+ 0,0093	0,0096
		Moyenne...	0,0085

En raison de l'azote que renfermait le gaz, il en résulte que, pour le cyanogène pur, la valeur de  $b$  serait voisine de 0,01.

On peut résumer ces résultats de la manière suivante :

Nature du gaz.	Coefficient de la formule de dispersion.
Air atmosphérique.....	0,0058
Azote.....	0,0067
Oxygène.....	0,0064
Hydrogène.....	0,0043
Oxyde de carbone.....	0,0075
Acide carbonique.....	0,0052
Protoxyde d'azote.....	0,0125
Cyanogène.....	0,0100

La dispersion d'un gaz ne paraît pas en rapport direct avec la réfraction de ce gaz ni avec sa densité.

Pour se représenter d'une manière plus précise l'ordre de grandeur de la dispersion des gaz, il est utile de la comparer avec celle de corps bien connus. Si l'on calcule, à l'aide du coefficient qui précède, le pouvoir dispersif de l'air  $\frac{n' - n}{n - 1}$  entre les deux raies B et H du spectre solaire, on obtient 0,024. Entre les mêmes raies, le pouvoir dispersif serait 0,032 pour les rayons ordinaires du quartz, 0,038 pour le crown léger, 0,040 pour l'eau, 0,046 pour les rayons ordinaires du spath d'Islande, 0,069 pour le flint lourd des lunettes, etc.



Certains gaz, comme le protoxyde d'azote et le cyanogène, auraient donc une dispersion supérieure à celle de l'eau.

#### V. — INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE.

Pour étudier l'influence de la température, on s'est servi du petit appareil, comme il a été dit plus haut. Les pressions étaient évaluées seulement avec le manomètre interférentiel, dont la branche latérale C permettait d'estimer en valeur absolue la pression du gaz dans l'un des tubes.

Toutes les expériences d'une même série étaient faites avec le même gaz, que l'on refoulait alternativement dans les tubes et qu'on laissait écouler ensuite, de manière à n'avoir à craindre aucun changement dans sa composition. Enfin la pression moyenne restait sensiblement invariable.

On commençait par faire une expérience à la température la plus basse possible, en profitant des jours froids de l'hiver et laissant les fenêtres ouvertes pendant la nuit, pour que le laboratoire prit autant que possible une température voisine de la température extérieure. On introduisait ensuite dans les deux bains de l'eau de plus en plus chaude, et l'on chauffait la salle en même temps, de manière à diminuer autant que possible la différence des températures de l'appareil et de l'air ambiant. Les liquides des deux bains étaient agités d'une manière continue, et l'on ne faisait d'observations que si les températures des quatre thermomètres différaient seulement d'une fraction de degré : la température moyenne des deux thermomètres intérieurs donnait la température du gaz. L'un des tubes étant à une pression plus élevée, on pointait la frange qui se trouvait en coïncidence avec le fil de la lunette, et l'on mesurait en même temps la différence des niveaux. On faisait ensuite écouler lentement du mercure par le robinet situé au bas du tube C, jusqu'à ce qu'il eût passé environ 150 franges; on fermait ce robinet et l'on mesurait de nouveau la pression quand le phénomène était resté stationnaire. L'observation des thermomètres ayant été faite avant et après l'expérience, on constatait habituellement une petite différence, et l'on prenait la moyenne des quatre lectures.

On déterminait ainsi, pour chaque température, le rapport  $\frac{f}{p}$  du nombre des franges à la variation de pression, correction faite de la dilatation des tubes à gaz et de la pression. Il suffisait, pour cela, de diviser le nombre obtenu directement par le binôme de dilatation relatif à la règle et de le multiplier par le facteur de correction relatif à la mesure des pressions. Ces calculs sont fastidieux, mais on les rend beaucoup plus rapides à l'aide de tables qui donnent chacune des corrections séparément pour toutes les températures. On obtient ainsi les valeurs de  $\varphi$ , c'est-à-dire du rapport du nombre des franges à la variation de pression, que l'on aurait observées si le gaz seul eût été à la température considérée et tout le reste à zéro.

Si la réfraction était proportionnelle au poids spécifique du gaz, cette valeur de  $\varphi$  serait en raison inverse du coefficient de dilatation, de sorte que le produit  $\varphi (1 + \alpha t)$  serait une quantité constante, représentant la valeur  $\varphi_0$  que l'on obtiendrait pour le gaz à zéro.

Or l'expérience indique que ce produit  $\varphi_0$ , au lieu d'être constant, diminue en général à mesure que la température s'élève. Il en résulte que le coefficient de dilatation dont on s'est servi pour ce calcul est généralement trop faible, et l'on peut déterminer le coefficient par lequel il faut le remplacer pour obtenir un produit constant correspondant à la réfraction du gaz à la température de zéro. L'observation directe à zéro n'est pas impossible, mais elle présente de grandes difficultés, surtout à cause de la buée qui se dépose sur les glaces extérieures. En réalité, la température n'a varié que depuis 5 degrés environ jusque vers 40 degrés. A cette dernière température déjà, les franges commencent à devenir agitées, et, si l'on chauffait davantage, les mesures ne présenteraient plus aucune garantie.

#### AIR ATMOSPHÉRIQUE.

Je rapporterai d'abord les principales expériences réalisées avec l'air atmosphérique à une pression moyenne sensiblement constante d'un mètre de mercure. Du rapport  $\frac{f}{p}$ , déterminé par expérience, on a déduit la valeur de  $\varphi_0$ , en corrigeant les effets de dilatation sur les tubes à gaz et sur la mesure des pressions, puis multipliant le résultat

par le binôme de dilatation de l'air à pression constante avec le coefficient  $\alpha = 0,00367$ .

Température du gaz $t$ .	Valeur de $\varphi_0$ .	Moyennes.		Valeur corrigée.	Excès sur la moyenne.
		$t$	$\varphi_0$		
5,49	0,16631	6,13	0,16627	0,16642	— 15
6,36	0,16626				
6,55	0,16625				
7,93	0,16644	7,80	0,16641	0,16660	+ 3
7,76	0,16624				
7,69	0,16654				
8,30	0,16630	8,30	0,16628	0,16650	— 7
8,29	0,16627				
15,37	0,16664	14,43	0,16641	0,16680	+ 23
14,22	0,16629				
14,10	0,16642				
14,02	0,16627				
27,07	0,16601	26,47	0,16586	0,16655	— 2
26,38	0,16608				
25,97	0,16550				
30,93	0,16591	30,62	0,16586	0,16665	+ 8
30,32	0,16581				
38,75	0,16550	36,66	0,16555	0,16649	— 8
37,96	0,16555				
37,21	0,16557				
35,16	0,16559				
34,24	0,16555				
Moyenne...				0,16657	

Les résultats compris dans la quatrième colonne, malgré quelques divergences, diminuent d'une manière sensible à mesure que la température augmente. Si l'on remplace le coefficient de dilatation de l'air par 0,00382, on obtient pour la valeur de  $\varphi_0$  les nombres de la cinquième colonne, dont les différences rentrent dans les limites des erreurs expérimentales.

La correction  $\Delta\alpha$ , que l'on doit apporter au coefficient de dilatation de l'air pour calculer les effets de réfraction, est donc environ

$$\Delta\alpha = + 0,00015.$$

## AZOTE.

Voici des expériences analogues sur de l'azote sensiblement pur à la pression moyenne de  $1^m, 10$ . Les premières corrections ont été faites aussi avec le coefficient  $0,00367$ .

Température du gaz $t$ .	Valeur de $p_0$ .	Moyennes.		Valeur corrigée.	Excès sur la moyenne.
		$t$	$p_0$		
3,57	0,16934	3,91	0,16924	0,16934	— 10
3,80	0,16917				
4,03	0,16917				
4,23	0,16927				
10,43	0,16931	10,43	0,16930	0,16955	+ 11
10,43	0,16931				
10,43	0,16927				
20,88	0,16884	20,32	0,16904	0,16955	+ 11
20,28	0,16909				
20,12	0,16915				
20,02	0,16907				
29,82	0,16864	29,36	0,16861	0,16937	— 7
29,37	0,16874				
28,90	0,16844				
42,28	0,16782	39,59	0,16836	0,16937	— 7
38,65	0,16857				
37,84	0,16868				
Moyenne...				0,16944	

La diminution du rapport  $p_0$ , à mesure que la température s'élève, est encore manifeste, et les résultats de la quatrième colonne, calculés par le même coefficient  $0,00382$  que pour l'air, présentent une concordance tout à fait satisfaisante. La correction du coefficient de dilatation est encore

$$\Delta\alpha = + 0,00015.$$

## HYDROGÈNE.

L'hydrogène qui a servi aux expériences suivantes renfermait environ 1 pour 100 de gaz étrangers. La pression moyenne était de  $1^m, 10$

et les premiers calculs ont été faits avec le coefficient de dilatation 0,003661 de ce gaz.

Température $t$ .	Valeur de $\varphi_0$ .	Moyennes.		Valeur corrigée.	Excès sur la moyenne.
		$t$	$\varphi_0$		
5,03	0,07995	4,92	0,07985	0,07990	0
4,82	0,07974				
13,53	0,07977	13,54	0,07974	0,07987	— 3
13,51	0,07974				
13,53	0,07969				
13,61	0,07974				
24,78	0,07955	25,02	0,07960	0,07984	— 6
25,18	0,07964				
25,11	0,07961				
28,11	0,07952	28,50	0,07965	0,07992	+ 2
28,74	0,07974				
28,64	0,07969				
34,50	0,07938	33,55	0,07952	0,07984	— 6
33,58	0,07940				
33,27	0,07953				
32,84	0,07976				
38,16	0,07967	37,93	0,07960	0,07996	+ 6
37,77	0,07953				
46,14	0,07953	43,92	0,07951	0,07993	+ 3
45,02	0,07969				
44,36	0,07949				
43,40	0,07953				
42,70	0,07928				
41,90	0,07953				
Moyenne...				0,07990	

La diminution du rapport  $\varphi_0$ , à mesure que la température s'élève, n'est pas douteuse, et les expériences s'accordent d'une manière remarquable quand on prend pour coefficient le nombre 0,00378. La correction du coefficient de dilatation est donc

$$\Delta\alpha = + 0,00012.$$

#### OXYDE DE CARBONE.

L'oxyde de carbone qui a servi renfermait environ 3 pour 100 d'un gaz non soluble dans le chlorure de cuivre ni dans la potasse. Comme

le gaz ne colorait pas le pyrogallate de potasse, ce résidu était de l'azote. La pression moyenne était de  $1^m, 20$ , et l'on a pris pour coefficient de dilatation du gaz  $0,00367$ .

Température $t$ .	Valeur de $\varphi_0$ .	Moyennes.		Excès sur la moyenne.	3
		$t$	$\varphi_0$		
$0$	$0,18998$				
$7,58$	$0,18984$	$7,59$	$0,18990$	$+ 8$	
$7,49$	$0,18988$				
$7,69$					
$10,49$	$0,19004$				
$10,81$	$0,18973$	$10,86$	$0,18982$	$0$	
$10,98$	$0,18972$				
$11,16$	$0,18978$				
$24,74$	$0,18971$				
$22,48$	$0,18970$	$3,09$	$0,18965$	$- 17$	
$22,06$	$0,18954$				
$30,67$	$0,18976$				
$29,23$	$0,18975$	$29,19$	$0,18981$	$- 1$	
$28,67$	$0,18982$				
$28,18$	$0,18992$				
$48,03$	$0,18968$				
$45,20$	$0,19019$	$45,72$	$0,18990$	$+ 8$	
$43,92$	$0,18982$				
		Moyenne...	$0,18982$		

Les expériences n'indiquent, dans le cas actuel, aucune variation appréciable du rapport  $\varphi_0$  avec la température, de sorte que le coefficient de dilatation du gaz suffit à rendre compte des changements qu'éprouve la réfraction.

#### ACIDE CARBONIQUE.

Le gaz était presque absolument pur, car la potasse laissait à peine un résidu de  $\frac{1}{800}$  non absorbé, lequel pouvait avoir été apporté par le réactif lui-même. Les expériences ont été exécutées à la pression moyenne de  $1^m, 15$ , et les premières corrections ont été faites en prenant le coefficient  $0,00371$ , qui convient à la dilatation de l'acide carbonique sous pression constante.

Température $t$ .	Valeur de $\varphi_0$ .	Moyennes.		Valeur corrigée.	Excès sur la moyenne.
		$t$	$\varphi_0$		
7,43	0,25763	7,26	0,25765	0,25830	— 33
7,19	0,25755				
7,18	0,25767				
7,26	0,25774				
11,48	0,25798	11,82	0,25771	0,25878	+ 15
11,63	0,25772				
11,75	0,25754				
12,44	0,25763				
17,08	0,25690	16,94	0,25705	0,25857	— 6
16,98	0,25686				
16,88	0,25732				
16,83	0,25713				
23,50	0,25640	23,34	0,25638	0,25847	— 16
23,18	0,25635				
30,92	0,25575	30,26	0,25585	0,25857	— 6
30,14	0,25578				
29,73	0,25602				
39,02	0,25498	38,33	0,25507	0,25851	— 12
38,30	0,25502				
37,68	0,25521				
40,67	0,25520	39,38	0,25567	0,25920	+ 57
39,23	0,25586				
38,23	0,25596				
Moyenne...				0,25863	

L'insuffisance du coefficient de dilatation ordinaire n'est pas douteuse, puisque la valeur ainsi calculée diminue de  $\frac{1}{100}$  pour un accroissement de température de 30 degrés. Quand on prend pour coefficient 0,00406, les résultats deviennent concordants à moins de  $\frac{1}{800}$  près en général. La correction du coefficient est donc

$$\Delta\alpha = + 0,00035.$$

#### PROTOXYDE D'AZOTE.

Le gaz ne colorait pas le pyrogallate de potasse et ne donnait ni vapeurs rutilantes ni contraction appréciable, quand on y introduisait

une bulle de bioxyde; il ne renfermait donc pas trace d'oxygène. L'analyse par l'eudiomètre et l'hydrogène indiquait l'existence de 2,5 pour 100 d'un gaz étranger non combustible, qu'on a considéré comme étant de l'azote. La pression moyenne a été de 1<sup>m</sup>, 20. On a obtenu, en calculant les résultats par le coefficient 0,0371,

Température $t$ .	Valeur de $\varphi_0$ .	Moyennes.		Valeur corrigée.	Excès sur la moyenne.
		$t$	$\varphi_0$		
0					
2,98	0,28942				
3,27	0,29024				
3,58	0,28975	3,65	0,28968	0,28986	— 67
4,10	0,28966				
4,34	0,28936				
10,65	0,29031				
10,75	0,29043	10,80	0,29022	0,29075	+ 22
10,84	0,29009				
10,97	0,29005				
18,03	0,28958				
17,92	0,28944	17,91	0,28961	0,29048	— 5
17,87	0,28963				
17,82	0,28980				
30,01	0,28873				
29,97	0,28885	29,73	0,28888	0,29033	— 20
29,22	0,28905				
38,55	0,28849	37,62	0,28840	0,29024	— 29
36,80	0,28832				
			Moyenne...	0,29053	

Il y a encore une diminution manifeste du rapport  $\varphi_0$  à mesure que la température s'élève, et il y a plus d'accord entre les expériences quand on prend pour coefficient 0,00388; la correction est donc  $\Delta\alpha = + 0,00017$ . Si l'on supprimait les expériences relatives aux températures voisines de 4 degrés, qui paraissent moins concordantes entre elles, on obtiendrait, avec un coefficient encore plus grand, un accord presque absolu entre les résultats calculés.

#### BIOXYDE D'AZOTE.

En traitant le gaz par le sulfate de protoxyde de fer, on obtenait un résidu d'environ 10 pour 100, mais l'analyse n'a pas été faite d'une



manière exacte. La pression moyenne des expériences était de  $1^{\text{m}},17$ , et l'on a calculé les résultats par le coefficient  $0,00367$ .

Température $t$ .	Valeur de $\varphi_0$ .	Moyennes.		Excès sur la moyenne.
		$t$	$\varphi_0$	
$6,36$	$0,16910$	$6,56$	$0,16917$	$+15$
$6,60$	$0,16921$			
$6,72$	$0,16921$			
$11,27$	$0,16903$	$11,38$	$0,16903$	$+1$
$11,38$	$0,16908$			
$11,49$	$0,16898$			
$22,72$	$0,16891$	$22,09$	$0,16886$	$-16$
$21,92$	$0,16887$			
$21,63$	$0,16881$			
		Moyenne...	$0,16902$	

Il semble qu'il y ait encore une diminution progressive du rapport  $\varphi_0$ , mais elle paraît très-faible, et les variations de température n'ont pas été assez grandes pour qu'on puisse affirmer l'insuffisance du coefficient de dilatation employé.

## ACIDE SULFUREUX.

Le gaz était sensiblement pur. La pression moyenne était d'environ  $1^{\text{m}},05$ . Les calculs ont été faits d'abord avec le coefficient  $0,00390$  qui convient à la dilatation de ce gaz sous pression constante.

Température $t$ .	Valeur de $\varphi_0$ .	Moyennes.		Valeur corrigée.	Excès sur la moyenne.
		$t$	$\varphi_0$		
$6,76$	$0,4000$	$6,89$	$0,3995$	$0,4014$	$+10$
$6,90$	$0,3985$				
$7,03$	$0,4001$				
$11,37$	$0,3961$	$11,49$	$0,3955$	$0,3987$	$-17$
$11,50$	$0,3950$				
$11,61$	$0,3954$				
$24,78$	$0,3945$	$25,05$	$0,3943$	$0,4012$	$+8$
$25,04$	$0,3943$				
$25,33$	$0,3941$				
		Moyenne...	$0,4004$		•

La variation du rapport  $\varphi_0$  avec la température de l'expérience es

ici considérable; les résultats de la cinquième colonne ont été calculés en prenant pour coefficient le nombre 0,0046, c'est-à-dire avec une correction égale à  $\Delta\alpha = + 0,00070$ .

## CONCLUSION.

Il semble résulter de là que la réfraction d'un gaz diminue plus rapidement que le poids spécifique, surtout pour les gaz liquéfiables, comme l'acide carbonique et l'acide sulfureux. On pourrait mettre en doute cette conclusion et attribuer les différences observées à l'existence d'une petite quantité de vapeur d'eau. Il n'est pas nécessaire de répéter que les gaz ont été desséchés avec les précautions recommandées depuis M. Regnault pour ce genre d'expériences. Remarquons ensuite que, si le gaz renfermait de l'eau à l'état de vapeur, la dilatation de la vapeur ne diffère pas assez de celle des gaz pour que l'effet soit appréciable. La seule cause d'erreur provient donc de l'eau liquide qui pourrait être condensée sur les parois du tube et qui se dégagerait par suite de l'élévation de température. Dans le cas actuel, l'influence de cette vapeur est beaucoup moindre que pour les effets de dilatation; l'erreur ne dépend ici que de la différence qui existe entre la réfraction de la vapeur et celle du gaz étudié, et elle serait nulle si les deux indices de réfraction étaient sensiblement égaux. Or la réfraction de la vapeur d'eau, sur laquelle je reviendrai dans un autre Mémoire, est plus faible que celle de l'air d'environ  $\frac{1}{10}$ . Si donc, pendant que la température s'élève à 30 degrés, il se dégageait une quantité de vapeur d'eau égale au  $\frac{1}{60}$  du gaz, la réfraction du mélange n'aurait été altérée que de  $\frac{1}{600}$  par le fait de la vapeur, tandis que les différences atteignent  $\frac{1}{200}$  pour l'air et l'azote. Ce changement de réfraction correspondrait à une quantité de vapeur égale au  $\frac{1}{20}$  du gaz, c'est-à-dire à une pression de 5 centimètres. Il faudrait, si l'on admet les résultats de l'expérience, que le gaz étant sec à la température de 5 degrés, par exemple, se soit saturé de vapeur à 35 degrés, ce qui est évidemment impossible. D'autre part, cette cause d'erreur agirait en sens contraire sur l'hydrogène, puisque la réfraction de ce gaz est environ la moitié de celle de la vapeur d'eau, et donnerait des nombres trop grands pour les températures plus élevées, tandis que la température

agit dans le même sens sur l'hydrogène que sur l'air ou l'azote, et avec une régularité remarquable.

La loi de Newton ne permet pas mieux d'expliquer ces variations. En effet, en désignant par  $n_0$  et  $n$  les indices de réfraction d'un gaz aux températures de zéro et de  $t$  degrés, pour une même pression, on devrait avoir

$$n^2 - 1 = \frac{n_0^2 - 1}{1 + \alpha t} \quad \text{ou} \quad (n - 1)(1 + \alpha t) = \frac{n_0^2 - 1}{n + 1}.$$

A mesure que la température s'élève, l'indice de réfraction  $n$  diminue; le second membre de cette équation croît donc avec la température, et le premier devrait croître aussi dans le même sens, tandis que l'expérience indique au contraire qu'il diminue. D'ailleurs la variation de  $(n + 1)$  est trop faible pour qu'elle puisse exercer ici une influence appréciable, puisqu'elle ne serait pas de  $\frac{1}{20000}$  pour une variation de température de 100 degrés.

Nous pouvons donc résumer ainsi l'influence de la température sur différents gaz :

Nature du gaz.	Coefficient de dilatation à volume constant $\alpha$ .	Coefficient relatif au changement de réfraction $\alpha'$ .	Différence $\alpha' - \alpha$ .
Air atmosphérique.	0,00367	0,00382	0,00015
Azote .....	0,00367	0,00382	0,00015
Hydrogène.....	0,003661	0,00378	0,00012
Oxyde de carbone..	0,00367	0,00367	»
Acide carbonique ..	0,00371	0,00406	0,00035
Protoxyde d'azote..	0,00371	0,00388	0,00017
Bioxyde d'azote....	0,00367	0,00367	»
Acide sulfureux....	0,00390	0,00460	0,00070

La différence  $\alpha' - \alpha$  ne doit pas être considérée comme déterminée exactement. La seule chose qui paraisse démontrée, c'est l'existence et l'ordre de grandeur de cette variation.

## VI. — RÉFRACTIONS ABSOLUES.

La cause d'erreur la plus importante, lorsqu'on veut déterminer la réfraction des gaz en valeur absolue, consiste dans la difficulté que présente la préparation des gaz purs et la difficulté non moins grande

d'en faire l'analyse d'une manière exacte, surtout quand on est obligé d'avoir recours à des combustions au moyen de l'étincelle électrique. Ainsi, quand on analyse de l'hydrogène en introduisant de l'air dans l'eudiomètre, il peut arriver, soit qu'il reste une trace d'hydrogène non combiné lorsque l'étincelle est faible, soit qu'une partie de l'oxygène et de l'azote de l'air se combinent, quand la proportion des gaz est choisie de manière à donner une inflammation plus vive. On obtient des résultats plus concordants en faisant l'analyse par de l'oxygène pur, dont on introduit un volume exactement moitié moindre que celui de l'hydrogène; mais, si les impuretés mélangées au gaz primitif contiennent de l'azote, on voit qu'il pourra se produire encore des composés nitrés, puisque l'explosion est alors très-violente. On doit donc, dans le cas de l'hydrogène, trouver en général un résidu trop faible. Comme la réfraction du gaz n'est pas la moitié de celle de l'air, une erreur de  $\frac{1}{100}$  sur la composition du gaz entraîne une erreur de plus de  $\frac{1}{100}$  sur la quantité qu'on évalue. Le résultat auquel nous arriverons doit donc être considéré comme étant plutôt trop élevé.

Les mêmes difficultés se présentent dans l'analyse, par l'eudiomètre, des composés de l'azote et de l'oxygène qui renferment de petites quantités d'azote et d'oxygène. Ces gaz étrangers n'ont qu'une influence négligeable quand on veut évaluer l'influence de la pression et de la température, mais il n'en est pas de même pour le rapport des réfractions. Nous choisirons donc les expériences dans lesquelles les gaz étaient le plus voisins d'être purs; pour apprécier la pureté, on a eu recours soit à la combustion, soit, quand la chose était possible, à un liquide qui pouvait dissoudre le gaz abondamment, comme le chlorure de cuivre acide pour l'oxyde de carbone, le sulfate de protoxyde de fer pour le bioxyde d'azote, la potasse pour l'acide carbonique, l'eau pour l'acide sulfureux et le cyanogène.

D'autre part, le rapport des réfractions des différents gaz n'est pas indépendant de la pression ni de la température, comme nous l'avons vu, et les expériences ne sont pas directement comparables. Pour ne pas compliquer les résultats de corrections qui pourraient rester douteuses, j'ai réduit à zéro les expériences faites avec le grand appareil par le coefficient de dilatation de chaque gaz sous pression constante; les valeurs de  $\varphi$  et de  $\varphi_0$  correspondent à la pression moyenne de  $0^m,5$ ,

c'est-à-dire que l'on a simplement, d'après les formules établies plus haut,

$$\varphi = A \left( 1 + \frac{B}{2} \right) = A + \frac{AB}{2}.$$

On a apporté ensuite aux résultats relatifs à chaque gaz une correction correspondant aux impuretés qu'il contenait.

Nature du gaz.	Température des expériences.	Coefficient de dilatation.	Valeurs de		Impuretés du gaz.	Valeurs de $\varphi$ , correction faite des impuretés.	Rapport de la réfraction du gaz à celle de l'air.
			$\varphi$ .	$\varphi$ .			
Air .....	22 <sup>o</sup>	0,00367	1,2078	1,3053	»	»	1
Azote. ....	21	0,00367	1,2308	1,3256	1 % d'oxygène	1,3268	1,0164
Oxygène .....	13,5	0,00367	1,1550	1,2122	4,5 % d'azote	1,2068	0,9245
Hydrogène .....	22	0,003661	0,5771	0,6235	0,8 % d'air	0,6180	0,4735
Oxyde de carbone.	22	0,00367	1,3816	1,4932	0,5 % d'azote	1,4940	1,1446
Acide carbonique..	17	0,00371	1,8895	2,0087	1 % d'air	2,0158	1,5443
Cyanogène .....	25	0,003877	3,1702	3,4774	8 % d'azote	3,664	2,8070

Avec le petit appareil, on a obtenu, à la pression moyenne de 1<sup>m</sup>,10 et en prenant pour chaque gaz à la température de zéro la moyenne des résultats obtenus dans les tableaux précédents, par une correction convenable des effets de la température :

Nature du gaz.	Pression moyenne.	Coefficient de correction pour la température.	Valeur de $\varphi$ .	Impuretés du gaz.	Valeur de $\varphi$ , correction faite des impuretés.	Rapport de la réfraction du gaz à celle de l'air.
Air .....	1,00 <sup>m</sup>	0,00382	0,16657	»	»	1
Azote .....	1,10	0,00382	0,16944	»	»	1,0172
Hydrogène .....	1,10	0,00378	0,07990	1 % d'air	0,07902	0,4744
Oxyde de carbone....	1,20	0,00367	0,18982	3 % d'azote	0,19045	1,1434
Acide carbonique.....	1,15	0,00406	0,25863	»	»	1,5527
Protoxyde d'azote....	1,20	0,00388	0,29053	2,5 % d'azote	0,29358	1,7626
Bioxyde d'azote.....	1,17	0,00367	0,16902	10 % d'air	0,16929	1,0164
Acide sulfureux.....	1,05	0,00460	0,40040	»	»	2,4038

Les rapports contenus dans les dernières colonnes de ces deux tableaux ne sont pas identiques pour un même gaz; cela tient à ce que les corrections de température n'ont pas été faites de la même manière et surtout à ce que le gaz renfermait des impuretés en proportions

variables, dont la détermination comporte, comme nous l'avons dit, une assez grande incertitude.

Il reste enfin à déterminer les indices de réfraction eux-mêmes. Pour l'air, la valeur de  $\varphi_0$  donnée par le petit appareil, à la pression moyenne de 1 mètre, est égale à 0,16657. Comme on connaît l'influence de la pression, on en déduit que le nombre qui conviendrait à la pression moyenne de 0<sup>m</sup>,50 serait 0,16648. Le rapport des deux valeurs de  $\varphi_0$  déterminées par le grand appareil et par le petit est

$$\frac{1,3053}{0,16648} = 7,84.$$

Si l'on calcule, au contraire, la valeur de  $\varphi_0$  pour le grand appareil par le coefficient de dilatation 0,00382, on trouve

$$1,3053 \frac{1 + 0,00382 \times 22}{1 + 0,00367 \times 22} = 1,3092.$$

Ce nombre est presque identique à ceux qui ont été obtenus dans des expériences faites dans le voisinage de zéro; on a donc, pour le rapport des résultats donnés par les deux appareils,

$$\frac{1,3092}{0,16648} = 7,864.$$

Or la longueur des tubes, dans le grand appareil, était de 2<sup>m</sup>,002, et, dans le petit, de 0<sup>m</sup>,25475. Le rapport de ces deux longueurs est

$$\frac{2,0024}{0,25475} = 7,860.$$

Ces deux résultats ne diffèrent que de  $\frac{1}{2000}$ .

La longueur d'onde de la raie D, d'après les expériences de Fraunhofer, que les travaux plus récents ont confirmées, est égale à 0,5888 millièmes de millimètre dans l'air, ce qui fait sensiblement 0,589 dans le vide. On a donc, pour l'indice de réfraction de l'air à la température de zéro et à la pression de 1 mètre de mercure, c'est-à-dire à la pression moyenne de 0<sup>m</sup>,50,

$$\frac{n_0 - 1}{1000} = \frac{\lambda}{L} \varphi_0 = \frac{0,000589}{2002} \times 1,3092$$

ou

$$1000 (n_0 - 1) = 0,3852,$$

et, pour la pression normale de 0<sup>m</sup>,76,

$$1000 (n_0 - 1) = 0,3851 \times 0,76 = 0,29275.$$

Pour les autres gaz, on pourra prendre les moyennes des résultats obtenus avec les deux appareils, ou plutôt ceux qui correspondent aux cas où les corrections relatives aux impuretés étaient le plus faibles. On obtient ainsi, pour la température de zéro et la pression normale de 0<sup>m</sup>,76 (') :

Nature du gaz.	Rapport de la réfraction du gaz à celle de l'air..		Dulong.	D.-M.
	$n_0 - 1$	$1000(n_0 - 1)$		
Air.....	1	0,2927	0,294	+ 13
Azote.....	1,0172	0,2977	0,300	+ 23
Oxygène.....	0,9245	0,2706	0,272	+ 14
Hydrogène.....	0,4740	0,1387	0,138	+ 9
Oxyde de carbone.....	1,1446	0,3350	0,340	+ 50
Acide carbonique.....	1,5527	0,4544	0,449	- 54
Protoxyde d'azote.....	1,7626	0,5159	0,503	- 129
Bioxyde d'azote.....	1,0164	0,2975	0,303	+ 55
Acide sulfureux.....	2,4038	0,7036	0,665	- 386
Cyanogène.....	2,8070	0,8216	0,834	+ 114

Les résultats de ce tableau me paraissent exacts, en général, à  $\frac{1}{500}$  près. On remarquera que la réfraction de l'air est sensiblement plus faible que celle qui a été obtenue par Biot et Arago.

On peut faire, à ce sujet, plusieurs observations intéressantes. Si l'on multiplie par 0,208 la réfraction de l'oxygène et par 0,792 celle de l'azote, on trouve à  $\frac{2}{1000}$  près la réfraction de l'air. L'expérience vérifie donc, avec autant de précision que le comporte la nature des phénomènes, que la réfraction d'un mélange de gaz est égale à la somme des réfractions des gaz mélangés.

---

(') Quelques-uns des résultats renfermés dans ce Mémoire diffèrent quelquefois d'une manière notable de ceux que j'ai publiés, il y a deux ans, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 617 et 679. Cela tient à ce que les calculs ont été refaits d'une manière plus complète, que plusieurs expériences ont été reprises, et enfin qu'il s'était glissé des erreurs de transcription dans les Notes des *Comptes rendus*.

La réfraction d'un composé, au contraire, est en général plus grande que celle du mélange des gaz simples qui le constituent, comme l'avait déjà remarqué Dulong pour la loi des puissances réfractives.

On a, en effet, pour les deux oxydes de l'azote :

	Rapport de la réfraction du gaz à celle de l'air	
	calculée.	observée.
Protoxyde d'azote.....	1,479	1,763
Bioxyde d'azote.....	0,971	1,016

De même, si l'on déduit la réfraction de la vapeur de carbone des résultats obtenus pour l'oxyde de carbone, l'acide carbonique et le cyanogène, on obtient, en admettant que l'oxyde de carbone renferme la moitié de son volume de vapeur de carbone :

	Rapport de la réfraction de la vapeur de carbone à celle de l'air.
Par l'oxyde de carbone.....	1,385
Par l'acide carbonique.....	1,256
Par le cyanogène.....	1,790

Ces différences montrent qu'il n'est pas possible, au moins en général, de calculer ainsi la réfraction d'un gaz composé par les réfractions des gaz simples qui le constituent.

Je me propose de revenir sur ce sujet dans un prochain Mémoire, où j'examinerai la réfraction des autres gaz et celle des vapeurs.





---

MÉMOIRES  
SUR  
LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

QUI CORRESPONDENT A LA FONCTION  $\cos x + i \sin x$ .

PAR M. H. LEMONNIER,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE HENRI IV.

---

DEUXIÈME MÉMOIRE.

---

*Expression de  $\nu_1(z + t)$ .*

1. Considérons la formule connue

$$\nu\left(\frac{\omega'}{2} - z\right) = i \frac{\mu(z)}{\lambda(z)}.$$

En la mettant sous la forme

$$\mu(z) + i\lambda(z)\nu\left(\frac{\omega'}{2} - z\right) = 0,$$

on voit que la fonction de  $z$

$$\mu(z) + i\lambda(z)\nu(t),$$

s'annule pour

$$t = \frac{\omega'}{2} - z \quad \text{ou} \quad z = \frac{\omega'}{2} - t.$$

La même formule, par le changement de  $z$  en  $-z$ , donnant

$$\mu(z) - i\lambda(z)\nu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(t) - i\lambda(t)\nu\left(\frac{\omega'}{2} + t\right) = 0,$$

il est clair que la fonction de  $z$

$$\mu(t) - i\lambda(t)\nu(z),$$

s'annule pour  $z = -\frac{\omega'}{2} - t$ .

La fraction  $\frac{\mu(z) + i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(t) - i\lambda(t)\nu(z)}$  a, comme ses deux termes,  $\omega$  et  $2\omega'$  pour périodes; ses zéros sont ceux du numérateur, et ses infinis les zéros du dénominateur; car, tant que  $\nu(t)$  est différent de  $\pm 1$ , les deux termes deviennent infinis à la fois en même temps que  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$ ,  $\nu(z)$ , sans que la fraction devienne nulle ou infinie.

Dans l'étendue du parallélogramme dont un premier sommet est le point ( $z = -t$ ), et les deux côtés  $\omega$  et  $2\omega'$ , le numérateur a deux zéros

$$z = \frac{\omega'}{2} - t, \quad z = \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} - t;$$

le dénominateur a deux autres zéros

$$z = \frac{3}{2}\omega' - t, \quad z = \frac{3}{2}\omega' + \frac{\omega}{2} - t.$$

Or ce sont là les zéros et les infinis de la fonction  $\nu_1(z+t)$  dans la même étendue. Il s'ensuit

$$\nu_1(z+t) = A \frac{\mu(z) + i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(t) - i\lambda(t)\nu(z)}.$$

Il faut  $A = 1$ , pour avoir l'égalité par  $z = 0$ ; la formule est donc

$$(1) \quad \nu_1(z+t) = \frac{\mu(z) + i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(t) - i\lambda(t)\nu(z)}.$$

Par l'échange entre  $z$  et  $t$ , on a également

$$(1)' \quad \nu_1(z+t) = \frac{\mu(t) + i\lambda(t)\nu(z)}{\mu(z) - i\lambda(z)\nu(t)}.$$

Si l'on y remplace  $t$  par  $-t$ , dans ces formules, elles deviennent

$$(2) \quad \nu_1(z-t) = \frac{\mu(z) + i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(t) + i\lambda(t)\nu(z)},$$

$$(2)' \quad \nu_1(z-t) = \frac{\mu(t) - i\lambda(t)\nu(z)}{\mu(z) - i\lambda(z)\nu(t)}.$$

2. *Conséquences.* — La formule (1) revenant à

$$\mu(z+t) + i\lambda(z+t) = \frac{[\mu(z) + i\lambda(z)\nu(t)][\mu(t) + i\lambda(t)\nu(z)]}{\mu^2(t) + \lambda^2(t)\nu^2(z)}$$

peut se partager en

$$(3) \quad \mu(z+t) = \frac{\mu(z)\mu(t) - \lambda(z)\nu(z)\lambda(t)\nu(t)}{\mu^2(t) + \lambda^2(t)\nu^2(z)},$$

$$(4) \quad \lambda(z+t) = \frac{\lambda(z)\mu(t)\nu(t) + \lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{\mu^2(t) + \lambda^2(t)\nu^2(z)}.$$

Quand le paramètre  $g$  est égal à 1, ces formules sont

$$(3)' \quad \mu(z+t) = \frac{\mu(z)\mu(t) - \mu'(z)\mu'(t)}{\mu^2(t) + \lambda^2(t)\nu^2(z)},$$

$$(4)' \quad \lambda(z+t) = \frac{\lambda(z)\lambda'(t) + \lambda(t)\lambda'(z)}{\mu^2(t) + \lambda^2(t)\nu^2(z)}.$$

On a par suite

$$(5) \quad \mu(z-t) = \frac{\mu(z)\mu(t) + \lambda(z)\nu(z)\lambda(t)\nu(t)}{\mu^2(t) + \lambda^2(t)\nu^2(z)},$$

$$(6) \quad \lambda(z-t) = \frac{\lambda(z)\mu(t)\nu(t) - \lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{\mu^2(t) + \lambda^2(t)\nu^2(z)}.$$

3. Par les formules (1)' et (2)', on obtient

$$(7) \quad \begin{cases} \nu_1(z+t) + \nu_1(z-t) = \frac{2\mu(t)}{\mu(z) - i\lambda(z)\nu(t)}, \\ \nu_1(z+t) - \nu_1(z-t) = \frac{2i\lambda(t)\nu(z)}{\mu(z) - i\lambda(z)\nu(t)}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(8) \quad \begin{cases} \mu(z+t) + \mu(z-t) = \frac{2\mu(z)\mu(t)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}, \\ \mu(z+t) - \mu(z-t) = -\frac{2\lambda(z)\nu(z)\lambda(t)\nu(t)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}, \\ \lambda(z+t) + \lambda(z-t) = \frac{2\lambda(z)\mu(t)\nu(t)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}, \\ \lambda(z+t) - \lambda(z-t) = \frac{2\lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}. \end{cases}$$

On en tire encore

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\mu(z+t) + \mu(z-t)]\mu(z) + [\lambda(z+t) + \lambda(z-t)]\lambda(z)\nu(t) = 2\mu(t), \\ [\mu(z+t) + \mu(z-t)]\lambda(z)\nu(t) - [\lambda(z+t) + \lambda(z-t)]\mu(z) = 0 \\ \text{et} \\ [\mu(z+t) - \mu(z-t)]\mu(z) + [\lambda(z+t) - \lambda(z-t)]\lambda(z)\nu(t) = 0, \\ [\mu(z+t) - \mu(z-t)]\lambda(z)\nu(t) - [\lambda(z+t) - \lambda(z-t)]\mu(z) = -2\lambda(t)\nu(z). \end{array} \right.$$

4. De même la formule (1), prise sous la forme

$$[\mu(z+t) + i\lambda(z+t)][\mu(t) - i\lambda(t)\nu(z)] = \mu(z) + i\lambda(z)\nu(t),$$

se dédouble en

$$(10) \quad \begin{cases} \mu(z+t)\mu(t) + \lambda(z+t)\lambda(t)\nu(z) = \mu(z), \\ \lambda(z+t)\mu(t) - \mu(z+t)\lambda(t)\nu(z) = \lambda(z)\nu(t), \end{cases}$$

formules qui deviennent, par le changement de  $z$  en  $z+t$  et de  $t$  en  $-t$ ,

$$(11) \quad \begin{cases} \mu(z+t) = \mu(z)\mu(t) - \lambda(z)\lambda(t)\nu(z+t), \\ \lambda(z+t)\nu(t) = \lambda(z)\mu(t) + \mu(z)\lambda(t)\nu(z+t). \end{cases}$$

La dernière, par un échange entre  $z$  et  $t$ , donne

$$(12) \quad \lambda(z+t)\nu(z) = \lambda(t)\mu(z) + \mu(t)\lambda(z)\nu(z+t),$$

ce qui, par le changement de  $t$  en  $-(t+z)$ , devient

$$(13) \quad \lambda(z+t)\mu(z) = \lambda(t)\nu(z) + \lambda(z)\nu(t)\mu(z+t).$$

En combinant par addition et soustraction ces formules (12) et (13), on en déduit

$$(14) \quad \begin{cases} [\lambda(z+t) + \lambda(t)][\nu(z) - \mu(z)] = \lambda(z)[\mu(t)\nu(z+t) - \nu(t)\mu(z+t)], \\ [\lambda(z+t) - \lambda(t)][\nu(z) + \mu(z)] = \lambda(z)[\mu(t)\nu(z+t) + \nu(t)\mu(z+t)], \end{cases}$$

d'où résulte

$$(15) \quad \frac{\lambda(z+t) + \lambda(t)}{\lambda(z+t) - \lambda(t)} = \frac{\nu(z) + \mu(z)}{\nu(z) - \mu(z)} \frac{\mu(t)\nu(z+t) - \nu(t)\mu(z+t)}{\mu(t)\nu(z+t) + \nu(t)\mu(z+t)}$$

ou

$$(15)' \quad \frac{\lambda(z) + \lambda(t)}{\lambda(z) - \lambda(t)} = \frac{\nu(z-t) + \mu(z-t)}{\nu(z-t) - \mu(z-t)} \frac{\mu(t)\nu(z) - \nu(t)\mu(z)}{\mu(t)\nu(z) + \nu(t)\mu(z)},$$

De même, la première des formules (11) pouvant se changer en

$$\mu(\ell) = \mu(z)\mu(z + \ell) + \lambda(z)\lambda(z + \ell)\nu(\ell),$$

on en déduit

$$(16) \quad \begin{cases} [\mu(z + \ell) + \mu(\ell)][1 - \mu(z)] = \lambda(z)[\lambda(z + \ell)\nu(\ell) - \lambda(\ell)\nu(z + \ell)], \\ [\mu(z + \ell) - \mu(\ell)][1 + \mu(z)] = -\lambda(z)[\lambda(z + \ell)\nu(\ell) + \lambda(\ell)\nu(z + \ell)], \end{cases}$$

d'où

$$(17) \quad \frac{\mu(z + \ell) + \mu(\ell)}{\mu(z + \ell) - \mu(\ell)} = -\frac{1 + \mu(z)}{1 - \mu(z)} \frac{\lambda(z + \ell)\nu(\ell) - \lambda(\ell)\nu(z + \ell)}{\lambda(z + \ell)\nu(\ell) + \lambda(\ell)\nu(z + \ell)}$$

ou

$$(17)' \quad \frac{\mu(z) + \mu(\ell)}{\mu(z) - \mu(\ell)} = -\frac{1 + \mu(z - \ell)}{1 - \mu(z - \ell)} \frac{\lambda(z)\nu(\ell) - \lambda(\ell)\nu(z)}{\lambda(z)\nu(\ell) + \lambda(\ell)\nu(z)}.$$

5. Les formules (1) et (2) donnent par la division

$$(18) \quad \frac{\nu_1(z + \ell)}{\nu_1(z - \ell)} = \frac{\mu(\ell) + i\lambda(\ell)\nu(z)}{\mu(\ell) - i\lambda(\ell)\nu(z)},$$

d'où, par un échange entre  $z$  et  $\ell$ ,

$$\frac{\nu_1(z + \ell)}{\nu_1(\ell - z)} = \frac{\mu(z) + i\lambda(z)\nu(\ell)}{\mu(z) - i\lambda(z)\nu(\ell)}$$

ou

$$(19) \quad \nu_1(z + \ell)\nu_1(z - \ell) = \frac{\mu(z) + i\lambda(z)\nu(\ell)}{\mu(z) - i\lambda(z)\nu(\ell)}.$$

Cette formule (19) peut s'écrire

$$\nu_1(z + \ell)\nu_1(z - \ell) = \frac{1 + i\varpi(z)\nu(\ell)}{1 - i\varpi(z)\nu(\ell)};$$

si l'on y fait tendre  $z$  vers  $\frac{\omega'}{2}$ , il s'ensuit

$$(20) \quad \nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + \ell\right)\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} - \ell\right) = \frac{1 - \nu(\ell)}{1 + \nu(\ell)}.$$

Les formules (18) et (19) reviennent à

$$(18)' \quad \frac{\nu_1[(2m + 1)z]}{\nu_1(z)} = \frac{\mu(mz) + i\lambda(mz)\nu[(m + 1)z]}{\mu(mz) - i\lambda(mz)\nu[(m + 1)z]}.$$

$$(19)' \quad \nu_1[(2m + 1)z]\nu_1(z) = \frac{\mu[(m + 1)z] + i\lambda[(m + 1)z]\nu(mz)}{\mu[(m + 1)z] - i\lambda[(m + 1)z]\nu(mz)}.$$

## 6. La formule (19) étant

$$[\mu(z+t) + i\lambda(z+t)][\mu(z-t) + i\lambda(z-t)] = \frac{[\mu(z) + i\lambda(z)\nu(t)]^2}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}$$

équivalent aux deux suivantes :

$$(21) \quad \begin{cases} \mu(z+t)\mu(z-t) - \lambda(z+t)\lambda(z-t) = \frac{\mu^2(z) - \lambda^2(z)\nu^2(t)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}, \\ \mu(z+t)\lambda(z-t) + \mu(z-t)\lambda(z+t) = \frac{2\mu(z)\lambda(z)\nu(t)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}. \end{cases}$$

De même la formule (18) étant

$$[\mu(z+t) + i\lambda(z+t)][\mu(z-t) - i\lambda(z-t)] = \frac{[\mu(t) + i\lambda(t)\nu(z)]^2}{\mu^2(t) + \lambda^2(t)\nu^2(z)}$$

se dédouble en

$$(22) \quad \begin{cases} \mu(z+t)\mu(z-t) + \lambda(z+t)\lambda(z-t) = \frac{\mu^2(t) - \lambda^2(t)\nu^2(z)}{\mu^2(t) + \lambda^2(t)\nu^2(z)}, \\ -\mu(z+t)\lambda(z-t) + \mu(z-t)\lambda(z+t) = \frac{2\mu(t)\lambda(t)\nu(z)}{\mu^2(t) + \lambda^2(t)\nu^2(z)}. \end{cases}$$

et de ces quatre formules résulte

$$(23) \quad \begin{cases} \mu(z+t)\mu(z-t) = \frac{1 - \lambda^2(z) - \lambda^2(t) + h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)} = \frac{\mu^2(z) - \lambda^2(t)\nu^2(z)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}, \\ \lambda(z+t)\lambda(z-t) = \frac{\lambda^2(z) - \lambda^2(t)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}, \\ \mu(z+t)\lambda(z-t) = \frac{\mu(z)\lambda(z)\nu(t) - \mu(t)\lambda(t)\nu(z)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}, \\ \mu(z-t)\lambda(z+t) = \frac{\mu(z)\lambda(z)\nu(t) + \mu(t)\lambda(t)\nu(z)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}. \end{cases}$$

*Expression de  $\mu_1(z+t)$ .*

## 7. La formule

$$\mu\left(\frac{\omega'}{2} - z\right) = i \frac{\nu(z)}{h\lambda(z)},$$

prise sous la forme

$$\nu(z) + h i \lambda(z) \mu\left(\frac{\omega'}{2} - z\right) = 0,$$

accuse que la fonction de  $z$

$$\nu(z) + ki\lambda(z)\mu(t)$$

s'annule pour  $z = \frac{\omega'}{2} - t$ .

Comme l'on a

$$\nu(z) - ki\lambda(z)\mu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = 0$$

ou

$$\nu(t) - ki\lambda(t)\mu\left(\frac{\omega'}{2} + t\right) = 0,$$

la fonction de  $z$

$$\nu(t) - ki\lambda(t)\mu(z)$$

s'annule également pour  $z = -\frac{\omega'}{2} - t$ .

Il s'ensuit que la fraction

$$\frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\mu(t)}{\nu(t) - ki\lambda(z)\mu(t)},$$

dans l'étendue du parallélogramme qui a pour sommet le point ( $z = -t$ ) et pour côtés ses deux périodes  $\omega$  et  $2\omega'$ , a pour zéros

$$z = \frac{\omega'}{2} - t, \quad z = \frac{\omega'}{2} - t + \omega' + \frac{\omega}{2} = 3\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} - t,$$

et pour infinis

$$z = -\frac{\omega'}{2} - t + 2\omega' = \frac{3}{2}\omega' - t, \quad z = -\frac{\omega'}{2} - t + \omega' + \frac{\omega}{2} = \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} - t.$$

Comme, dans la même étendue, ce sont les zéros et les infinis de  $\mu_1(z + t)$ , il y a lieu de poser

$$\mu_1(z + t) = A \frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\mu(t)}{\nu(t) - ki\lambda(z)\mu(z)}.$$

On trouve  $A = 1$ , en prenant  $z = 0$ ; donc on a

$$(1) \quad \mu_1(z + t) = \frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\mu(t)}{\nu(t) - ki\lambda(z)\mu(z)},$$

d'où

$$(1)' \quad \mu_1(z+t) = \frac{\nu(t) + h i \lambda(t) \mu(z)}{\nu(z) - h i \lambda(z) \mu(t)},$$

et par suite

$$(2) \quad \mu_1(z-t) = \frac{\nu(z) + h i \lambda(z) \mu(t)}{\nu(t) + h i \lambda(t) \mu(z)},$$

$$(2)' \quad \mu_1(z-t) = \frac{\nu(t) - h i \lambda(t) \mu(z)}{\nu(z) - h i \lambda(z) \mu(t)}.$$

8. *Conséquences.* — La formule (1), écrite sous la forme

$$\nu(z+t) + h i \lambda(z+t) = \frac{[\nu(z) + h i \lambda(z) \mu(t)][\nu(t) + h i \lambda(t) \mu(z)]}{\nu^2(t) + h^2 \lambda^2(t) \mu^2(z)},$$

se subdivise en

$$(3) \quad \nu(z+t) = \frac{\nu(z) \nu(t) - h^2 \lambda(z) \mu(z) \lambda(t) \mu(t)}{\nu^2(t) + h^2 \lambda^2(t) \mu^2(z)},$$

$$(4) \quad \lambda(z+t) = \frac{\lambda(z) \mu(t) \nu(t) + \lambda(t) \mu(z) \nu(z)}{\nu^2(t) + h^2 \lambda^2(t) \mu^2(z)},$$

ce qui, au cas de  $g = 1$ , est

$$(3)' \quad \nu(z+t) = \frac{\nu(z) \nu(t) - \frac{1}{h^2} \nu'(z) \nu'(t)}{\nu^2(t) + h^2 \lambda^2(t) \mu^2(z)},$$

$$(4)' \quad \lambda(z+t) = \frac{\lambda(z) \lambda'(t) + \lambda(t) \lambda'(z)}{\nu^2(t) + h^2 \lambda^2(t) \mu^2(z)},$$

et de là

$$(5) \quad \nu(z-t) = \frac{\nu(z) \nu(t) + h \lambda(z) \mu(z) \lambda(t) \mu(t)}{\nu^2(t) + h^2 \lambda^2(t) \mu^2(z)},$$

$$(6) \quad \lambda(z-t) = \frac{\lambda(z) \mu(t) \nu(t) - \lambda(t) \mu(z) \nu(z)}{\nu^2(t) + h^2 \lambda^2(t) \mu^2(z)}.$$

9. Par (1)' et (2)' il vient

$$(7) \quad \begin{cases} \mu_1(z+t) + \mu_1(z-t) = \frac{2\nu(t)}{\nu(z) - h i \lambda(z) \mu(t)}, \\ \mu_1(z+t) - \mu_1(z-t) = \frac{2 h i \lambda(t) \mu(z)}{\nu(z) - h i \lambda(z) \mu(t)}, \end{cases}$$



d'où

$$(8) \quad \begin{cases} \nu(z+t) + \nu(z-t) = \frac{2\nu(t)\nu(z)}{\nu^2(z) + h^2\lambda^2(z)\mu^2(t)}, \\ \nu(z+t) - \nu(z-t) = \frac{-2h^2\lambda(z)\mu(z)\lambda(t)\mu(t)}{\nu^2(z) + h^2\lambda^2(z)\mu^2(t)}, \end{cases}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} [\nu(z+t) + \nu(z-t)]\nu(z) + [\lambda(z+t) + \lambda(z-t)]h^2\lambda(z)\mu(t) &= 2\nu(t), \\ [\nu(z+t) + \nu(z-t)]\lambda(z)\mu(t) + [\lambda(z+t) + \lambda(z-t)]\nu(z) &= 0, \end{aligned}$$

et

$$(9) \quad \begin{cases} [\nu(z+t) - \nu(z-t)]\nu(z) + [\lambda(z+t) - \lambda(z-t)]h^2\lambda(z)\mu(t) = 0, \\ [\nu(z+t) - \nu(z-t)]\lambda(z)\mu(t) + [\lambda(z+t) - \lambda(z-t)]h^2\lambda(z)\mu(t) = 2\lambda(t)\mu(z). \end{cases}$$

10. De même, par la formule (1), on obtient

$$(10) \quad \begin{cases} \nu(z+t)\nu(t) + h^2\lambda(z+t)\lambda(t)\mu(z) = \nu(z), \\ \lambda(z+t)\nu(t) - \nu(z+t)\lambda(t)\mu(z) = \lambda(z)\mu(t); \end{cases}$$

d'où, par le changement de  $t$  en  $-t$  et de  $z$  en  $z+t$ ,

$$(11) \quad \begin{cases} \nu(z+t) = \nu(z)\nu(t) - h^2\lambda(z)\lambda(t)\mu(z+t), \\ \lambda(z+t)\mu(t) = \lambda(z)\nu(t) + \nu(z)\lambda(t)\mu(z+t), \end{cases}$$

dont la dernière peut se changer en

$$\lambda(z+t)\mu(z) = \lambda(t)\mu(z) + \nu(t)\lambda(z)\mu(z+t),$$

formule (13) du numéro précédent.

La première des formules (10), par un échange entre  $z$  et  $t$ , étant

$$\nu(t) = \nu(z+t)\nu(z) + h^2\lambda(z+t)\lambda(z)\mu(t),$$

on en tire, avec la première des formules (11),

$$(12) \quad \begin{cases} [\nu(z+t) + \nu(t)][1 - \nu(z)] = h^2\lambda(z)[\lambda(z+t)\mu(t) - \lambda(t)\mu(z+t)], \\ [\nu(z+t) - \nu(t)][1 + \nu(z)] = -h^2\lambda(z)[\lambda(z+t)\mu(t) + \lambda(t)\mu(z+t)], \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\nu(z+t) + \nu(t)}{\nu(z+t) - \nu(t)} = \frac{1 + \nu(z)}{1 - \nu(z)} \frac{\lambda(t)\mu(z+t) - \lambda(z+t)\mu(t)}{\mu(t)\lambda(z+t) + \lambda(t)\mu(z+t)},$$

ou

$$(13) \quad \frac{\nu(z) + \nu(t)}{\nu(z) - \nu(t)} = \frac{1 + \nu(z-t) \lambda(t) \mu(z) - \lambda(z) \mu(t)}{1 - \nu(z-t) \lambda(t) \mu(z) + \lambda(z) \mu(t)}.$$

11. En divisant l'une par l'autre les formules (1) et (2), on obtient

$$(14) \quad \frac{\mu_1(z+t)}{\mu_1(z-t)} = \frac{\nu(t) + ki \lambda(t) \mu(z)}{\nu(t) - ki \lambda(t) \mu(z)},$$

d'où

$$\frac{\mu_1(z+t)}{\mu_1(t-z)} = \frac{\nu(z) + ki \lambda(z) \mu(t)}{\nu(z) - ki \lambda(z) \mu(t)}$$

ou

$$(15) \quad \mu_1(z+t) \mu_1(z-t) = \frac{\nu(z) + ki \lambda(z) \mu(t)}{\nu(z) - ki \lambda(z) \mu(t)}.$$

Comme l'on a  $\frac{\nu(z)}{ki \lambda(z)} = \mu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$ , cette dernière formule peut s'écrire

$$\mu_1(z+t) \mu_1(z-t) = \frac{\mu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) + \mu(t)}{\mu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) - \mu(t)},$$

d'où

$$(16) \quad \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + t\right) \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} - t\right) = \frac{1 - \mu(t)}{1 + \mu(t)}.$$

Les formules (14) et (15) peuvent se prendre sous les formes

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1[(2m+1)z]}{\mu_1(z)} &= \frac{\nu(mz) + ki \lambda(mz) \mu[(m+1)z]}{\nu(mz) - ki \lambda(mz) \mu[(m+1)z]}, \\ \mu_1[(2m+1)z] \mu_1(z) &= \frac{\nu[(m+1)z] + ki \lambda[(m+1)z] \mu(mz)}{\nu[(m+1)z] - ki \lambda[(m+1)z] \mu(mz)}. \end{aligned}$$

12. La formule (15) étant

$$[\nu(z+t) + ki \lambda(z+t)][\nu(z-t) + ki \lambda(z-t)] = \frac{[\nu(z) + ki \lambda(z) \mu(t)]^2}{\nu^2(z) + k^2 \lambda^2(z) \mu^2(t)}$$

comprend les deux formules

$$\begin{aligned} \nu(z+t) \nu(z-t) - k^2 \lambda(z+t) \lambda(z-t) &= \frac{\nu^2(z) - k^2 \lambda^2(z) \mu^2(t)}{\nu^2(z) + k^2 \lambda^2(z) \mu^2(t)}, \\ \nu(z+t) \lambda(z-t) + \nu(z-t) \lambda(z+t) &= \frac{2 \lambda(z) \nu(z) \mu(t)}{\nu^2(z) + k^2 \lambda^2(z) \mu^2(t)}; \end{aligned}$$

d'où, par un échange entre  $z$  et  $t$ , ce qui revient à opérer de même sur la formule (14),

$$\begin{aligned} \nu(z+t) \nu(z-t) + h^2 \lambda(z+t) \lambda(z-t) &= \frac{\nu^2(t) - h^2 \lambda^2(t) \mu^2(z)}{\nu^2(t) + h^2 \lambda^2(t) \mu^2(z)}, \\ -\nu(z+t) \lambda(z-t) + \nu(z-t) \lambda(z+t) &= \frac{2 \lambda(t) \nu(t) \mu(z)}{\nu^2(t) + h^2 \lambda^2(t) \mu^2(z)}, \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} \nu(z+t) \nu(z-t) &= \frac{1 - h^2 \lambda^2(z) - h^2 \lambda^2(t) + h^2 \lambda^2(z) \lambda^2(t)}{\nu^2(z) + h^2 \lambda^2(z) \mu^2(t)} = \frac{\nu^2(z) - h^2 \mu^2(z) \lambda^2(t)}{\nu^2(z) + h^2 \lambda^2(z) \mu^2(t)}, \\ \lambda(z+t) \lambda(z-t) &= \frac{\lambda^2(z) - \lambda^2(t)}{\nu^2(z) + h^2 \lambda^2(z) \mu^2(t)}, \\ \nu(z+t) \lambda(z-t) &= \frac{\lambda(z) \nu(z) \mu(t) - \lambda(t) \nu(t) \mu(z)}{\nu^2(z) + h^2 \lambda^2(z) \mu^2(t)}, \\ \nu(z-t) \lambda(z+t) &= \frac{\lambda(z) \nu(z) \mu(t) + \lambda(t) \nu(t) \mu(z)}{\nu^2(z) + h^2 \lambda^2(z) \mu^2(t)}. \end{aligned}$$

Il est à observer que l'on a

$$\begin{aligned} \mu^2(z) + \lambda^2(z) \nu^2(t) &= \mu^2(t) + \lambda^2(t) \nu^2(z) = \nu^2(z) + h^2 \lambda^2(z) \mu^2(t) \\ &= \nu^2(t) + h^2 \lambda^2(t) \mu^2(z) = 1 - h^2 \lambda^2(z) \lambda^2(t). \end{aligned}$$

*Expression de  $\lambda_1(z+t)$ .*

13. La formule

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4} - z\right) = \frac{\mu(z)}{\nu(z)}$$

peut se transformer en

$$\nu(z) + h \mu(z) \lambda\left(z + \frac{\omega'}{2} - \frac{\omega}{4}\right) = 0,$$

d'après quoi la fonction de  $z$ ,

$$\nu(z) + h \mu(z) \lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right),$$

s'annule pour

$$z + \frac{\omega'}{2} - \frac{\omega}{4} = \frac{\omega}{4} - t \quad \text{ou} \quad z = \frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2} - t.$$

Puis, comme, en changeant  $z$  en  $\frac{\omega}{4} - t$ , on a

$$\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)\lambda\left(\frac{\omega'}{2} - t\right) = 0,$$

on voit que la fonction de  $z$

$$\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)\lambda(z)$$

s'annule par  $z = \frac{\omega'}{2} - t$ .

Il s'ensuit que le rapport

$$\frac{\nu(z) + k\mu(z)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)\lambda(z)},$$

qui a  $\omega$  et  $2\omega'$  pour périodes, présente dans le parallélogramme  $(\omega, 2\omega')$ , ayant un sommet en  $(z = -t)$ , les deux zéros

$$z = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2} - t, \quad z = \frac{\omega}{2} + \frac{3}{2}\omega' - t$$

et les deux infinis

$$z = \frac{\omega'}{2} - t, \quad z = 3\frac{\omega'}{2} - t;$$

d'où l'on conclut

$$\lambda_1(z+t) = A \frac{\nu(z) + k\mu(z)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)\lambda(z)},$$

ce qui, pour  $z = 0$ , donne

$$\lambda_1(t) = A \frac{1 + k\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)} = A \frac{1 + k\frac{\mu(t)}{\nu(t)}}{\frac{h'}{\nu(t)}} = A \frac{\nu(t) + k\mu(t)}{h'},$$

c'est-à-dire  $A = 1$ ; donc

$$(1) \quad \lambda_1(z+t) = \frac{\nu(z) + k\mu(z)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)\lambda(z)} = \frac{\nu(t) + k\mu(t)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - z\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - z\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} - z\right)\lambda(t)}$$

ou

$$(1)' \quad \lambda_1(z+t) = \frac{\nu(z)\nu(t) + k\mu(z)\mu(t)}{h'[1 + k\lambda(z)\lambda(t)]} ;$$

de là

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1(z-t) &= \frac{\nu(z)\nu(t) + k\mu(z)\mu(t)}{h'[1 - k\lambda(z)\lambda(t)]} = \frac{\nu(z) + k\mu(z)\lambda\left(\frac{\omega}{4} + t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} + t\right) + k\mu\left(\frac{\omega}{4} + t\right)\lambda(z)} \\ &= \frac{\nu(t) + k\mu(t)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - z\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - z\right) - k\mu\left(\frac{\omega}{4} - z\right)\lambda(t)} . \end{aligned} \right.$$

*Remarque.* — La fonction

$$\lambda_1\left(\frac{\omega}{4} + z\right) = \frac{\nu(z)}{1 + k\lambda(z)} = \sqrt{\frac{1 - k\lambda(z)}{1 + k\lambda(z)}}$$

et

$$\lambda_1\left(\frac{\omega}{4} - z\right) = \frac{\nu(z)}{1 - k\lambda(z)} = \frac{1 + k\lambda(z)}{\nu(z)} = \sqrt{\frac{1 + k\lambda(z)}{1 - k\lambda(z)}} = \frac{1}{\lambda_1\left(\frac{\omega}{4} + z\right)} .$$

**14. Conséquences.** — La formule (1)' étant

$$\nu(z+t) + k\mu(z+t) = \frac{[\nu(z)\nu(t) + k\mu(z)\mu(t)][1 - k\lambda(z)\lambda(t)]}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}$$

se dédouble en

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu(z+t) &= \frac{\nu(z)\nu(t) - h^2\mu(z)\lambda(z)\mu(t)\lambda(t)}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)} , \\ \mu(z+t) &= \frac{\mu(z)\mu(t) - \lambda(z)\lambda(t)\nu(z)\nu(t)}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)} , \end{aligned} \right.$$

formules déjà trouvées.

**15. La formule (1)', donnant**

$$\frac{1}{\lambda_1(z+t)} = \frac{h'[1 + k\lambda(z)\lambda(t)]}{\nu(z)\nu(t) + k\mu(z)\mu(t)}$$

ou

$$\frac{\nu(z+t) - k\mu(z+t)}{h'} = \frac{h'[1 + k\lambda(z)\lambda(t)]}{\nu(z)\nu(t) + k\mu(z)\mu(t)} .$$

peut se transformer en

$$(1)'' \quad \lambda_1(z+t) = \frac{h' [1 - k \lambda(z) \lambda(t)]}{v(z) v(t) - k \mu(z) \mu(t)},$$

d'où

$$(2)' \quad \lambda_1(z-t) = \frac{h' [1 + k \lambda(z) \lambda(t)]}{v(z) v(t) - k \mu(z) \mu(t)},$$

ce qui mène à

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda_1(z+t) + \lambda_1(z-t) = \frac{2h'}{v(z) v(t) - k \mu(z) \mu(t)}, \\ \lambda_1(z+t) - \lambda_1(z-t) = -\frac{2kh' \lambda(z) \lambda(t)}{v(z) v(t) - k \mu(z) \mu(t)}; \end{cases}$$

d'où

$$(5) \quad \begin{cases} v(z+t) + v(z-t) = \frac{2h'^2 v(z) v(t)}{v^2(z) v^2(t) - h^2 \mu^2(z) \mu^2(t)} = \frac{2v(z) v(t)}{1 - h^2 \lambda^2(z) \lambda^2(t)}, \\ \mu(z+t) + \mu(z-t) = \frac{2h'^2 \mu(z) \mu(t)}{v^2(z) v^2(t) - h^2 \mu^2(z) \mu^2(t)} = \frac{2\mu(z) \mu(t)}{1 - h^2 \lambda^2(z) \lambda^2(t)}, \\ v(z+t) - v(z-t) = -\frac{2h^2 h'^2 \lambda(z) \lambda(t) \mu(z) \mu(t)}{v^2(z) v^2(t) - h^2 \mu^2(z) \mu^2(t)} = -\frac{2h^2 \lambda(z) \lambda(t) \mu(z) \mu(t)}{1 - h^2 \lambda^2(z) \lambda^2(t)}, \\ \mu(z+t) - \mu(z-t) = -\frac{2h'^2 \lambda(z) \lambda(t) v(z) v(t)}{v^2(z) v^2(t) - h^2 \mu^2(z) \mu^2(t)} = -\frac{2\lambda(z) \lambda(t) v(z) v(t)}{1 - h^2 \lambda^2(z) \lambda^2(t)}, \end{cases}$$

formules obtenues précédemment.

16. D'autre part, il en résulte

$$(6) \quad \begin{cases} [v(z+t) + v(z-t)] v(z) v(t) - h^2 [\mu(z+t) + \mu(z-t)] \mu(z) \mu(t) = 2h'^2, \\ [\mu(z+t) + \mu(z-t)] v(z) v(t) + [v(z+t) + v(z-t)] \mu(z) \mu(t) = 0, \\ \text{et} \\ [v(z+t) - v(z-t)] v(z) v(t) - h^2 [\mu(z+t) - \mu(z-t)] \mu(z) \mu(t) = 0, \\ [\mu(z+t) - \mu(z-t)] v(z) v(t) - [v(z+t) - v(z-t)] \mu(z) \mu(t) = -2h'^2 \lambda(z) \lambda(t). \end{cases}$$

17. Par la formule (1)', prise sous la forme

$$\lambda_1(z+t) h' [1 + k \lambda(z) \lambda(t)] = v(z) v(t) + k \mu(z) \mu(t),$$

on obtient

$$(7) \quad \begin{cases} v(z+t) + k^2 \mu(z+t) \lambda(z) \lambda(t) = v(z) v(t), \\ \mu(z+t) + v(z+t) \lambda(z) \lambda(t) = \mu(z) \mu(t), \end{cases}$$

formules déjà trouvées.

La même équation (1)' donnant

$$\frac{\nu(z+t) - h\mu(z+t)}{h'} = \frac{h'[1 + h\lambda(z)\lambda(t)]}{\nu(z)\nu(t) + h\mu(z)\mu(t)}$$

ou

$$[\nu(z+t) - h\mu(z+t)][\nu(z)\nu(t) + h\mu(z)\mu(t)] = h'^2[1 + h\lambda(z)\lambda(t)],$$

il s'ensuit

$$(8) \quad \begin{cases} \nu(z+t)\nu(z)\nu(t) - h^2\mu(z+t)\mu(z)\mu(t) = h'^2, \\ \nu(z+t)\mu(z)\mu(t) - \mu(z+t)\nu(z)\nu(t) = h'\lambda(z)\lambda(t). \end{cases}$$

Cette dernière formule, quand on y change  $t$  en  $-\ell - z$ , devient

$$\nu(t)\mu(z)\mu(\ell+z) - \mu(t)\nu(z)\nu(\ell+z) = -h'^2\lambda(z)\lambda(\ell+z),$$

d'où, par un échange entre  $z$  et  $t$ ,

$$\nu(z)\mu(t)\mu(\ell+z) - \mu(z)\nu(t)\nu(\ell+z) = -h'^2\lambda(t)\lambda(\ell+z).$$

De ces dernières, on tire

$$(9) \quad \begin{cases} [\mu(z)\nu(t) + \mu(t)\nu(z)][\mu(z+t) - \nu(z+t)] = -h'^2[\lambda(z) + \lambda(t)]\lambda(z+t), \\ [\mu(z)\nu(t) - \mu(t)\nu(z)][\mu(z+t) + \nu(z+t)] = -h'^2[\lambda(z) - \lambda(t)]\lambda(z+t), \end{cases}$$

d'où

$$(10) \quad \frac{\lambda(z) + \lambda(t)}{\lambda(z) - \lambda(t)} = \frac{\mu(z+t) - \nu(z+t)}{\mu(z+t) + \nu(z+t)} \frac{\mu(z)\nu(t) + \mu(t)\nu(z)}{\mu(z)\nu(t) - \mu(t)\nu(z)},$$

ce qui, rapproché de la formule (15)' du n° 3, conduit à

$$\frac{\nu(z-\ell) + \mu(z-\ell)}{\nu(z-\ell) - \mu(z-\ell)} \frac{\mu(t)\nu(z) - \nu(t)\mu(z)}{\mu(t)\nu(z) + \nu(t)\mu(z)} = \frac{\mu(z+t) - \nu(z+t)}{\mu(z+t) + \nu(z+t)} \frac{\mu(z)\nu(t) + \mu(t)\nu(z)}{\mu(z)\nu(t) - \mu(t)\nu(z)}$$

ou

$$(11) \quad \left[ \frac{\mu(z)\nu(t) - \mu(t)\nu(z)}{\mu(z)\nu(t) + \mu(t)\nu(z)} \right]^2 = \frac{\mu(z-\ell) - \nu(z-\ell)}{\mu(z-\ell) + \nu(z-\ell)} \frac{\mu(z+t) - \nu(z+t)}{\mu(z+t) + \nu(z+t)}.$$

18. Les formules (1)' et (2) donnent par une division

$$(12) \quad \frac{\lambda_1(z+t)}{\lambda_1(z-t)} = \frac{1 - h\lambda(z)\lambda(t)}{1 + h\lambda(z)\lambda(t)}.$$

La même formule (2) pouvant se remplacer par

$$\frac{1}{\lambda_1(z-t)} = \frac{\nu(z)\nu(t) - h\mu(z)\mu(t)}{h'[1 + h\lambda(z)\lambda(t)]},$$

il s'ensuit, avec la formule (1)',

$$(13) \quad \lambda_1(z+t)\lambda_1(z-t) = \frac{\nu(z)\nu(t) + k\mu(z)\mu(t)}{\nu(z)\nu(t) - k\mu(z)\mu(t)} = \frac{1 + k\lambda\left(\frac{\omega}{4} - z\right)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{1 - k\lambda\left(\frac{\omega}{4} - z\right)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)},$$

d'où

$$\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + t\right)\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} - t\right) = \frac{1 + k\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{1 - k\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)} = \frac{1 + k\lambda\left(\frac{\omega}{4} + t\right)}{1 - k\lambda\left(\frac{\omega}{4} + t\right)}.$$

Sous une autre forme, on a ainsi

$$(12)' \quad \frac{\lambda_1[(2m+1)z]}{\lambda_1(z)} = \frac{1 - k\lambda[(m+1)z]\lambda(mz)}{1 + k\lambda[(m+1)z]\lambda(mz)},$$

$$(13)' \quad \lambda_1[(2m+1)z]\lambda_1(z) = \frac{\nu[(m+1)z]\nu(mz) + k\mu[(m+1)z]\mu(mz)}{\nu[(m+1)z]\nu(mz) - k\mu[(m+1)z]\mu(mz)}.$$

On tire de la formule (12), en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned} \nu(z+t) + k^2\mu(z+t)\lambda(z)\lambda(t) &= \nu(z-t) - k^2\mu(z-t)\lambda(z)\lambda(t), \\ \mu(z+t) + \nu(z+t)\lambda(z)\lambda(t) &= \mu(z-t) - \nu(z-t)\lambda(z)\lambda(t) \end{aligned}$$

ou

$$(14) \quad \begin{cases} \nu(z+t) - \nu(z-t) = -k^2\lambda(z)\lambda(t)[\mu(z+t) + \mu(z-t)], \\ [\nu(z+t) + \nu(z-t)]\lambda(z)\lambda(t) = -[\mu(z+t) - \mu(z-t)], \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\nu(z+t) - \nu(z-t)}{\nu(z+t) + \nu(z-t)} = k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t) \frac{\mu(z+t) + \mu(z-t)}{\mu(z+t) - \mu(z-t)}$$

et

$$(15) \quad \begin{cases} [\nu(z+t) + \nu(z-t)][\nu(z+t) - \nu(z-t)] \\ = k^2[\mu(z+t) + \mu(z-t)][\mu(z+t) - \mu(z-t)]. \end{cases}$$

La même formule, prise au préalable sous la forme

$$\frac{\nu(z+t) + k\mu(z+t)}{h'} \frac{\nu(z-t) - k\mu(z-t)}{h'} = \frac{1 - k\lambda(z)\lambda(t)}{1 + k\lambda(z)\lambda(t)},$$

se dédouble, quand on y chasse les dénominateurs, en

$$(16) \quad \begin{cases} \nu(z+t)\nu(z-t) - k^2\mu(z+t)\mu(z-t) \\ + k^2\lambda(z)\lambda(t)[\mu(z+t)\nu(z-t) - \mu(z-t)\nu(z+t)] = k'^2, \\ \mu(z+t)\nu(z-t) - \mu(z-t)\nu(z+t) \\ + \lambda(z)\lambda(t)[\nu(z+t)\nu(z-t) - k^2\mu(z+t)\mu(z-t)] = -k'^2\lambda(z)\lambda(t); \end{cases}$$



on trouve de même, par la formule (13),

$$(17) \quad \begin{cases} [\nu(z+t)\nu(z-t) + k^2\mu(z+t)\mu(z-t)]\nu(z)\nu(t) \\ \quad - k^2[\mu(z+t)\nu(z-t) + \mu(z-t)\nu(z+t)]\mu(z)\mu(t) = h'^2\nu(z)\nu(t), \\ [\mu(z+t)\nu(z-t) + \mu(z-t)\nu(z+t)]\nu(z)\nu(t) \\ \quad - [\nu(z+t)\nu(z-t) + k^2\mu(z+t)\mu(z-t)]\mu(z)\mu(t) = h'^2\mu(z)\mu(t). \end{cases}$$

Les formules (12) et (13), prises sous les formes

$$\begin{aligned} \frac{\nu(z+t) + h\mu(z+t)}{h'} \frac{\nu(z-t) - h\mu(z-t)}{h'} &= \frac{[1 - k\lambda(z)\lambda(t)]^2}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \frac{\nu(z+t) + h\mu(z+t)}{h'} \frac{\nu(z-t) + h\mu(z-t)}{h'} &= \frac{[\nu(z)\nu(t) + h\mu(z)\mu(t)]^2}{\nu^2(z)\nu^2(t) - h^2\mu^2(z)\mu^2(t)}, \end{aligned}$$

se dédoublent en les suivantes :

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu(z+t)\nu(z-t) - k^2\mu(z+t)\mu(z-t) &= h'^2 \frac{1 + h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \mu(z+t)\nu(z-t) - \mu(z-t)\nu(z+t) &= - \frac{2\lambda(z)\lambda(t)}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \text{et} \\ \nu(z+t)\nu(z-t) + k^2\mu(z+t)\mu(z-t) &= h'^2 \frac{\nu^2(z)\nu^2(t) + h^2\mu^2(z)\mu^2(t)}{\nu^2(z)\nu^2(t) - h^2\mu^2(z)\mu^2(t)} = \frac{\nu^2(z)\nu^2(t) + h^2\mu^2(z)\mu^2(t)}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \mu(z+t)\nu(z-t) + \mu(z-t)\nu(z+t) &= 2h'^2 \frac{\mu(z)\mu(t)\nu(z)\nu(t)}{\nu^2(z)\nu^2(t) - h^2\mu^2(z)\mu^2(t)} = \frac{2\mu(z)\mu(t)\nu(z)\nu(t)}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}; \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu(z+t)\nu(z-t) &= \frac{1 - h^2\lambda^2(z) - h^2\lambda^2(t) + h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)} = \frac{\nu^2(z) - h^2\mu^2(z)\lambda^2(t)}{\nu^2(z) + h^2\lambda^2(z)\mu^2(t)}, \\ \mu(z+t)\mu(z-t) &= \frac{1 - \lambda^2(z) - \lambda^2(t) + h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)} = \frac{\mu^2(z) - \lambda^2(t)\nu^2(z)}{\mu^2(z) + \lambda^2(z)\nu^2(t)}, \\ \mu(z+t)\nu(z-t) &= \frac{\mu(z)\mu(t)\nu(z)\nu(t) - \lambda(z)\lambda(t)}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \mu(z-t)\nu(z+t) &= \frac{\mu(z)\mu(t)\nu(z)\nu(t) + \lambda(z)\lambda(t)}{1 - h^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}. \end{aligned} \right.$$

19. La formule

$$\lambda_1(z+t) = \frac{\nu(z) + h\mu(z)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{4} - t\right) + h\mu\left(\frac{\omega}{4} - t\right)\lambda(z)},$$

quand on y remplace  $t$  par  $-\frac{\omega}{4} + t$ , devient

$$(20) \quad \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) = \frac{\nu(z) + h\mu(z)\lambda\left(\frac{\omega}{4} - t\right)}{\nu\left(\frac{\omega}{2} - t\right) + h\mu\left(\frac{\omega}{2} - t\right)\lambda(z)} = \frac{\nu(z) + h\mu(z)\lambda(t)}{\nu(t) - h\mu(t)\lambda(z)}.$$

C'est alors une formule où le second membre est analogue à celui de

$$\nu_1(z + t) = \frac{\mu(z) + i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(t) - i\lambda(t)\nu(z)}.$$

Il s'ensuit

$$(21) \quad \begin{cases} \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) = \frac{\nu(t) + h\mu(t)\lambda(z)}{\nu(z) - h\mu(z)\lambda(t)} = \frac{\nu(z) + h\mu(z)\lambda(t)}{\nu(t) - h\mu(t)\lambda(z)}, \\ \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = \frac{\nu(z) - h\mu(z)\lambda(t)}{\nu(t) - h\mu(t)\lambda(z)} = \frac{\nu(t) + h\mu(t)\lambda(z)}{\nu(z) + h\mu(z)\lambda(t)}; \end{cases}$$

d'où

$$(22) \quad \frac{\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right)}{\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right)} = \frac{\nu(z) + h\mu(z)\lambda(t)}{\nu(z) - h\mu(z)\lambda(t)}$$

ou bien

$$\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) \lambda_1\left(\frac{\omega}{4} + z - t\right) = \lambda_1\left[\frac{\omega}{4} - (z + t)\right] \lambda_1\left(\frac{\omega}{4} + z - t\right) = \frac{\nu(z) + h\mu(z)\lambda(t)}{\nu(z) - h\mu(z)\lambda(t)}$$

et

$$(23) \quad \begin{cases} \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = \frac{\nu(t) + h\mu(t)\lambda(z)}{\nu(t) - h\mu(t)\lambda(z)}, \\ \lambda_1\left[\frac{\omega}{4} - (z + t)\right] \lambda_1\left[\frac{\omega}{4} - (z - t)\right] = \frac{\nu(t) + h\mu(t)\lambda(z)}{\nu(t) - h\mu(t)\lambda(z)}. \end{cases}$$

La formule (20), sous la forme

$$\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) = \frac{[\nu(z) + h\mu(z)\lambda(t)][\nu(t) + h\mu(t)\lambda(z)]}{\nu^2(t) - h^2\mu^2(t)\lambda^2(z)},$$

peut se dédoubler en

$$(24) \quad \begin{cases} \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) = h' \frac{\nu(z)\nu(t) + h^2\mu(z)\mu(t)\lambda(z)\lambda(t)}{\nu^2(t) - h^2\mu^2(t)\lambda^2(z)} = h' \frac{\nu(z)\nu(t) + h^2\mu(z)\mu(t)\lambda(z)\lambda(t)}{\nu^2(z) - h^2\mu^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) = h' \frac{\mu(z)\lambda(t)\nu(t) + \mu(t)\lambda(z)\nu(z)}{\nu^2(t) - h^2\mu^2(t)\lambda^2(z)} = h' \frac{\mu(z)\lambda(t)\nu(t) + \mu(t)\lambda(z)\nu(z)}{\nu^2(z) - h^2\mu^2(z)\lambda^2(t)}, \end{cases}$$

dont la première, en raison de ce que  $\nu\left(\frac{\omega}{4} - z\right) = \frac{k'}{\nu(z)}$  revient à

$$(25) \quad \nu(z+t) = \frac{\nu^2(t) - k^2 \mu^2(t) \lambda^2(z)}{\nu(z) \nu(t) + k^2 \mu(z) \mu(t) \lambda(z) \lambda(t)} = \frac{\nu^2(z) - k^2 \mu^2(z) \lambda^2(t)}{\nu(z) \nu(t) + k^2 \mu(t) \lambda(z) \mu(z) \lambda(t)}.$$

Les formules (21) donnent par addition et soustraction

$$(26) \quad \begin{cases} \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) + \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = \frac{2\nu(z)}{\nu(t) - k\mu(t)\lambda(z)}, \\ \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) - \lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = \frac{2k\mu(z)\lambda(t)}{\nu(t) - k\mu(t)\lambda(z)}, \end{cases}$$

d'où

$$(27) \quad \begin{cases} \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) + \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = \frac{2k'\nu(z)\nu(t)}{\nu^2(t) - k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}, \\ \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) - \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = \frac{2k'k'\mu(z)\mu(t)\lambda(z)\lambda(t)}{\nu^2(t) - k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}, \\ \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) + \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = k' \frac{2\mu(t)\lambda(z)\nu(z)}{\nu^2(t) - k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}, \\ \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) - \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = k' \frac{2\mu(z)\lambda(t)\nu(t)}{\nu^2(t) - k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}, \end{cases}$$

et d'autre façon

$$(28) \quad \begin{cases} \left[ \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) + \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) \right] \nu(t) \\ \quad - k^2 \mu(t) \lambda(z) \left[ \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) + \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) \right] = 2k'\nu(z), \\ \left[ \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) + \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) \right] \nu(t) \\ \quad - \mu(t) \lambda(z) \left[ \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) + \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) \right] = 0, \\ \left[ \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) - \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) \right] \nu(t) \\ \quad - k^2 \mu(t) \lambda(z) \left[ \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) - \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) \right] = 0, \\ \left[ \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) - \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) \right] \nu(t) \\ \quad - \mu(t) \lambda(z) \left[ \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) - \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) \right] = 2k'\mu(z)\lambda(t) \end{cases}$$

Par la formule (20) on a encore

$$(29) \quad \begin{cases} \nu(t) \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) - k' \mu(t) \lambda(z) \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) = k' \nu(z), \\ \nu(t) \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) - \mu(t) \lambda(z) \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) = k' \mu(z) \lambda(t), \end{cases}$$

ou, par le changement de  $t$  en  $-t$  et de  $z$  en  $z + t$ ,

$$(30) \quad \begin{cases} \nu(t) \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z\right) - k' \mu(t) \lambda(z + t) \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z\right) = k' \nu(z + t), \\ \nu(t) \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z\right) - \mu(t) \lambda(z + t) \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z\right) = -k' \mu(z + t) \lambda(t), \end{cases}$$

et, si l'on change là  $z$  en  $\frac{\omega}{4} + z$ ,

$$(31) \quad \begin{cases} \nu(t) \nu(z) = k' \mu(t) \mu(z) \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right) + k' \nu\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right), \\ \nu(t) \mu(z) = \mu(t) \nu(z) \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right) - k' \lambda(t) \mu\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right); \end{cases}$$

d'où, par un échange entre  $z$  et  $t$  dans la dernière,

$$\nu(z) \mu(t) = \mu(z) \nu(t) \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right) - k' \lambda(z) \mu\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right).$$

De là, par addition et soustraction,

$$(32) \quad \begin{cases} [\nu(z) \mu(t) + \nu(t) \mu(z)] \left[1 - \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right)\right] = -k' [\lambda(z) + \lambda(t)] \mu\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right), \\ [\nu(z) \mu(t) - \nu(t) \mu(z)] \left[1 + \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right)\right] = -k' [\lambda(z) - \lambda(t)] \mu\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right); \end{cases}$$

d'où

$$(33) \quad \frac{\lambda(z) + \lambda(t)}{\lambda(z) - \lambda(t)} = \frac{1 - \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right)}{1 + \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right)} \frac{\nu(z) \mu(t) + \nu(t) \mu(z)}{\nu(z) \mu(t) - \nu(t) \mu(z)}.$$

Comme on a trouvé

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(z) + \lambda(t)}{\lambda(z) - \lambda(t)} &= \frac{\mu(z + t) - \nu(z + t)}{\mu(z + t) + \nu(z + t)} \frac{\mu(z) \nu(t) + \mu(t) \nu(z)}{\mu(z) \nu(t) - \mu(t) \nu(z)} \\ &= \frac{\nu(z - t) + \mu(z - t)}{\nu(z - t) - \mu(z - t)} \frac{\nu(z) \mu(t) - \nu(t) \mu(z)}{\nu(z) \mu(t) + \nu(t) \mu(z)}, \end{aligned}$$

il s'ensuit

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\nu(z+t) - \mu(z+t)}{\nu(z+t) + \mu(z+t)} = \frac{1 - \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right)}{1 + \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right)}, \\ \frac{\nu(z-t) + \mu(z-t)}{\nu(z-t) - \mu(z-t)} = \frac{1 - \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right)}{1 + \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z + t\right)} \left[ \frac{\nu(z)\mu(t) + \nu(t)\mu(z)}{\nu(z)\mu(t) - \nu(t)\mu(z)} \right]^2. \end{cases}$$

La formule (22) est, sous une autre forme,

$$\frac{\lambda_1\left[-\frac{\omega}{4} + (2m+1)z\right]}{\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z\right)} = \frac{\nu[(m+1)z] + k\mu[(m+1)z]\lambda(mz)}{\nu[(m+1)z] - k\mu[(m+1)z]\lambda(mz)},$$

et la suivante est

$$\lambda_1\left[-\frac{\omega}{4} + (2m+1)z\right]\lambda_1\left(-\frac{\omega}{4} + z\right) = \frac{\nu(mz) + k\mu(mz)\lambda[(m+1)z]}{\nu(mz) - k\mu(mz)\lambda[(m+1)z]}.$$

Ces formules (22), (23), écrites comme il suit,

$$\begin{aligned} \frac{\nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) + k\mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right)}{k'} \frac{\nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) - k\mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right)}{k'} &= \frac{[\nu(z) + k\mu(z)\lambda(t)]^2}{\nu^2(z) - k^2\mu^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \frac{\nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) + k\mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right)}{k'} \frac{\nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) + k\mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right)}{k'} &= \frac{[\nu(t) + k\mu(t)\lambda(z)]^2}{\nu^2(t) - k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}, \end{aligned}$$

peuvent être dédoublées en

$$(35) \quad \begin{cases} \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right)\nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) - k^2\mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right)\mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = k'^2 \frac{\nu^2(z) + k^2\mu^2(z)\lambda^2(t)}{\nu^2(z) - k^2\mu^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right)\nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) - \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right)\mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = k'^2 \frac{2\nu(z)\mu(z)\lambda(t)}{\nu^2(z) - k^2\mu^2(z)\lambda^2(t)}, \\ \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right)\nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) + k^2\mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right)\mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = k'^2 \frac{\nu^2(t) + k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}{\nu^2(t) - k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}, \\ \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right)\nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) + \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right)\mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = k'^2 \frac{2\nu(t)\mu(t)\lambda(z)}{\nu^2(t) - k^2\mu^2(t)\lambda^2(z)}; \end{cases}$$

d'où

$$(36) \left\{ \begin{array}{l} \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) \nu\left(-\frac{\omega}{2} + z - t\right) = h'^2 \frac{\nu'(z) + h^2 \lambda^2(z) \mu^2(t)}{\nu^2(z) - h^2 \mu^2(z) \lambda^2(t)}, \\ \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = h'^2 \frac{\lambda^2(z) - \lambda^2(t)}{\nu^2(z) - h^2 \mu^2(z) \lambda^2(t)}, \\ \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = h'^2 \frac{\nu'(z) \mu'(z) \lambda(t) + \nu(t) \mu'(t) \lambda'(z)}{\nu^2(z) - h^2 \mu^2(z) \lambda^2(t)}, \\ \nu\left(-\frac{\omega}{4} + z + t\right) \mu\left(-\frac{\omega}{4} + z - t\right) = h'^2 \frac{\nu(t) \mu'(t) \lambda(z) - \nu'(z) \mu(z) \lambda'(t)}{\nu^2(z) - h^2 \mu^2(z) \lambda^2(t)}. \end{array} \right.$$

20. Les fonctions de  $z$  et de  $t$

$$\begin{aligned} \nu_1(z+t) \nu_1(z-t), \quad \frac{\nu_1'(z+t)}{\nu_1(z-t)}, \quad \mu_1(z+t) \mu_1(z-t), \quad \frac{\mu_1'(z+t)}{\mu_1(z-t)}, \\ \lambda_1(z+t) \lambda_1(z-t), \quad \frac{\lambda_1'(z+t)}{\lambda_1(z-t)} \end{aligned}$$

jouissent de la propriété commune de satisfaire à l'équation différentielle du second ordre

$$y''_{zz} - y''_{tt} = \frac{y'^2_z - y'^2_t}{y}.$$

Soit posé

$$u = \nu_1(z+t) \nu_1(z-t) = \frac{\mu(z) + i \lambda(z) \nu(t)}{\mu(z) - i \lambda(z) \nu(t)};$$

on en tire

$$u'_z = \frac{2gi\nu'(z)\nu(t)}{[\mu(z) - i\lambda(z)\nu(t)]^2}, \quad u'_t = \frac{-2gih^2\lambda'(z)\lambda(t)\mu(z)\mu'(t)}{[\mu(z) - i\lambda(z)\nu(t)]^2},$$

d'où

$$u'_z + u'_t = 2giu\nu(z+t),$$

$$u'_z - u'_t = 2giu\nu(z-t),$$

et de là

$$u''_{zz} + u''_{tt} = 2giu\nu'(z+t) + 2giu'_z\nu(z+t),$$

$$u''_{zz} + u''_{tt} = 2giu\nu'(z+t) + 2giu'_t\nu(z+t),$$

ce qui donne

$$u''_{zz} - u''_{tt} = 2gi(u'_z - u'_t)\nu(z+t) = -4g^2u\nu(z+t)\nu(z-t);$$

mais d'un autre côté on a

$$u''_{zz} - u''_{tt} = -4g^2u^2\nu(z+t)\nu(z-t),$$

d'où il vient

$$u''_{z^2} - u''_{t^2} = \frac{u'^2_z - u'^2_t}{u}.$$

L'équation aux dérivées partielles

$$y''_{z^2} - y''_{t^2} = \frac{y'^2_z - y'^2_t}{y}$$

est ainsi vérifiée par

$$y = u = \frac{\mu(z) + i\lambda(z)\nu(t)}{\mu(z) - i\lambda(z)\nu(t)} = \nu_1(z+t)\nu_1(z-t).$$

Comme elle ne change pas, quand  $z$  et  $t$  se permutent, elle est également satisfaite par

$$y = \nu_1(z+t)\nu_1(t-z) = \frac{\nu_1(z+t)}{\nu_1(z-t)} = \frac{\mu(t) + i\lambda(t)\nu(z)}{\mu(t) - i\lambda(t)\nu(z)}.$$

On trouve que, si l'on pose

$$u = \mu_1(z+t)\mu_1(z-t) = \frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\mu(t)}{\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)},$$

en opérant d'une manière semblable,

$$u'_z = \frac{2gki\mu(z)\mu(t)}{[\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)]^2}, \quad u'_t = \frac{-2gki\lambda(z)\lambda(t)}{[\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)]^2},$$

$$u'_z + u'_t = 2gk i u \mu(z+t),$$

$$u'_z - u'_t = 2gk i u \mu(z-t),$$

$$u''_{z^2} - u''_{t^2} = -4g^2 k^2 u \mu(z+t)\mu(z-t),$$

$$u'^2_z - u'^2_t = -4g^2 k^2 u^2 \mu(z+t)\mu(z-t),$$

$$u''_{z^2} - u''_{t^2} = \frac{u'^2_z - u'^2_t}{u},$$

de sorte que la même équation différentielle est vérifiée par

$$y = \mu_1(z+t)\mu_1(z-t) = \frac{\nu(z) + ki\lambda(z)\mu(t)}{\nu(z) - ki\lambda(z)\mu(t)};$$

puis par

$$y = \frac{\mu_1(z+t)}{\mu_1(z-t)} = \frac{\nu(t) + ki\lambda(t)\mu(z)}{\nu(t) - ki\lambda(t)\mu(z)}.$$

De même, en posant

$$u = \frac{\lambda_1(z+t)}{\lambda_1(z-t)} = \frac{1 - k\lambda(z)\lambda(t)}{1 + k\lambda(z)\lambda(t)},$$

il vient

$$u'_z = \frac{-2k\lambda'(z)\lambda(t)}{[1 + k\lambda(z)\lambda(t)]^2}, \quad u'_t = \frac{-2k\lambda(z)\lambda'(t)}{[1 + k\lambda(z)\lambda(t)]^2},$$

$$u'_z + u'_t = -2gku\lambda(z+t),$$

$$u'_z - u'_t = -2gku\lambda(z-t),$$

puis

$$u''_z - u''_t = 4g^2k^2u\lambda(z+t)\lambda(z-t),$$

$$u''_z + u''_t = 4g^2k^2u\lambda(z+t)\lambda(z-t),$$

d'où

$$u''_z - u''_t = \frac{u''_z - u''_t}{u};$$

c'est-à-dire que l'équation différentielle a aussi pour solution

$$v = \frac{\lambda_1(z+t)}{\lambda_1(z-t)} = \frac{1 - k\lambda(z)\lambda(t)}{1 + k\lambda(z)\lambda(t)}.$$

Si l'on prend

$$u = \lambda_1(z+t)\lambda_1(z-t) = \frac{\nu(z)\nu(t) + k\mu(z)\mu(t)}{\nu(z)\nu(t) - k\mu(z)\mu(t)},$$

il s'ensuit

$$u'_z = \frac{-2gkk'^2\lambda(z)\mu(t)\nu(t)}{[\nu(z)\nu(t) - k\mu(z)\mu(t)]^2}, \quad u'_t = \frac{-2gkk'^2\lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{[\nu(z)\nu(t) - k\mu(z)\mu(t)]^2},$$

$$u'_z + u'_t = -2gku\lambda(z+t),$$

$$u'_z - u'_t = -2gku\lambda(z-t),$$

puis

$$u''_z - u''_t = \frac{u''_z - u''_t}{u}.$$

L'équation différentielle est donc satisfaite aussi par

$$v = \lambda_1(z+t)\lambda_1(z-t) = \frac{\nu(z)\nu(t) + k\mu(z)\mu(t)}{\nu(z)\nu(t) - k\mu(z)\mu(t)}.$$



*Multiplication.*

**21.** Parmi les formules que nous venons d'établir, celles qui se rapportent le plus particulièrement à la multiplication, quand on y suppose  $m$  entier, sont les suivantes :

$$(1) \quad \nu_1[(2m+1)z] \nu_1(z) = \frac{\mu[(m+1)z] + i\lambda[(m+1)z] \nu(mz)}{\mu[(m+1)z] - i\lambda[(m+1)z] \nu(mz)},$$

$$(2) \quad \frac{\nu_1[(2m+1)z]}{\nu_1(z)} = \frac{\mu(mz) + i\lambda(mz) \nu[(m+1)z]}{\mu(mz) - i\lambda(mz) \nu[(m+1)z]},$$

$$(3) \quad \nu_1(2mz) = \frac{\mu(mz) + i\lambda(mz) \nu(mz)}{\mu(mz) - i\lambda(mz) \nu(mz)};$$

$$(1)' \quad \mu_1[(2m+1)z] \mu_1(z) = \frac{\nu[(m+1)z] + ki\lambda[(m+1)z] \mu(mz)}{\nu[(m+1)z] - ki\lambda[(m+1)z] \mu(mz)},$$

$$(2)' \quad \frac{\mu_1[(2m+1)z]}{\mu_1(z)} = \frac{\nu(mz) + ki\lambda(mz) \mu[(m+1)z]}{\nu(mz) - ki\lambda(mz) \mu[(m+1)z]},$$

$$(3)' \quad \mu_1(2mz) = \frac{\nu(mz) + ki\lambda(mz) \mu(mz)}{\nu(mz) - ki\lambda(mz) \mu(mz)};$$

$$(1)'' \quad \lambda_1[(2m+1)z] \lambda_1(z) = \frac{\nu[(m+1)z] \nu(mz) + k \mu[(m+1)z] \mu(mz)}{\nu[(m+1)z] \nu(mz) - k \mu[(m+1)z] \mu(mz)},$$

$$(2)'' \quad \frac{\lambda_1[(2m+1)z]}{\lambda_1(z)} = \frac{1 - k\lambda(mz) \lambda[(m+1)z]}{1 + k\lambda(mz) \lambda[(m+1)z]},$$

$$(3)'' \quad \lambda_1(2mz) = \frac{\nu^2(mz) + k \mu^2(mz)}{\nu^2(mz) - k \mu^2(mz)}.$$

En appliquant de proche en proche ces diverses formules convenablement, on est conduit à des expressions heureuses des fonctions  $\nu_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\lambda_1$  et, par suite, des fonctions  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  des multiples consécutifs de  $z$ .

**22.** D'abord les formules (3), si l'on y fait  $m = 1$ , donnent

$$(1) \quad \nu_1(2z) = \frac{\mu(z) + i\lambda(z) \nu(z)}{\mu(z) - i\lambda(z) \nu(z)}, \quad \mu_1(2z) = \frac{\nu(z) + ki\lambda(z) \mu(z)}{\nu(z) - ki\lambda(z) \mu(z)}, \quad \lambda_1(2z) = \frac{\nu^2(z) + k \mu^2(z)}{k^2[1 + k\lambda^2(z)]},$$

d'où résultent

$$(2) \quad \mu(2z) = \frac{\mu^2 - \lambda^2 \nu^2}{\mu^2 + \lambda^2 \nu^2}, \quad \lambda(2z) = \frac{2\lambda\mu\nu}{\mu^2 + \lambda^2 \nu^2}, \quad \nu(2z) = \frac{\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2}{\nu^2 + k^2 \lambda^2 \mu^2},$$

et l'on a

$$(3) \quad \mu^2 + \lambda^2 \nu^2 = \nu^2 + h^2 \lambda^2 \mu^2 = 1 - h^2 \lambda^4.$$

La formule  $\frac{\lambda_1(z+t)}{\lambda_1(z-t)} = \frac{1 - h \lambda(z) \lambda(t)}{1 + h \lambda(z) \lambda(t)}$  donne encore

$$(4) \quad \lambda_1(2z) = \frac{1+k}{h'} \frac{1 - h \lambda^2(z)}{1 + h \lambda^2(z)} = \frac{1+k}{h'} \frac{\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) - \lambda(z)}{\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) + \lambda(z)},$$

et la formule  $\lambda_1(z+t) \lambda_1(z-t) = \frac{\nu(z) \nu(t) + h \mu(z) \mu(t)}{\nu(z) \nu(t) - h \mu(z) \mu(t)}$

$$(4') \quad \lambda_1(2z) = \frac{h'}{1+k} \frac{\nu^2 + h \mu^2}{\nu^2 - h \mu^2}.$$

On a ainsi

$$\frac{\nu(2z) + h \mu(2z)}{1+k} = \frac{\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) - \lambda(z)}{\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) + \lambda(z)},$$

d'où

$$\frac{\nu(2z) - h \mu(2z)}{1-k} = \frac{\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) + \lambda(z)}{\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) - \lambda(z)};$$

de là, par addition et soustraction,

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\nu(2z) - h^2 \mu(2z)}{h'^2} = \frac{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) + \lambda^2(z)}{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) - \lambda^2(z)}, \\ \frac{h}{h'^2} [-\nu(2z) + \mu(2z)] = \frac{2\lambda(z) \lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)}{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) - \lambda^2(z)}. \end{array} \right.$$

23. Faisons  $m = 1$  dans la formule (1); il vient

$$\nu_1(3z) = (\mu - i\lambda) \frac{\mu(2z) + i\lambda(2z) \nu(z)}{\mu(2z) - i\lambda(2z) \nu(z)};$$

d'où, en usant des formules (2),

$$(6) \quad \nu_1(3z) = (\mu - i\lambda) \frac{\mu^2 - \lambda^2 \nu^2 + 2i\lambda\mu\nu}{\mu^2 - \lambda^2 \nu^2 - 2i\lambda\mu\nu}.$$

On trouve, de même, par la formule (1)' et les formules (2),

$$(7) \quad \mu_1(3z) = (\nu - ki\lambda) \frac{\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2 + 2ki\lambda\nu\mu^2}{\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2 - 2ki\lambda\nu\mu^2},$$

et par la formule (2)''

$$(8) \quad \lambda_1(3z) = \frac{\nu + k\mu}{k'} \frac{1 - k\lambda\lambda(2z)}{1 + k\lambda\lambda(2z)} = \frac{\nu + k\mu}{k'} \frac{\mu^2 + \lambda^2\nu^2 - 2k\lambda^2\mu\nu}{\mu^2 + \lambda^2\nu^2 + 2k\lambda^2\mu\nu}.$$

De la formule (6) on déduit

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu(3z) &= \mu \frac{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 - 4\lambda^2\mu^2\nu^4 + 4\lambda^2\nu^2(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4} \\ &= \mu \frac{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 - 4k'^2\lambda^4\nu^2}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4} = \mu \frac{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4\lambda^2\nu^4}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4}, \\ \lambda(3z) &= \lambda \frac{4\mu^2\nu^2(\mu^2 - \lambda^2\nu^2) - (\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4} \\ &= \lambda \frac{4\mu^4\nu^2 - (\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4} = \lambda \frac{4\mu^2\nu^2 - (\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4}. \end{aligned} \right.$$

Par la formule (7), on a

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu(3z) &= \nu \frac{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 - 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4 + 4k^2\lambda^2\mu^2(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4} \\ &= \nu \frac{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2k'^2\lambda^4\mu^2}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4} = \nu \frac{(\nu^2 + k^2\lambda^2\mu^2)^2 - 4k^2\lambda^2\mu^4}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4}, \\ \lambda(3z) &= \lambda \frac{4\nu^4\mu^2 - (\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4} = \lambda \frac{4\mu^2\nu^2 - (\nu^2 + k^2\lambda^2\mu^2)^2}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4}. \end{aligned} \right.$$

et par la formule (8), il vient

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu(3z) &= \nu \frac{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^2\mu^4}{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2} = \nu \frac{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4k'^2\lambda^2\mu^2}{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2}, \\ \mu(3z) &= \mu \frac{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4\lambda^2\nu^4}{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2} = \mu \frac{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 - 4k'^2\lambda^4\nu^2}{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2}. \end{aligned} \right.$$

Remarquons, d'après ces résultats, les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2 + 4\lambda^2 \mu^2 \nu^4 &= (\mu^2 + \lambda^2 \nu^2)^2 - 4k^2 \lambda^4 \mu^2 \nu^2 \\ &= (\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)^2 + 4k^2 \lambda^2 \nu^2 \mu^4 = (\nu^2 + k^2 \lambda^2 \mu^2)^2 - 4k^2 \lambda^4 \mu^2 \nu^2. \end{aligned}$$

24. En faisant  $m = 2$  dans les formules (3), on obtient

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu_1(4z) &= \frac{\mu(2z) + i\lambda(2z)\nu(2z)}{\mu(2z) - i\lambda(2z)\nu(2z)} = \frac{(\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)(\mu^2 + \lambda^2 \nu^2) + 2i\lambda\mu\nu(\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)}{(\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)(\mu^2 + \lambda^2 \nu^2) - 2i\lambda\mu\nu(\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)}, \\ \mu_1(4z) &= \frac{\nu(2z) + ki\lambda(2z)\mu(2z)}{\nu(2z) - ki\lambda(2z)\mu(2z)} = \frac{(\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)(\nu^2 + k^2 \lambda^2 \mu^2) + 2ki\lambda\mu\nu(\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)}{(\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)(\nu^2 + k^2 \lambda^2 \mu^2) - 2ki\lambda\mu\nu(\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)}, \\ \lambda_1(4z) &= \frac{\nu^2(2z) + k\mu^2(2z)}{k'[1 + k\lambda^2(2z)]} = \frac{(\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)^2 + k(\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2}{k'[(\nu^2 + k^2 \lambda^2 \mu^2)^2 + 4k\lambda^2 \mu^2 \nu^2]} \\ &= \frac{1+k}{h'} \frac{1-k\lambda^2(2z)}{1+k\lambda^2(2z)} = \frac{1+k}{h'} \frac{(\mu^2 + \lambda^2 \nu^2)^2 - 4k\lambda^2 \mu^2 \nu^2}{(\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2 + 4k\lambda^2 \mu^2 \nu^2}; \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu(4z) &= \frac{(\mu^4 - \lambda^4 \nu^4)^2 - 4\lambda^2 \mu^2 \nu^2 (\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)^2}{(\mu^4 - \lambda^4 \nu^4)^2 + 4\lambda^2 \mu^2 \nu^2 (\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)^2}, \\ \lambda(4z) &= \frac{4\lambda\mu\nu(\mu^4 - \lambda^4 \nu^4)(\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)}{(\mu^4 - \lambda^4 \nu^4)^2 + 4\lambda^2 \mu^2 \nu^2 (\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)^2}, \\ \nu(4z) &= \frac{(\nu^4 - k^4 \lambda^4 \mu^4)^2 - 4k^2 \lambda^2 \mu^2 \nu^2 (\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2}{(\nu^4 - k^4 \lambda^4 \mu^4)^2 + 4k^2 \lambda^2 \mu^2 \nu^2 (\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2}, \\ \lambda_1(4z) &= \frac{4\lambda\mu\nu(\nu^4 - k^4 \lambda^4 \mu^4)(\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)}{(\nu^4 - k^4 \lambda^4 \mu^4)^2 + 4k^2 \lambda^2 \mu^2 \nu^2 (\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2}, \\ \nu_1(4z) &= \frac{(\nu^4 - k^4 \lambda^4 \mu^4)^2 - 4k^2 \lambda^2 \mu^2 \nu^2 (\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2}{(\nu^4 - k^4 \lambda^4 \mu^4)^2 + 4k^2 \lambda^2 \mu^2 \nu^2 (\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2}, \\ \lambda(4z) &= \frac{(\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2 (\nu^2 + k^2 \lambda^2 \mu^2)^2 - 4\lambda^2 \mu^2 \nu^2 (\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)^2}{(\nu^2 + k^2 \lambda^2 \mu^2)^4 - 16k^2 \lambda^4 \mu^4 \nu^4}. \end{aligned} \right.$$

De là ressortent les égalités

$$\begin{aligned} (\mu^4 - \lambda^4 \nu^4)^2 + 4\lambda^2 \mu^2 \nu^2 (\nu^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2)^2 &= (\nu^4 - k^4 \lambda^4 \mu^4)^2 + 4k^2 \lambda^2 \mu^2 \nu^2 (\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2 \\ &= (\nu^2 + k^2 \lambda^2 \mu^2)^4 - 16k^2 \lambda^4 \mu^4 \nu^4. \end{aligned}$$

25. En faisant  $m = 2$  dans les formules (2), on obtient

$$\begin{aligned}
 \nu_1(5z) &= \nu_1 \frac{\mu(2z) + i\lambda(2z)\nu(3z)}{\mu(2z) + i\lambda(2z)\nu(3z)} \\
 &= (\mu + i\lambda) \frac{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)[(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4] + 2i\lambda\mu\nu^2[(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2k'^2\lambda^4\mu^2]}{(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)[(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 + 4\lambda^2\mu^2\nu^4] - 2i\lambda\mu\nu^2[(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2k'^2\lambda^4\mu^2]}, \\
 \mu_1(5z) &= \mu_1 \frac{\nu(2z) + ki\lambda(2z)\mu(2z)}{\nu(2z) - ki\lambda(2z)\mu(2z)} \\
 &= (\nu + ki\lambda) \frac{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)[(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4] + 2ki\lambda\mu^2\nu[(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 - 4k'^2\lambda^4\nu^2]}{(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)[(\nu^2 - k^2\lambda^2\mu^2)^2 + 4k^2\lambda^2\nu^2\mu^4] - 2ki\lambda\mu^2\nu[(\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2 - 4k'^2\lambda^4\nu^2]}, \\
 \lambda_1(5z) &= \lambda_1 \frac{1 - k\lambda(2z)\lambda(3z)}{1 + k\lambda(2z)\lambda(3z)} \\
 &= \frac{\nu + k\mu}{k'} \frac{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)[(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2] - 2k\lambda^2\mu\nu[4\mu^4\nu^2 - (\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2]}{(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)[(\mu^2 + \lambda^2\nu^2)^2 - 4k^2\lambda^4\mu^2\nu^2] + 2k\lambda^2\mu\nu[4\mu^4\nu^2 - (\mu^2 - \lambda^2\nu^2)^2]},
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

et de là pour  $\lambda(5z)$ ,  $\mu(5z)$ ,  $\nu(5z)$  des expressions où le dénominateur, qui leur est commun, est une fonction paire par rapport à  $\lambda$ , à  $\mu$  ou à  $\nu$ , et où les numérateurs sont les produits de fonctions analogues par  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

26. On aura ensuite

$$\begin{aligned}
 \nu_1(6z) &= \frac{\mu(3z) + i\lambda(3z)\nu(3z)}{\mu(3z) - i\lambda(3z)\nu(3z)}, \\
 \mu_1(6z) &= \frac{\nu(3z) + ki\lambda(3z)\mu(3z)}{\nu(3z) - ki\lambda(3z)\mu(3z)}, \\
 \lambda_1(6z) &= \frac{\nu^2(3z) + k\mu^2(3z)}{k^2[1 + k\lambda^2(3z)]}.
 \end{aligned}$$

de sorte qu'en posant

$$\lambda(3z) = \lambda \frac{A}{D}, \quad \mu(3z) = \mu \frac{B}{D}, \quad \nu(3z) = \nu \frac{C}{D},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 \nu_1(6z) &= \frac{\mu BD + i\lambda\nu AC}{\mu BD - i\lambda\nu AC}, \quad \mu_1(6z) = \frac{\nu CD + ki\lambda\mu AB}{\nu CD - ki\lambda\mu AB}, \quad \lambda_1(6z) = \frac{\nu^2 C^2 + k\mu^2 B^2}{k^2(D^2 + k\lambda^2 A^2)},
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

expressions où les termes sont du degré  $\frac{6}{2}$  en  $\lambda, \mu, \nu$ , et d'où l'on tire

$$(14) \quad \begin{cases} \mu(6z) = \frac{\mu^2 B^2 D^2 - \lambda^2 \nu^2 A^2 C^2}{\mu^2 B^2 D^2 + \lambda^2 \nu^2 A^2 C^2} = \frac{\mu^2 B^2 D^2 - \lambda^2 \nu^2 A^2 C^2}{D^4 - k^2 \lambda^4 A^4}, \\ \lambda(6z) = \frac{2\lambda\mu\nu ABCD}{\mu^2 B^2 C^2 + \lambda^2 \nu^2 A^2 C^2} = \frac{2\lambda\mu\nu ABCD}{\nu^2 C^2 D^2 + k^2 \lambda^2 \mu^2 A^2 B^2}, \\ \nu(6z) = \frac{\nu^2 C^2 D^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2 A^2 B^2}{\nu^2 C^2 D^2 + k^2 \lambda^2 \mu^2 A^2 B^2} = \frac{\nu^2 C^2 D^2 - k^2 \lambda^2 \mu^2 A^2 B^2}{D^4 - k^2 \lambda^4 A^4}, \end{cases}$$

de sorte que

$$\mu^2 B^2 D^2 + \lambda^2 \nu^2 A^2 C^2 = \nu^2 C^2 D^2 + k^2 \lambda^2 \mu^2 A^2 B^2 = D^4 - k^2 \lambda^4 A^4.$$

Pour former  $\nu_1(7z)$ ,  $\mu_1(7z)$ ,  $\lambda_1(7z)$ , on emploiera, comme pour  $\nu_1(3z)$ ,  $\mu_1(3z)$ ,  $\lambda_1(3z)$ , les formules (1), (1)', (2)".

En continuant ainsi à se servir des formules (5) quand  $n$  sera pair et quand  $n$  sera impair pour  $\nu_1(nz)$ ,  $\mu_1(nz)$  alternativement des formules (1), (1)' et des formules (2), (2)', suivant que  $n$  sera de la forme  $4p-1$  ou de la forme  $4p+1$ , et de la formule (2)" pour  $\lambda_1(nz)$  dans les deux cas, on s'élèvera de proche en proche jusqu'à telle valeur de  $n$  qu'on voudra.

27. Il ressort des calculs que, au cas où  $n$  est pair, les expressions de  $\nu_1(nz)$ ,  $\mu_1(nz)$ ,  $\lambda_1(nz)$  sont des fractions dont les termes sont des fonctions paires du degré  $\frac{n^2}{2}$ , soit en  $\lambda$ , soit en  $\mu$ , soit en  $\nu$ ; les deux termes sont conjugués dans les expressions de  $\nu_1(nz)$ ,  $\mu_1(nz)$ ; puis les valeurs de  $\mu(nz)$ ,  $\nu(nz)$  ont leurs termes du degré  $n^2$  paires en  $\lambda$ , ou  $\mu$ , ou  $\nu$ , et ont le même dénominateur; mais celle de  $\lambda(nz)$  avec ce dénominateur a un numérateur du degré  $n^2-1$  qui est le produit de  $2\lambda\mu\nu$  par quatre facteurs, du degré  $\left(\frac{n}{2}\right)' - 1$  si  $\frac{n}{2}$  est impair. Au cas où  $n$  est impair, les expressions de  $\nu_1(nz)$ ,  $\mu_1(nz)$  sont les produits par  $\nu_1$  et  $\mu_1$ , ou par  $\frac{1}{\nu_1}$  et  $\frac{1}{\mu_1}$  selon que  $n$  a la forme  $4p+1$  ou la forme  $4p-1$ , par des fractions ayant pour termes des fonctions entières paires en  $\lambda$ , ou  $\mu$  ou  $\nu$  conjuguées l'une de l'autre; et l'expression de  $\lambda_1(nz)$  est toujours le produit de  $\lambda_1$  par une fraction analogue : de sorte que

$\nu_1(nz)$  est une fonction rationnelle de  $\nu_1$ ,  $\mu_1(nz)$ , une pareille fonction de  $\mu_1$  et  $\lambda_1(nz)$  l'est de  $\lambda_1$ . En outre, les valeurs de  $\lambda(nz)$ ,  $\mu(nz)$ ,  $\nu(nz)$  ont un même dénominateur du degré  $n^2 - 1$  fonction paire en  $\lambda$ , ou  $\mu$ , ou  $\nu$  à volonté, et pour numérateurs les produits de fonctions analogues respectivement par  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

D'après cela, quel que soit  $n$ ,  $\mu(nz)$  et  $\nu(nz)$  peuvent s'exprimer rationnellement, la première par  $\mu(z)$ , la seconde par  $\nu(z)$ ; le dénominateur y est une fonction paire de  $\mu$  ou de  $\nu$ , le numérateur une fonction de même parité que  $n$ . De même, quand  $n$  est impair,  $\lambda(nz)$  est une fraction rationnelle de  $\lambda$ , ou le dénominateur en est une fonction paire et le numérateur une fonction impaire; mais, quand  $n$  est pair, le numérateur est le produit de  $\lambda\mu\nu$  par une fonction entière, paire en  $\lambda$ , ou  $\mu$ , ou  $\nu$ , à volonté, du degré  $n^2 - 4$ .

28. On peut, en suivant une marche analogue, obtenir sans facteurs étrangers les expressions de

$$\nu_1(\Sigma z_p), \quad \mu_1(\Sigma z_p), \quad \lambda_1(\Sigma z_p);$$

d'où celles de

$$\lambda(\Sigma z_p), \quad \mu(\Sigma z_p), \quad \nu(\Sigma z_p),$$

$\Sigma z_p$  désignant la somme  $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ .

D'abord, nous avons établi les formules

$$\begin{aligned} \nu_1(z_1 + z_2) &= \frac{\mu(z_1) + i\lambda(z_1)\nu(z_2)}{\mu(z_2) - i\lambda(z_2)\nu(z_1)}, \\ \mu_1(z_1 + z_2) &= \frac{\nu(z_1) + ki\lambda(z_1)\mu(z_2)}{\nu(z_2) - ki\lambda(z_2)\mu(z_1)}, \\ \lambda_1(z_1 + z_2) &= \frac{\nu(z_1)\nu(z_2) + k\mu(z_1)\mu(z_2)}{k'(1 + k'\lambda(z_1)\lambda(z_2))}, \\ \mu(z_1 + z_2) &= \frac{\mu(z_1)\mu(z_2) - \lambda(z_1)\lambda(z_2)\nu(z_1)\nu(z_2)}{\mu^2(z_2) + \lambda^2(z_2)\nu^2(z_1)}, \\ \lambda(z_1 + z_2) &= \frac{\mu(z_1)\nu(z_1)\lambda(z_2) + \mu(z_2)\nu(z_2)\lambda(z_1)}{\mu^2(z_1) + \lambda^2(z_2)\nu^2(z_1)}, \\ \nu(z_1 + z_2) &= \frac{\nu(z_1)\nu(z_2) - k^2\lambda(z_1)\lambda(z_2)\mu(z_1)\mu(z_2)}{1 - k^2\lambda^2(z_1)\lambda^2(z_2)}. \end{aligned}$$

Ces dernières formules peuvent se représenter par

$$\lambda(z_1 + z_2) = \frac{I_2(z_1, z_2)}{D_1(z_1, z_2)}, \quad \mu(z_1 + z_2) = \frac{M_1(z_1, z_2)}{D_1(z_1, z_2)}, \quad \nu(z_1 + z_2) = \frac{N_1(z_1, z_2)}{D_1(z_1, z_2)},$$

le degré de chaque terme se marquant par son indice.

Cela posé, les premières formules donneront

$$\begin{aligned} \nu_1(z_1 + z_2 + z_3) &= \frac{\mu(z_1 + z_2) + i\lambda(z_1 + z_2)\nu(z_3)}{\mu(z_3) - i\lambda(z_3)\nu(z_1 + z_2)}, \\ \mu_1(z_1 + z_2 + z_3) &= \frac{\nu(z_1 + z_2) + ki\lambda(z_1 + z_2)\mu(z_3)}{\nu(z_3) - ki\lambda(z_3)\mu(z_1 + z_2)}, \\ \lambda_1(z_1 + z_2 + z_3) &= \frac{\nu(z_1 + z_2)\nu(z_3) + k\mu(z_1 + z_2)\mu(z_3)}{k'[1 + k\lambda(z_1 + z_2)\mu(z_3)]}, \end{aligned}$$

il s'ensuivra donc

$$\begin{aligned} \nu_1(z_1 + z_2 + z_3) &= \frac{M_1(z_1, z_2) + iL_2(z_1, z_2)\nu(z_3)}{D_1(z_1, z_2)\mu(z_3) - iN_1(z_1, z_2)\lambda(z_3)}, \\ \mu_1(z_1 + z_2 + z_3) &= \frac{N_1(z_1, z_2) + kiL_2(z_1, z_2)\mu(z_3)}{D_1(z_1, z_2)\nu(z_3) - kiM_1(z_1, z_2)\lambda(z_3)}, \\ \lambda_1(z_1 + z_2 + z_3) &= \frac{N_1(z_1, z_2)\nu(z_3) + kM_1(z_1, z_2)\mu(z_3)}{k'[D_1(z_1, z_2) + kL_2(z_1, z_2)\lambda(z_3)]}, \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} \lambda(z_1 + z_2 + z_3) &= \frac{\lambda(z_3)M_1(z_1, z_2)N_1(z_1, z_2) + \mu(z_3)\nu(z_3)D_1(z_1, z_2)L_2(z_1, z_2)}{D_1^2(z_1, z_2)\mu^2(z_3) + N_1^2(z_1, z_2)\lambda^2(z_3)} = \frac{I_3(z_1, z_2, z_3)}{D_1(z_1, z_2, z_3)}, \\ \mu(z_1 + z_2 + z_3) &= \frac{\mu(z_3)M_1(z_1, z_2)D_1(z_1, z_2) - \lambda(z_3)\nu(z_3)L_2(z_1, z_2)N_1(z_1, z_2)}{D_1(z_1, z_2, z_3)} = \frac{M_2(z_1, z_2, z_3)}{D_1(z_1, z_2, z_3)}, \\ \nu(z_1 + z_2 + z_3) &= \frac{\nu(z_3)N_1(z_1, z_2)D_1(z_1, z_2) - k\lambda(z_3)\mu(z_3)L_2(z_1, z_2)M_1(z_1, z_2)}{D_1(z_1, z_2, z_3)} = \frac{N_2(z_1, z_2, z_3)}{D_1(z_1, z_2, z_3)}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Quelques remarques sont à faire sur ces expressions.

Dans  $\nu_1(\sigma_{2n})$ ,  $\mu_1(\sigma_{2n})$ ,  $\lambda_1(\sigma_{2n})$ , les termes sont du degré  $\frac{(2n)^2}{2} = 2n^2$ ; dans  $\mu(\sigma_{2n})$  et  $\nu(\sigma_{2n})$ , ils sont du degré  $(2n)^2$ , mais dans  $\lambda(\sigma_{2n})$  le numérateur est du degré  $(2n)^2 - 1$ .

Dans les expressions de  $\nu_1(\sigma_n)$ ,  $\mu_1(\sigma_n)$ ,  $\lambda_1(\sigma_n)$ , quand  $n$  est impair, si  $n$  est de la forme  $4p - 1$ , le dénominateur est du degré  $\frac{n^2 - 1}{2} + 1$ , et le nu-



mérateur du degré  $\frac{n^2-1}{2}$ ; et si  $n$  est de la forme  $4p+1$ , les numérateurs sont du degré  $\frac{n^2-1}{2}+1$ , les dénominateurs du degré  $\frac{n^2-1}{2}$ . Dans celles de  $\lambda(\sigma_n)$ ,  $\mu(\sigma_n)$ ,  $\nu(\sigma_n)$ , le dénominateur qui est commun est du degré  $n^2-1$  et les numérateurs sont du degré  $n^2$ .

Notons qu'en faisant dans ces formules diverses  $z_1=z=z_2=z_3=\dots$ , on retombe sur les valeurs précédemment obtenues pour  $\nu_1(nz)$ ,  $\mu_1(nz)$ ,  $\lambda_1(nz)$  et  $\lambda(nz)$ ,  $\mu(nz)$ ,  $\nu(nz)$ .

La même marche du reste réussit, avec un égal succès, quand on l'applique directement aux formules ordinaires

$$\begin{aligned}\lambda(z_1+z_2) &= \frac{\lambda(z_1)\mu(z_2)\nu(z_2)+\lambda(z_2)\mu(z_1)\nu(z_1)}{1-k^2\lambda^2(z_1)\lambda^2(z_2)}, \\ \mu(z_1+z_2) &= \frac{\mu(z_1)\mu(z_2)-\lambda(z_1)\lambda(z_2)\nu(z_1)\nu(z_2)}{1-k^2\lambda^2(z_1)\lambda^2(z_2)}, \\ \nu(z_1+z_2) &= \frac{\nu(z_1)\nu(z_2)-k^2\lambda(z_1)\mu(z_1)\lambda(z_2)\mu(z_2)}{1-k^2\lambda^2(z_1)\lambda^2(z_2)};\end{aligned}$$

soit qu'on veuille calculer  $\lambda(\sigma_n)$ ,  $\mu(\sigma_n)$ ,  $\nu(\sigma_n)$ , ou  $\lambda(nz)$ ,  $\mu(nz)$ ,  $\nu(nz)$ .

Par exemple, pour les dernières expressions, si l'on pose d'abord

$$\lambda(2z) = \frac{L_2}{D_2}, \quad \mu(2z) = \frac{M_2}{D_2}, \quad \nu(2z) = \frac{N_2}{D_2},$$

on aura

$$\begin{aligned}\lambda(3z) &= \frac{\lambda(2z)\mu(z)\nu(z)+\lambda(z)\mu(2z)\nu(2z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(2z)} = \frac{L_2D_2\mu\nu+\lambda M_2N_2}{D_2^2-k^2\lambda^2L_2^2} = \frac{L_3}{D_3}, \\ \mu(3z) &= \frac{\mu(2z)\mu(z)-\lambda(2z)\nu(2z)\lambda(z)\nu(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(2z)} = \frac{M_2D_2\mu-\lambda\nu L_2N_2}{D_2^2-k^2\lambda^2L_2^2} = \frac{M_3}{D_3}, \\ \nu(3z) &= \frac{\nu(2z)\nu(z)-k^2\lambda(2z)\mu(2z)\lambda(z)\mu(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(2z)} = \frac{N_2D_2\nu-k^2\lambda\mu L_2M_2}{D_2^2-k^2\lambda^2L_2^2} = \frac{N_3}{D_3};\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\lambda(4z) &= \frac{2L_2M_2N_2D_2}{D_2^2-k^2L_2^2} = \frac{L_4}{D_4}, \\ \mu(4z) &= \frac{M_2^2D_2^2-L_2^2N_2^2}{D_2^2-k^2L_2^2} = \frac{M_4}{D_4}, \\ \nu(4z) &= \frac{N_2^2D_2^2-k^2L_2^2M_2^2}{D_2^2-k^2L_2^2} = \frac{N_4}{D_4};\end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\lambda(5z) &= \frac{\lambda(3z)\mu(2z)\nu(2z) + \lambda(2z)\mu(3z)\nu(3z)}{1 - k^2\lambda^2(3z)\lambda^2(2z)} = \frac{L_3M_1N_1D_1 + L_2M_2N_2D_2}{D_1^2D_2^2 - k^2L_1^2L_2^2} = \frac{L_{23}}{D_{23}}, \\ \mu(5z) &= \frac{\mu(3z)\mu(2z) - \lambda(3z)\nu(3z)\lambda(2z)\nu(2z)}{1 - k^2\lambda^2(3z)\lambda^2(2z)} = \frac{M_1M_2D_1D_2 - L_1L_2N_1N_2}{D_{23}} = \frac{M_{23}}{D_{23}}, \\ \nu(5z) &= \frac{\nu(3z)\nu(2z) - k^2\lambda(3z)\lambda(2z)\mu(3z)\mu(2z)}{1 - k^2\lambda^2(3z)\lambda^2(2z)} = \frac{N_1N_2D_1D_2 - k^2L_1L_2M_1M_2}{D_{23}} = \frac{N_{23}}{D_{23}}.\end{aligned}$$

En général, au cas de  $n = 2n' + 1$ ,

$$\begin{aligned}\lambda(2nz) &= \frac{2D_{n'-1}L_{n'}M_{n'}N_{n'}}{D_{n'-1}^2 - k^2L_{n'}^2} = \frac{L_{(2n)'-1}}{D_{(2n)'}}, \\ \mu(2nz) &= \frac{D_{n'-1}^2M_{n'}^2 - L_{n'}^2N_{n'}^2}{D_{n'-1}^2 - k^2L_{n'}^2} = \frac{M_{(2n)'}}{D_{(2n)'}}, \\ \nu(2nz) &= \frac{D_{n'-1}^2N_{n'}^2 - k^2L_{n'}^2M_{n'}^2}{D_{n'-1}^2 - k^2L_{n'}^2} = \frac{N_{(2n)'}}{D_{(2n)'}},\end{aligned}$$

au cas de  $n = 2n'$ ,

$$\begin{aligned}\lambda(2nz) &= \frac{2D_{n'}L_{n'-1}M_{n'}N_{n'}}{D_{n'}^2 - k^2L_{n'-1}^2} = \frac{L_{(2n)'}-1}{D_{(2n)'}}, \\ \mu(2nz) &= \frac{D_{n'}^2M_{n'}^2 - L_{n'-1}^2N_{n'}^2}{D_{(2n)'}^2} = \frac{M_{(2n)'}}{D_{(2n)'}}, \\ \nu(2nz) &= \frac{D_{n'}^2N_{n'}^2 - k^2L_{n'-1}^2M_{n'}^2}{D_{(2n)'}^2} = \frac{N_{(2n)'}}{D_{(2n)'}},\end{aligned}$$

puis, au cas de  $2n + 1 = 4p - 1$ ,

$$\begin{aligned}\lambda(2n+1)z &= \frac{L_{(n+1)'-1}D_{(n+1)'}M_{n'}N_{n'} + L_{n'}D_{n'-1}M_{(n+1)'}N_{(n+1)'}}{D_{n'-1}^2D_{(n+1)'}^2 - k^2L_{(n+1)'}^2L_{n'}^2} = \frac{L_{(2n+1)'}}{D_{(2n+1)'}^2-1}, \\ \mu(2n+1)z &= \frac{D_{n'-1}D_{(n+1)'}M_{(n+1)'}M_{n'} - L_{(n+1)'-1}N_{(n+1)'}L_{n'}N_{n'}}{D_{(2n+1)'}^2-1} = \frac{M_{(2n+1)'}}{D_{(2n+1)'}^2-1}, \\ \nu(2n+1)z &= \frac{D_{n'-1}D_{(n+1)'}N_{(n+1)'}N_{n'} - k^2L_{(n+1)'-1}M_{(n+1)'}L_{n'}M_{n'}}{D_{(2n+1)'}^2-1} = \frac{N_{(2n+1)'}}{D_{(2n+1)'}^2-1},\end{aligned}$$

et, au cas de  $2n + 1 = 4p + 1$ ,

$$\begin{aligned}\lambda(2n+1)z &= \frac{L_{(n+1)^2} D_{(n+1)^2-1} M_n N_n + L_{n^2-1} D_n M_{(n+1)^2} N_{(n+1)^2}}{L_{(n+1)^2-1} D_n^2 - h^2 L_{n^2-1} L_{(n+1)^2}} = \frac{L_{(2n+1)^2}}{D_{(2n+1)^2-1}}, \\ \mu(2n+1)z &= \frac{D_n D_{(n+1)^2-1} N_n M_{(n+1)^2} - L_{(n+1)^2} L_{n^2-1} N_{(n+1)^2} N_n}{D_{(2n+1)^2-1}} = \frac{M_{(2n+1)^2}}{D_{(2n+1)^2-1}}, \\ \nu(2n+1)z &= \frac{D_n D_{(n+1)^2-1} N_n N_{(n+1)^2} - h^2 L_{(n+1)^2} L_{n^2-1} M_{(n+1)^2} M_n}{D_{(2n+1)^2-1}} = \frac{N_{(2n+1)^2}}{D_{(2n+1)^2-1}}.\end{aligned}$$

Sur les expressions de  $\nu_1(nz)$ ,  $\mu_1(nz)$ ,  $\lambda_1(nz)$  en fonction de  $\nu_1$ , de  $\mu_1$  et de  $\lambda_1$ .

29. Lorsque  $n$  est impair, la valeur de  $\nu_1(nz)$  est, comme nous l'avons reconnu, le produit de  $\nu_1$  ou de  $\frac{1}{\nu_1}$ , selon que  $n$  est de forme  $4n' + 1$  ou de forme  $4n' - 1$ , par une fraction ayant pour termes des fonctions entières de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , qui ne les contiennent qu'à des puissances de degré pair et qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le signe de  $i$ . Cette fraction peut, en conséquence, s'exprimer rationnellement au moyen de  $\nu_1$ ; si l'on y remplace  $\mu$ ,  $\lambda$  par  $\frac{1}{2}\left(\nu_1 + \frac{1}{\nu_1}\right)$ ,  $\frac{1}{2i}\left(\nu_1 - \frac{1}{\nu_1}\right)$ , on peut passer d'un terme à l'autre par le changement de  $\nu_1$  en  $\frac{1}{\nu_1}$ . Si les termes se ramènent à être entiers en  $\nu_1$ , ils sont du degré  $n^2 - 1$  et des fonctions paires de  $\nu_1$ . L'expression de  $\mu_1(nz)$  présente les mêmes particularités à l'égard de  $\mu_1$ . Quant à celle de  $\lambda_1(nz)$ , elle est, pourvu que  $n$  soit impair, le produit de  $\lambda_1$  par une fraction analogue exprimable rationnellement par  $\lambda_1$ .

Mais, quand  $n$  est pair, les deux termes de  $\nu_1(nz)$  dépendent de  $\nu$  au premier degré; l'expression n'est plus susceptible d'être rationnelle en  $\nu_1$ . Il en est de même de  $\mu_1(nz)$  à l'égard de  $\mu_1$  et de  $\lambda_1(nz)$  à l'égard de  $\lambda_1$ .

Ces faits sont aisés à confirmer ou à établir par des considérations directes.

30. De l'expression de  $\nu_1(nz)$  en fonction de  $\nu_1$  et cas où  $n$  est impair.

— Comme la fonction  $\nu_1(nz)$  admet les périodes élémentaires  $\omega$ ,  $2\omega'$  de

$\nu_1$ , elle peut s'exprimer par  $\nu_1$  et sa dérivée  $g'iv\nu_1$  sous la forme

$$\nu_1(nz) = \frac{B + Cg'iv\nu_1}{A},$$

A, B, C désignant des fonctions entières de  $\nu_1$ .

Mais, si  $z$  se change en  $\omega' + \frac{\omega}{2} - z$ ,  $\nu_1$  ne changeant pas, A, B, C restent les mêmes et la fonction  $\nu_1(nz)$  ne change pas non plus. Comme  $\nu$  change de signe, il faut avoir  $C = 0$ , ce qui donne

$$\nu_1(nz) = \frac{B}{A}.$$

Déterminons l'expression par ses zéros et ses infinis. L'expression générale des zéros de  $\nu_1$  étant  $\alpha = (4p + 1)\frac{\omega'}{2} + q\frac{\omega}{2}$ , celle de ses infinis  $\alpha = (4p - 1)\frac{\omega'}{2} + q\frac{\omega}{2}$ , les zéros de  $\nu_1(nz)$  sont donnés par  $\alpha = \frac{(4p + 1)\omega'}{2n} + q\frac{\omega}{2n}$ , et ses infinis par  $\alpha = \frac{(4p - 1)\omega'}{2n} + q\frac{\omega}{2n}$ .

Considérons pour  $\nu_1(nz)$  et  $\nu_1(z)$  le parallélogramme commun  $(\omega, 2\omega')$ . Tous les zéros de  $\nu_1(nz)$  compris dans ce parallélogramme répondent à des valeurs de  $p$  égales ou équivalentes suivant le module  $n$  à  $p = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , et à des valeurs de  $q$  égales ou équivalentes à  $0, 1, 2, \dots, 2n - 1$ ; ce qui en fait le nombre égal à  $2n^2$ . Il en est de même des infinis.

Comme l'on a

$$\frac{p}{n} 2\omega' + \frac{\omega'}{2n} + \frac{q}{2n} \omega + \frac{p'}{n} 2\omega' + \frac{\omega'}{2n} + \frac{q'}{2n} \omega = \omega' + \frac{\omega}{2},$$

par  $p + p' = \frac{n-1}{2}$ ,  $q + q' = n$ , et

$$\frac{p}{n} 2\omega' - \frac{\omega'}{2n} + \frac{q}{2n} \omega + \frac{p'}{n} 2\omega' - \frac{\omega'}{2n} + \frac{q'}{2n} \omega = \omega' + \frac{\omega}{2}$$

par  $p + p' = \frac{n+1}{2}$ ,  $q + q' = n$ , les zéros ainsi que les infinis peuvent

*généralement* s'associer deux à deux, de façon qu'il y réponde dans chaque couple la même valeur de  $\nu_1(z)$ .

Cela posé, distinguons le cas de  $n = 4n' + 1$  et celui de  $n = 4n' - 1$ . Soit d'abord  $n = 4n' + 1$ .

On a alors, par  $p = n'$ ,  $q = 0$  et par  $p = n'$ ,  $q = n$ , les deux zéros  $\frac{\omega'}{2}$ ,  $\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$  que présente  $\nu_1$  dans le parallélogramme considéré. D'un autre côté, on a les deux infinis  $3\frac{\omega'}{2}$ ,  $3\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$ , par  $p = 3n' + 1$ ,  $q = 0$  et par  $p = 3n' + 1$ ,  $q = n$ . Quant aux autres zéros et infinis, ils peuvent s'associer par deux de la façon indiquée plus haut.

Désignons par

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_{n'-1}, \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n'-1} \end{aligned}$$

un terme dans chacun de ces couples de zéros ou d'infinis, et prenons

$$\begin{aligned} M &= [\nu_1 - \nu_1(a_1)] [\nu_1 - \nu_1(a_2)] \dots [\nu_1 - \nu_1(a_{n'-1})], \\ L &= [\nu_1 - \nu_1(\alpha_1)] [\nu_1 - \nu_1(\alpha_2)] \dots [\nu_1 - \nu_1(\alpha_{n'-1})]; \end{aligned}$$

l'expression

$$\nu_1 \frac{M}{L},$$

qui a, comme  $\nu_1(nz)$ ,  $\omega$  et  $2\omega'$  pour périodes, admet dans le parallélogramme  $(\omega, 2\omega')$  les mêmes zéros et les mêmes infinis que cette fonction. Il s'ensuit

$$\nu_1(nz) = \nu_1 \frac{M}{L} C,$$

C désignant là une constante convenable.

On voit que M et L sont des fonctions entières de  $\nu_1$  du degré  $n^2 - 1$ . Quand  $z$  augmente de  $\frac{\omega}{2}$ ,  $\nu_1$  change de signe ainsi que  $\nu_1(nz)$ ; donc  $\frac{M}{L}$  ne change pas; et, puisque M et L sont d'un degré pair  $n^2 - 1$ , ce sont des fonctions paires de  $\nu_1$ . Le fait résulte bien des expressions précédentes de M et L, car la différence de deux zéros ou de deux

infinis étant

$$\frac{p-p'}{n} 2\omega' + \frac{q-q'}{n} \frac{\omega}{2}$$

est égale à  $\frac{\omega}{2}$  pour  $p = p'$ ,  $q - q' = n$ ; d'où il suit que les quantités  $\nu_1(a_1) \dots \nu_1(a_{n^2-1})$ , ainsi que  $\nu_1(\alpha_1) \dots \nu_1(\alpha_{n^2-1})$  sont deux à deux égales et de signes contraires. On peut ainsi poser

$$M = [\nu_1^2 - \nu_1^2(a_1)] \dots \left[ \nu_1^2 - \nu_1^2 \left( \frac{a_{n^2-1}}{2} \right) \right],$$

$$L = [\nu_1^2 - \nu_1^2(\alpha_1)] \dots \left[ \nu_1^2 - \nu_1^2 \left( \frac{\alpha_{n^2-1}}{2} \right) \right].$$

En outre, les valeurs  $\nu_1(\alpha_1), \dots, \nu_1(\alpha_{n^2-1})$  sont inverses de celles de  $\nu_1(a_1), \dots, \nu_1(a_{n^2-1})$ , parce que l'on a  $a + \alpha = 0$  pour  $p + p' = 0$ ,  $q + q' = 0$ .

Soit, en second lieu,  $n = 4n' - 1$ . Alors  $p = n'$ ,  $q = 0$  donnent l'infini  $\alpha = \frac{\omega'}{2}$  de  $\nu_1(nz)$ , ce qui est un infini pour  $\frac{1}{\nu_1}$ , et  $p = 3n' - 1$ ,  $q = 0$  donnent le zéro  $\frac{3\omega'}{2}$  de  $\nu_1(nz)$  et de  $\frac{1}{\nu_1}$ , de sorte que les zéros et infinis de  $\frac{1}{\nu_1}$  compris dans le parallélogramme  $(\omega, 2\omega')$  appartiennent à  $\nu_1(nz)$ . Si les autres zéros et infinis de  $\nu_1(nz)$  s'associent comme précédemment et qu'on pose, suivant les mêmes notations,

$$M = [\nu_1 - \nu_1(a_1)] \dots [\nu_1 - \nu_1(a_{n^2-1})],$$

$$L = (\nu_1 - \nu_1(\alpha_1)) \dots (\nu_1 - \nu_1(\alpha_{n^2-1})),$$

il s'ensuivra

$$\nu_1(nz) = C \frac{1}{\nu_1} \frac{M}{L},$$

M et L étant également des fonctions paires du degré  $n^2 - 1$ , dont les racines sont inverses.

*Cas où n est pair.* — L'expression de  $\nu_1(nz)$  en fonction de  $\nu_1$  n'est plus rationnelle; elle est de la forme

$$\frac{M + N g^i \nu_1}{L}.$$

Les zéros et les infinis ayant encore pour expressions générales

$$a = \frac{(4p+1)\omega'}{2n} + q \frac{\omega}{2n}, \quad \alpha = \frac{(4p-1)\omega'}{2n} + q \frac{\omega}{2n},$$

chaque zéro peut s'associer à un infini, de façon que leur somme soit

$\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$ , car on a

$$\frac{(4p+1)\omega'}{2n} + q\frac{\omega}{2n} + \frac{(4p'-1)\omega'}{2n} + q'\frac{\omega}{2n} = \omega' + \frac{\omega}{2}$$

par  $p + p' = \frac{n}{2} = n'$  et  $q + q' = n = 2n'$ . Mais cela ne peut se faire pour deux zéros ou deux infinis. Deux à deux encore, les zéros ainsi que les infinis présentant une différence égale à  $\frac{\omega}{2}$  donnent des valeurs de  $\nu$ , égales et de signes contraires. D'après cela, les valeurs de  $\nu$ , sont différentes pour les zéros à part et pour les infinis à part; mais les infinis lui donnent les mêmes valeurs que les zéros. Il n'y a ni aucun infini ni aucun zéro qui appartienne à  $\nu$ , car on ne peut avoir

$$\frac{(4p+1)\omega'}{4n'} + q\frac{\omega}{2n} = \frac{\omega'}{2} \quad \text{ni} \quad \frac{(4p-1)\omega'}{2n'} + q\frac{\omega}{2n} = \frac{3\omega'}{2}.$$

Par suite, M, N et L étant des fonctions entières, les infinis répondent à des zéros de L et les zéros à ceux de  $M + N g i \nu \nu$ .

On peut, en conséquence, poser

$$L = [\nu_1 - \nu_1(\alpha_1)] [\nu_1 - \nu_1(\alpha_2)] \dots [\nu_1 - \nu_1(\alpha_m)].$$

Comme les infinis font acquérir à  $\nu$ , deux à deux des valeurs égales et de signes contraires, L est une fonction paire de  $\nu$ .

Quand  $z$  augmente de  $\frac{\omega}{2}$ ,  $\nu_1(nz)$  ne change plus; donc, L ne changeant pas, le numérateur  $M + N g i \nu \nu$ , reste de même valeur; or  $\nu$ , change par là de signe,  $\nu$  ne change pas; donc N change de signe: c'est une fonction impaire de  $\nu$ ; par suite, M est une fonction paire.

Pour reconnaître ce que sont les valeurs de M et de N, nous ferons observer que  $\mu(nz)$  a les mêmes zéros que M, et  $\lambda(nz)$  les mêmes que  $N g i \nu \nu$ .

Cela posé, les zéros de  $\mu(nz)$  sont donnés par

$$a = \frac{\omega}{4n} + \frac{p\omega}{n} + \frac{q}{n} \left( \frac{\omega}{2} + \omega' \right),$$

$$a' = -\frac{\omega}{4n} + \frac{p\omega}{n} + \frac{q}{n} \left( \frac{\omega}{2} + \omega' \right),$$

ou par

$$a = \frac{\omega}{4n} + \frac{2p+q}{2n}\omega + q\frac{\omega'}{n}, \quad a' = \frac{\omega}{4n} + \frac{2p+q-1}{2n}\omega + q\frac{\omega'}{n}.$$

En faisant  $q = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$ ,  $2p+q = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$ , et, d'autre part,  $q = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$ ,  $2p+q-1 = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$ , mais à la condition de ne prendre pour  $p$  que des valeurs entières, on aura  $4n^2$  zéros dans l'étendue du parallélogramme  $(\omega, 2\omega')$ . La somme d'un  $a$  et d'un  $a'$  étant  $\frac{\omega}{2} + \omega'$  pour  $p+p'=0$ ,  $q+q'=n$ , les valeurs correspondantes de  $\nu_1(z)$  sont deux à deux égales; ces valeurs aussi sont deux à deux égales et de signes contraires, car on a  $a - a_1 = \frac{\omega}{2}$  pour  $p - p_1 = \frac{n}{2}$ ,  $q - q_1 = 0$ . D'après quoi

$$M = [\nu_1 - \nu_1(a_1)] \dots [\nu_1 - \nu_1(a_{n^2})] C = [\nu_1^2 - \nu_1^2(a_1)] \dots [\nu_1^2 - \nu_1^2(a_{n^2})] C.$$

L'expression de  $N$  est moins simple à obtenir.

Les zéros de  $\lambda(nz)$  ont pour expressions générales

$$a = \frac{p\omega + q\omega'}{2n'}, \quad a' = \frac{\omega}{4n'} + \frac{p\omega + q2\omega'}{2n'},$$

et pour le parallélogramme  $(\omega, 2\omega')$ , il y a à attribuer à  $p$  les valeurs  $0, 1, 2, \dots, n-1$  et à  $q$  les valeurs  $0, 1, 2, \dots, 2n-1$ , ce qui donnera  $4n^2$  zéros.

Il importe d'examiner ce qui regarde quelques-uns de ces couples de valeurs de  $p$  et de  $q$ . Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

$$p = 0 \left\{ \begin{array}{lll} q = 0, & a = 0, & \nu_1(0) = 1, \\ q = n', & a = \frac{\omega'}{2}, & \nu_1\left(\frac{\omega'}{2}\right) = 0, \\ q = 3n', & a = \frac{3\omega'}{2}, & \nu_1\left(\frac{3\omega'}{2}\right) = \infty; \end{array} \right.$$

$$p = n' \left\{ \begin{array}{lll} q = 0, & a = \frac{\omega}{2}, & \nu_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1, \\ q = n', & a = \frac{\omega + \omega'}{2}, & \nu_1\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = 0, \\ q = 3n', & a = \frac{\omega + 3\omega'}{2}, & \nu_1\left(\frac{\omega + 3\omega'}{2}\right) = \infty. \end{array} \right.$$



Au cas de  $n' = 2n'' + 1$  :

$$\begin{aligned}
 p = n'' & \left\{ \begin{array}{lll} q = 0, & a' = \frac{\omega}{4}, & \nu_1 = i, \\ q = n', & a' = \frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}, & \nu_1 = \frac{ik}{1+k'}, \\ q = -n', & a' = \frac{\omega}{4} + \frac{3\omega'}{2}, & \nu_1 = \frac{ik}{1-k'}, \end{array} \right. \\
 p = 3n'' + 1 & \left\{ \begin{array}{lll} q = 0, & a' = \frac{3\omega}{4}, & \nu_1 = -i, \\ q = n', & a' = \frac{3\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}, & \nu_1 = -\frac{ik}{1+k'}, \\ q = -n', & a' = \frac{3\omega}{4} + \frac{3\omega'}{2}, & \nu_1 = -\frac{ik}{1-k'}. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Au cas de  $n' = 2n''$  :

$$\begin{aligned}
 p = n'', \quad q = 2n'', \quad a &= \frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}, \quad \nu_1 = \frac{ik}{1+k'}, \\
 p = -n'', \quad q = 2n'', \quad a &= \frac{3\omega + 2\omega'}{4}, \quad \nu_1 = -\frac{ik}{1+k'}, \\
 p = n'', \quad q = -2n'', \quad a &= \frac{\omega + 6\omega'}{4}, \quad \nu_1 = \frac{ik}{1-k'}, \\
 p = -n'', \quad q = -2n'', \quad a &= \frac{3\omega + 6\omega'}{4}, \quad \nu_1 = -\frac{ik}{1-k'}, \\
 p = n'', \quad q = 0, \quad a &= \frac{\omega}{4}, \quad \nu_1 = i, \\
 p = -n'', \quad q = 0, \quad a &= \frac{3\omega}{4}, \quad \nu_1 = -i.
 \end{aligned}$$

Parmi les  $4n^2$  zéros que présente  $\lambda(nz)$  dans le parallélogramme  $(\omega, 2\omega')$ , on voit ainsi les deux zéros de  $\nu_1$ ,  $\frac{\omega'}{2}$  et  $\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$ , ses deux infinis  $\frac{3\omega'}{2}$ ,  $\frac{3\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$ , et les quatre zéros de  $\nu_1(z)$  pour lesquels  $\nu_1 = \pm \frac{ki}{1+k'}$  et  $\nu_1 = \pm \frac{ki}{1-k'}$ .

En mettant à part ces huit zéros, observons que les  $4(n^2 - 2)$  autres donneront deux à deux la même valeur pour  $\nu_1$ , et deux à deux des va-

leurs égales et de signes contraires. Si on les désigne par  $a_1, a_2, \dots, a_{2(n^2-2)}$ , soient  $a_1, a_2, \dots, a_{2(n^2-2)}$  des zéros pour lesquels  $\nu_i$  ait des valeurs différentes, deux à deux, de signes contraires, et  $a_1, a_2, \dots, a_{n^2-2}$  des zéros pour lesquels  $\nu_i^2$  soit de valeurs différentes.

Posons

$$N' = \nu_i [\nu_i^2 - \nu_i^2(a_1)] \dots [\nu_i^2 - \nu_i^2(a_{n^2-2})],$$

et considérons l'expression

$$\frac{N' g i \nu \nu_i}{L}$$

pour reconnaître qu'elle a les mêmes zéros que  $\lambda(nz)$ .

D'abord les  $4(n^2 - 2)$  zéros dont il vient d'être question lui appartiennent par le facteur  $N'$ . Sur les huit autres, ceux de  $\nu_i$  sont encore par  $N'$ , mais ne s'y trouvent pas par  $\nu \nu_i$ , car  $\frac{\omega'}{2}$  et  $\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$ , étant des infinis de  $\nu$  et des zéros de  $\nu_i$ , ne sont point tels pour le produit  $\nu \nu_i$ . Les deux infinis de  $\nu_i$ ,  $\frac{3\omega'}{2}$  et  $\frac{3\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$  sont des zéros de l'expression, parce que le numérateur y est en  $\nu_i$  du degré  $2n^2 - 1$ , inférieur d'une unité à celui de  $L$ . Enfin, les quatre autres zéros, étant ceux de  $\nu$ , sont des zéros de l'expression par le facteur  $\nu$  lui-même. Il n'y a pas d'ailleurs à s'occuper des infinis de ce facteur  $\nu$ , puisque deux d'entre eux  $\frac{\omega'}{2}$ ,  $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2}$  neutralisent deux zéros de  $\nu_i$  et que les deux autres  $\frac{3\omega'}{2}$ ,  $\frac{3\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}$  deviennent des zéros de l'expression. Comme les zéros de  $L$  sont d'autre part les infinis de  $\lambda(nz)$ , il est ainsi reconnu que la fonction  $\lambda(nz)$  et l'expression  $\frac{N' g i \nu \nu_i}{L}$  ont, dans le parallélogramme  $(\omega, 2\omega')$ , mêmes zéros et mêmes infinis. En conséquence, on a

$$\lambda(nz) = \frac{N' g i \nu \nu_i}{L} C';$$

c'est-à-dire que, dans l'expression  $\frac{M + N g i \nu \nu_i}{L}$  de  $\nu_i(nz)$ , on a

$$N = \nu_i [\nu_i^2 - \nu_i^2(a_1)] \dots [\nu_i^2 - \nu_i^2(a_{n^2-2})] C'.$$

On voit que  $N$  est une fonction impaire de  $\nu_i$  du degré  $2n^2 - 3$ . Il s'y

trouve toujours, d'après ce qui précède, les deux facteurs binômes  $\nu_1^2 - 1$ ,  $\nu_1^2 + 1$ .

En fonction de  $\nu_1$ , la valeur de  $\nu_1(2z)$ , par exemple, est

$$\begin{aligned} \nu_1(2z) &= \frac{\nu_1 + \frac{1}{\nu_1} + \left(\nu_1 - \frac{1}{\nu_1}\right)\nu}{\frac{1}{\nu_1} + \nu_1 + \left(\frac{1}{\nu_1} - \nu_1\right)\nu} = \frac{\nu_1^2 + 1 + (\nu_1^2 - 1)\nu}{1 + \nu_1^2 + (1 - \nu_1^2)\nu} = \frac{\nu_1(\nu_1^2 + 1) + (\nu_1^2 - 1)\nu\nu_1}{\nu_1(1 + \nu_1^2) + (1 - \nu_1^2)\nu\nu_1} \\ &= \frac{\nu_1(\nu_1^2 + 1) + (\nu_1^2 - 1)\sqrt{\nu_1^2 + \frac{k^2}{4}(\nu_1^2 - 1)^2}}{\nu_1(1 + \nu_1^2) + (1 - \nu_1^2)\sqrt{\nu_1^2 + \frac{k^2}{4}(\nu_1^2 - 1)^2}} = \frac{\left[\nu_1(\nu_1^2 + 1) + (\nu_1^2 - 1)\sqrt{\nu_1^2 + \frac{k^2}{4}(\nu_1^2 - 1)^2}\right]^2}{\nu_1^2(1 + \nu_1^2)^2 - (1 - \nu_1^2)^2\left[\nu_1^2 + \frac{k^2}{4}(\nu_1^2 - 1)^2\right]}. \end{aligned}$$

L'expression de  $\nu_1(3z)$  est

$$\nu_1(3z) = \frac{\frac{1}{\nu_1} \left( \left(\nu_1 + \frac{1}{\nu_1}\right)^2 + \left(\nu_1 - \frac{1}{\nu_1}\right)^2 \nu^2 + 2 \left(\nu_1 + \frac{1}{\nu_1}\right) \left(\nu_1 - \frac{1}{\nu_1}\right) \nu^2 \right)}{\left(\frac{1}{\nu_1} + \nu_1\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu_1} - \nu_1\right)^2 \nu^2 + 2 \left(\frac{1}{\nu_1} + \nu_1\right) \left(\frac{1}{\nu_1} - \nu_1\right) \nu^2},$$

$\nu^2$  étant  $1 + \frac{k^2}{4}(\nu_1' - \nu_1)^2$ .

Des considérations du même genre pourraient se développer à l'égard de la question d'exprimer  $\mu_1(nz)$  au moyen de  $\mu_1$ . Il nous semble inutile de nous y arrêter.

31. Pour ce qui concerne  $\lambda_1(nz)$ , nous nous bornerons à quelques observations.

Soit  $n$  impair. D'abord  $\lambda_1(nz)$  peut se considérer sous la forme

$$\lambda_1(nz) = \frac{M_1 + N\lambda_1'}{L} = \frac{M_1 - Nkg\lambda\lambda_1}{L},$$

$L$ ,  $M_1$ ,  $N$  étant des fonctions entières de  $\lambda_1$ .

Si l'on remplace  $z$  par  $-z$ ,  $\lambda_1$  ne changeant pas, ces fonctions restent les mêmes; mais  $\lambda$  changeant de signe, tandis que  $\lambda_1(nz)$  ne change pas, il faut  $N = 0$ , ce qui donne

$$\lambda_1(nz) = \frac{M_1}{L}.$$

Les zéros de  $\lambda_1(nz)$  sont donnés par

$$a = \frac{(2p+1)\frac{\omega'}{2} + (2q+1)\frac{\omega}{2}}{n} = \frac{p\omega'}{n} + \frac{q\omega}{n} + \frac{\omega + \omega'}{2n}$$

et les infinis par

$$\alpha = \frac{(2p+1)\frac{\omega'}{2} + q\omega}{n} = \frac{p\omega'}{n} + \frac{q\omega}{n} + \frac{\omega'}{2n}.$$

Pour avoir ceux que comprend le parallélogramme  $(\omega, 2\omega')$ , il faut attribuer à  $p$  les valeurs  $0, 1, 2, \dots, 2n-1$  et à  $q$  les valeurs  $0, 1, 2, \dots, n-1$ , ce qui porte les uns et les autres au nombre de  $2n^2$ .

Les zéros et les infinis de  $\lambda_1$  dans ce parallélogramme y figurent, les zéros  $\frac{\omega' + \omega}{2}, \frac{3\omega' + \omega}{2}$  par  $p = \frac{n-1}{2}, q = \frac{n-1}{2}$  et  $p = \frac{3n-1}{2}, q = \frac{n-1}{2}$ , les infinis  $\frac{\omega'}{2}, 3\frac{\omega'}{2}$  par  $p = \frac{n-1}{2}, q = 0$ , et  $p = \frac{3n-1}{2}, q = 0$ . Les  $2(n^2 - 1)$  autres zéros peuvent se répartir en couples où les deux termes font acquérir à  $\lambda_1$  la même valeur, car on a

$$\lambda_1\left(p\frac{\omega'}{n} + q\frac{\omega}{n} + \frac{\omega + \omega'}{2n}\right) = \lambda_1\left(p'\frac{\omega'}{n} + q'\frac{\omega}{n} + \frac{\omega' + \omega}{2n}\right),$$

par  $p' = 2n-1-p$  et  $q' = n-1-q$ . Les autres infinis sont dans le même cas. C'est pourquoi, si un terme de chaque couple de zéros se désigne par  $a_1, a_2, \dots, a_{n^2-1}$ , un terme de chaque couple d'infinis par  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n^2-1}$ , et qu'on pose

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [\lambda_1 - \lambda_1(a_1)] \dots [\lambda_1 - \lambda_1(a_{n^2-1})], \\ \mathbf{L} &= [\lambda_1 - \lambda_1(\alpha_1)] \dots [\lambda_1 - \lambda_1(\alpha_{n^2-1})], \end{aligned}$$

l'expression

$$\lambda_1 \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L}}$$

présente les mêmes zéros et les mêmes infinis que  $\lambda(nz)$  dans le parallélogramme  $(\omega, 2\omega')$ ; d'où il résulte que l'on a

$$\lambda_1(nz) = \lambda_1 \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L}}.$$

Il y a, de plus, à remarquer que les valeurs de  $\lambda_1(\alpha)$  sont inverses à celles de  $\lambda_1(a)$ , parce que l'on a

$$\lambda_1\left(p\frac{\omega'}{n} + q\frac{\omega}{n} + \frac{\omega + \omega'}{2n}\right) = \lambda_1\left(p'\frac{\omega'}{n} + q'\frac{\omega}{n} + \frac{\omega'}{2n} + \frac{\omega}{2}\right)$$

moyennant  $p' = p$ ,  $q' = q - \frac{n-1}{2}$ , ce qui s'accorde avec le fait que  $\lambda_1(nz)$  s'est présenté sous la forme du produit de  $\lambda_1$  par une fraction où l'on passe d'un terme à l'autre par le simple changement de  $k$  en  $-k$ .

**32. Remarque.** — Les formules connues

$$\lambda(z, k) = \frac{1}{k} \lambda\left(kz, \frac{1}{k}\right),$$

$$\mu(z, k) = \nu\left(kz, \frac{1}{k}\right),$$

$$\nu(z, k) = \mu\left(kz, \frac{1}{k}\right)$$

donnent

$$\nu_1(z, k) = \mu_1\left(kz, \frac{1}{k}\right),$$

$$\mu_1(z, k) = \nu_1\left(kz, \frac{1}{k}\right),$$

$$\lambda_1(z, k) = i \lambda_1\left(kz, \frac{1}{k}\right).$$

D'après cela, quand on pose

$$\nu_1(nz) = f(\nu_1, \nu),$$

on a

$$\begin{aligned} \mu_1(nz) &= \nu_1\left(knz, \frac{1}{k}\right) = \nu_1\left(nkz, \frac{1}{k}\right) = f\left[\nu_1\left(kz, \frac{1}{k}\right), \nu\left(kz, \frac{1}{k}\right)\right] \\ &= f[\mu_1(z, k), \mu(z, k)] = f(\mu_1, \mu), \end{aligned}$$

et si l'on pose

$$\nu_1(nz) = \varphi(\nu_1, k^2),$$

on a

$$\mu_1(nz) = \varphi\left[\nu_1\left(kz, \frac{1}{k}\right), \frac{1}{k^2}\right] = \varphi\left(\mu_1, \frac{1}{k^2}\right).$$

Pareillement, si l'on pose

$$\nu(nz) = f(\nu, k'),$$

on a

$$\mu(nz) = f(\mu, -\eta'),$$

$\eta$  désignant le rapport  $\frac{k'}{k}$ ; car on a

$$\mu(nz, k) = \nu\left(knz, \frac{1}{k}\right) = f\left[\nu\left(kz, \frac{1}{k}\right), 1 - \frac{1}{k^2}\right] = f(\mu, -\eta').$$

Ajoutons que la formule

$$\nu(iz, k') = \frac{\nu(z, k)}{\mu(z, k)} = \frac{1}{\lambda\left(\frac{\omega}{4} + z, k\right)}$$

donne encore

$$\frac{1}{\lambda\left(\frac{\omega}{4} + nz, k\right)} = \nu(niz, k') = f[\nu(iz, k'), k^2] = f\left[\frac{1}{\lambda\left(\frac{\omega}{4} + z, k\right)}, k^2\right].$$



---

# RECHERCHES

SUR LES

## COMPOSÉS DU NIOBIUM ET DU TANTALE,

PAR M. A. JOLY,  
AGRÉGÉ PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE.

---

### INTRODUCTION.

Les belles recherches de M. Marignac sur les fluosels du niobium et du tantale l'ont conduit à indiquer un procédé de séparation de ces deux corps assez précis pour permettre d'obtenir les acides niobique et tantalique à l'état de pureté, de fixer définitivement leurs formules et leurs équivalents. Les formules des combinaisons oxygénées, des chlorures et fluorures tendraient à rapprocher le niobium et le tantale du vanadium, que les travaux de M. Roscoë ont permis de classer définitivement, par l'ensemble de ses propriétés chimiques, dans la série du phosphore, de l'arsenic et de l'antimoine. Est-ce là la place que devraient occuper ces deux métaux dans une classification naturelle?

Je me suis proposé d'étudier, au point de vue des analogies chimiques, un certain nombre de combinaisons, jusqu'ici peu connues, du niobium et du tantale, et de combler ainsi quelques lacunes que présente leur histoire.

Ces recherches sont actuellement poursuivies. Dans le présent travail, j'examinerai les combinaisons du niobium et du tantale avec l'azote et le carbone, quelques composés fluorés, enfin divers sels obtenus par voie sèche, dont l'étude pourra, je l'espère, jeter quelque jour sur la constitution si complexe des minéraux niobifères et tantalifères.

Un travail de ce genre exigeait des quantités notables de deux corps

très-rares et dont la préparation, à l'état de pureté, présente de grandes difficultés. M. H. Sainte-Claire Deville a mis à ma disposition, dans son laboratoire de l'École Normale, une riche collection de minéraux et des produits d'une grande pureté, préparés par lui, il y a quelques années, en vue de la détermination des densités de vapeur des chlorures niobique et tantalique. Qu'il me soit permis de le remercier ici des conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer et que son expérience de ces deux corps rares rendait si précieux.

Berzélius <sup>(1)</sup>, H. Rose <sup>(2)</sup> et M. Marignac <sup>(3)</sup> ont, au début de leurs études sur le niobium et le tantale, résumé les travaux de leurs devanciers. En 1869, M. Rammelsberg <sup>(4)</sup> a publié la monographie de ces deux métaux, en adoptant les formules et les interprétations du savant chimiste de Genève; cette monographie, je n'ai donc pas à la refaire ici. Malgré cela, l'histoire du niobium et du tantale, qui a passé depuis le commencement de ce siècle par des phases si diverses, est encore trop peu connue pour que je puisse me dispenser d'y revenir brièvement.

## I. — HISTORIQUE.

Quelques minéraux rares renferment, constamment associés, deux acides métalliques à très-forte densité, dont les propriétés chimiques présentent de si nombreuses analogies qu'ils ont été pendant longtemps confondus.

Dans un minéral d'Amérique (la *colombite*), Hatchett signala, en 1801, l'existence d'un nouveau métal, qu'il désigna sous le nom de *columbium*. Ekeberg, en 1802, trouva dans un minéral de Kimito, en Finlande (*tantalite*), et dans un minerai d'Ytterby (*yttrotantalite*) un métal qu'il crut nouveau, le *tantale*. Quelques années plus tard, Wollaston, en 1809, identifiait ces deux corps, et, lorsque Berzélius publia, en 1824, ses travaux sur l'acide extrait des tantalites de Suède, l'acide tantalique subsista seul.

---

(<sup>1</sup>) BERZÉLIUS, *Traité de Chimie*, 1846, t. II, p. 348.

(<sup>2</sup>) H. ROSE, *Pogg. Annalen*, t. LXIII, p. 317; *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XIII, p. 350 (1845).

(<sup>3</sup>) MARIGNAC, *Archives de Genève*, t. XXIII, p. 167 (1865).

(<sup>4</sup>) RAMMELSBURG, *Pogg. Annalen*, t. CXXXVI, p. 177 et 352.



Les minéraux de Suède et de Finlande renferment, nous le savons aujourd'hui, des mélanges variables d'acides niobique et tantalique, mais où ce dernier prédomine; aussi les propriétés assignées par Berzélius à l'acide étudié par lui diffèrent-elles peu de celles que l'on attribue à l'acide tantalique. Ce n'est que dans les dernières éditions de son *Traité de Chimie* qu'il décrit comme appartenant à l'acide tantalique quelques réactions de l'acide niobique, d'après les travaux de Wöhler. Ce dernier, en effet <sup>(1)</sup>, en 1838, signala dans le pyrochlore l'existence d'un acide qu'il crut être de l'acide tantalique; il obtenait, par l'action du chlore sur un mélange de cet acide et de charbon, deux chlorures, l'un jaune, l'autre blanc, et il essaya de prouver que la modification incolore était une combinaison du chlorure de tantale avec l'acide tantalique, c'est-à-dire un oxychlorure; or l'acide du pyrochlore est en réalité de l'acide niobique titanifère sans mélange d'acide tantalique <sup>(2)</sup>.

Les tantalites des diverses localités présentent des variations très-notables de densité; il en est de même des acides que l'on en extrait (niobite du Groënland,  $D = 5,37$ ; tantalite de Kimito,  $D = 7,85$ ). H. Rose, frappé de ces divergences, fut conduit à les étudier de plus près, et poursuivit, de 1844 à 1862, une longue série de recherches publiées aux *Annales de Poggendorff* <sup>(3)</sup>.

Il fut amené à distinguer dans ces minéraux :

L'acide *tantalique* d'Eckeberg et de Berzélius (tantalites de Suède et de Finlande),

et deux autres acides :

L'acide <i>niobique</i>	} mélangés en diverses proportions dans les tantalites (colombites) de l'Amérique du Nord et du Boden-
L'acide <i>pélopique</i>	
	mais, en Bavière;

le premier caractérisé par un chlorure blanc, le second par un chlorure jaune.

<sup>(1)</sup> WÖHLER, *Pogg. Annalen*, t. XLVIII, p. 83.

<sup>(2)</sup> RAMMELSBERG, *Pogg. Annalen*, t. CXLIV, p. 191.

<sup>(3)</sup> H. ROSE a résumé, dans son *Traité de Chimie analytique*, édition française, vol. I, ses travaux sur le niobium et le tantale.

Mais, remarquant bientôt que l'acide extrait du premier chlorure pouvait donner naissance au second et réciproquement, ces deux acides devinrent deux degrés d'oxydation différents d'un même métal, le *niobium* :

L'acide *niobique*,  $\text{NbO}^2$ , correspondant au chlorure jaune;

L'acide *hyponiobique*,  $\text{Nb}^2\text{O}^3$ , correspondant au chlorure blanc.

Ces deux acides, qui ont été étudiés comparativement par Rose avec le plus grand soin, offrent une similitude de propriétés chimiques que l'on est peu habitué à rencontrer chez deux oxydes différents d'un même métal <sup>(1)</sup>; il est impossible, en effet, de passer par oxydation de l'acide  $\text{Nb}^2\text{O}^3$  à l'acide niobique  $\text{NbO}^2$ , ou par chloruration du chlorure hyponiobique au chlorure niobique.

Berzélius avait donné à l'acide tantalique la formule  $\text{Ta}^2\text{O}^3$ . H. Rose, reprenant l'étude des tantalites de Suède et de Finlande, crut devoir adopter la formule  $\text{TaO}^3$  <sup>(2)</sup>. C'est l'isomorphisme supposé de l'acide tantalique et de l'acide stannique qui le conduisit à changer les formules de Berzélius; les tantalites des environs de Fahlun renferment, en effet, des quantités considérables de bioxyde d'étain.

Une tantalite de Finbo a donné à Berzélius :

Acide tantalique.....	66,99
Bioxyde d'étain.....	16,75

et un oxyde d'étain natif de la même localité :

Acide tantalique.....	12,22
Bioxyde d'étain.....	83,65

La coexistence de l'acide tantalique et de l'acide titanique  $\text{TiO}^2$  dans quelques minéraux s'expliquait ainsi facilement par une identité de composition <sup>(3)</sup>.

Quant à l'acide niobique, les analogies étroites qu'il présente avec

<sup>(1)</sup> « L'acide hyponiobique et l'acide niobique ne se comportent du reste, sous aucun rapport, comme deux degrés d'oxydation d'un même métal; ils se comportent plutôt comme les oxydes de deux métaux différents » (H. ROSE, *Chimie analytique*, t. I<sup>er</sup>, p. 331).

<sup>(2)</sup> H. ROSE, *Pogg. Annalen*, t. XCIX, p. 80.

<sup>(3)</sup> Quelques points de rapprochement avec l'acide antimonique firent songer un moment H. Rose à donner à l'acide tantalique la formule  $\text{Ta}^2\text{O}^3$ ; mais elle ne semblait point justifiée par l'analyse des tantalates (H. ROSE, *loc. cit.*).

l'acide tantalique lui firent attribuer la formule  $\text{NbO}^3$ . La composition de l'acide hyponiobique découle de l'analyse du chlorure correspondant, qui, si l'on donne au chlorure niobique la formule  $\text{NbCl}^2$ , doit se formuler  $\text{Nb}^3\text{Cl}^3$ . Suivant Rose, l'acide hyponiobique entrerait seul dans la composition des minéraux niobifères.

L'isomorphisme de la niobite et du wolfram constaté par G. Rose venait à l'appui de cette manière de voir; mais alors n'eût-il pas fallu attribuer également à l'acide tantalique une formule analogue à celle de l'acide tungstique? Ce dernier se rencontre presque toujours dans les tantalites; les tantalites de Brodbo, près Fahlun, en renferment 6 pour 100 (Berzélius); les wolframs de Zinnwald et de Limoges renferment fréquemment les acides niobique et tantalique.

Ce sont les différences de densités considérables que présentent les acides extraits des diverses tantalites qui ont amené H. Rose à soumettre ces acides à un nouvel examen. Il s'en faut de beaucoup pourtant que son acide hyponiobique présentât tous les caractères d'une matière unique; la densité varie, en effet, de 5,2 à 6,5 pour l'acide obtenu par la fusion au bisulfate de potasse.

En 1864, M. Marignac expliqua nettement la cause des singularités que présenteraient, suivant H. Rose, les deux degrés d'oxydation du niobium : l'acide niobique du chimiste allemand n'était qu'un mélange d'acides niobique et tantalique; quant à l'acide hyponiobique provenant de la décomposition par l'eau du chlorure blanc, c'est l'acide *niobique* pur.

L'étude chimique et cristallographique d'un grand nombre de fluosels avait permis à M. Marignac de mettre en évidence l'isomorphisme des fluosilicates, des fluostannates, des fluotitanates, des fluozirconates, et d'établir d'une façon définitive les formules de la silice et de la zircon; l'acide tungstique ne lui a fourni que des oxyfluorures; mais la comparaison de ces fluosels aux fluotitanates correspondants lui montra que, dans ces composés,  $\text{O}^2 = 16$  et  $\text{Fl} = 19$  pouvaient se remplacer comme éléments isomorphes <sup>(1)</sup>.

L'acide extrait de la niobite du Groënland <sup>(2)</sup> donne un fluorure

---

<sup>(1)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LXIX, p. 75.

<sup>(2)</sup> *Archives de Genève*, t. XXIII, p. 173.

*Ann. de l'Éc. Normale*. 2<sup>e</sup> Série. Tome VI. — AVRIL 1877.

isomorphe dans presque toutes ses combinaisons avec les fluorures alcalins ou métalliques, avec les fluorures titanique  $Ti^3Fl^4$ , stannique  $Sn^3Fl^4$  et l'oxyfluorure tungstique  $W^3O^4Fl^2$ . Si l'on compare, par exemple, les combinaisons de ces fluosels avec le fluorure de potassium, on trouve que, pour 2 équivalents de fluor combinés au potassium, le fluorure niobique en renferme 3; l'isomorphisme serait inexplicable si l'on n'admettait que c'est un oxyfluorure  $Nb^3O^3Fl^3$ . La formule de l'acide niobique devient alors  $Nb^3O^5$  et son équivalent  $Nb^3 = 94$ .

Si l'on fait cristalliser le fluoxyniobate de potasse  $2KFl, Nb^3O^3Fl^3$  dans l'acide fluorhydrique concentré, il donne le fluoniobate  $2KFl, Nb^3Fl^3$ .

Si l'on s'adresse, pour obtenir les fluosels précédents, à l'acide extrait des colombites de Haddam ou du Bodenmais, on obtient toujours, en même temps que le fluoxyniobate de potasse, un fluosel beaucoup moins soluble, et cela en proportion d'autant plus grande que la densité du minéral est plus élevée. C'est le fluotantalate de potasse, isomorphe du fluoniobate, et auquel il convient d'attribuer une formule analogue,  $2KFl, Ta^3Fl^3$ . La formule  $Ta^3O^5$  de l'acide tantalique se trouve en même temps fixée, ainsi que l'équivalent du tantale ( $Ta^3 = 182$ ). M. Marignac mettait ainsi en évidence, d'une façon très-nette, l'association constante de l'acide niobique et de l'acide tantalique dans les colombites ou tantalites (<sup>1</sup>), et le procédé dont il s'est servi est encore aujourd'hui le procédé le plus exact de séparation des deux acides (<sup>2</sup>).

Les recherches sur les chlorures de niobium, publiées à la même époque par MM. H. Sainte-Claire Deville et Troost, apportèrent une confirmation précieuse aux vues de M. Marignac (<sup>3</sup>).

La densité de vapeur du chlorure jaune s'accorde avec la formule

(<sup>1</sup>) Hermann avait constaté déjà la présence de l'acide tantalique dans certaines colombites, mais son procédé de séparation était imparfait. — Blomstrand, *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. CXXXV, p. 168 (1865), par la publication d'un travail achevé depuis deux ans, vint confirmer les principaux résultats annoncés par M. Marignac : le chlorure hyponiobique était un oxychlorure  $Nb^3Cl^3O^3$ . M. Blomstrand admit depuis l'interprétation de M. Marignac.

(<sup>2</sup>) MARIGNAC, *Archives de Genève*, t. XXV, p. 17 (1866).

(<sup>3</sup>) *Comptes rendus*, 12 juin 1865, t. LX, p. 1221.

$\text{Nb}^2\text{Cl}^5$ ; quant au chlorure blanc (chlorure hyponiobique de H. Rose), la densité de vapeur et les analyses lui assignent la composition d'un oxychlorure  $\text{Nb}^2\text{O}^2\text{Cl}^3$ . MM. H. Sainte-Claire Déville et Troost ont démontré synthétiquement la présence de l'oxygène dans ce composé, que l'on peut obtenir en faisant passer un grand nombre de fois le chlorure en vapeurs sur de l'acide niobique porté au rouge (').

Les acides extraits des deux chlorures présentent d'ailleurs des propriétés identiques.

La couleur, les points de fusion et d'ébullition ne permettent guère de distinguer le chlorure de tantale du chlorure jaune de niobium; sa densité de vapeur et les analyses effectuées par MM. Deville et Troost concordent parfaitement avec la formule  $\text{Ta}^2\text{Cl}^5$ . On n'a pas obtenu jusqu'ici d'oxychlorure de tantale.

Ainsi se trouve expliquée l'erreur de H. Rose. Par suite du mélange constant des acides niobique et tantalique, son chlorure jaune était un mélange, à proportions variables, des chlorures niobique et tantalique, dont les points de fusion et d'ébullition sont si voisins.

M. H. Deville a, en effet, déterminé les nombres suivants :

	Chlorures	
	niobique.	tantalique.
Points de fusion.....	194	203
Points d'ébullition.....	240,5	226

Quant à son chlorure hyponiobique (oxychlorure), volatil sans fusion vers 400 degrés et que l'on peut séparer facilement par distillation des chlorures précédents, il a pu lui fournir un acide pur, le véritable acide niobique. Les observations si complètes de H. Rose sur l'acide hyponiobique et ses principales combinaisons ne sont donc pas perdues pour la Science.

L'association constante des acides niobique et tantalique, la présence de l'acide titanique dans les minéraux niobifères et les procédés imparfaits de séparation employés avant M. Marignac ont permis d'expliquer les erreurs dans lesquelles sont tombés deux savants de grand mérite, MM. de Kobell et Hermann.

---

(') *Comptes rendus et Archives de Genève*, t. XXVIII, p. 166 (1867).

*Dianium*. — En 1860, M. de Kobell <sup>(1)</sup> remarqua que, si l'acide extrait d'un certain nombre de minéraux (columbites d'Amérique et du Groënland, œschynite, samarskite) donne, avec l'acide chlorhydrique et l'étain, la dissolution bleue obtenue par Wöhler avec l'acide extrait du pyrochlore, cette réaction ne se produit pas avec l'acide extrait des columbites du Bodenmais. Réservant donc pour l'acide extrait de ces dernières et étudié par Rose le nom d'*acide hyponiobique*, il proposa le nom d'*acide dianique* pour l'acide extrait des autres minéraux.

Hermann expliqua la particularité que présente l'acide niobique des columbites du Bodenmais par la présence d'une assez forte proportion d'acide tantalique; en séparant avec soin l'acide tantalique, l'acide métallique, ainsi purifié, se comporte exactement comme celui que l'on extrait des autres minéraux.

MM. H. Sainte-Claire Deville et Damour <sup>(2)</sup> ont également montré que, quelle que fût sa provenance, l'acide niobique pur donnait, avec le zinc et l'acide chlorhydrique, une coloration bleue.

L'œschynite, suivant les analyses de Marignac, est un niobotitanate de protoxyde de cérium, renfermant de la thorine, sans traces d'acide tantalique <sup>(3)</sup>.

*Ilménium*. — M. Hermann avait annoncé la présence dans un minéral de l'Oural (yttro-ilménite) d'un nouvel acide, l'acide ilménique, qu'il retrouva depuis dans la plupart des minéraux niobifères <sup>(4)</sup>. M. Marignac constata que les acides métalliques extraits des niobites de diverses provenances, et qui lui avaient servi dans ses recherches, ne renfermaient aucune trace de cet acide, et que les réactions indiquées comme caractéristiques de l'acide ilménique étaient dues au mélange de l'acide niobique avec les acides tantalique et titanique, par suite de l'imperfection des procédés de préparation employés <sup>(5)</sup>.

Il n'y aurait pas lieu d'insister davantage sur ce prétendu métal nouveau si M. Hermann n'avait publié sur ce sujet un très-long Mémoire

<sup>(1)</sup> *Journal für praktische Chemie*, t. LXXIX, p. 291; et t. LXXXIII, p. 193 et 449.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus*, t. LIII, p. 1044.

<sup>(3)</sup> MARIGNAC, *Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. XIII, p. 5.

<sup>(4)</sup> HERMANN, *Journal für praktische Chemie*, t. XXXVIII, p. 91 et 119.

<sup>(5)</sup> MARIGNAC, *Archives de Genève*, t. XXV, p. 5.

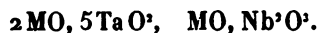
dans lequel il maintient l'existence de l'acide ilménique et reprend l'ancienne thèse de Rose sur les composés oxygénés du niobium <sup>(1)</sup>. M. Hermann se refuse à considérer le chlorure blanc de Rose comme un oxychlorure; il lui attribue la formule  $Nb'^2Cl^3$ . L'équivalent  $Nb'^2 = 114,3$  diffère peu de  $Nb^3O^2 = 110$ ; aussi la densité de vapeur calculée de son chlorure s'accorde-t-elle aussi bien avec la densité trouvée par MM. Deville et Troost qu'avec le nombre que l'on déduit de la formule  $Nb^3O^2Cl^3$  et de l'équivalent  $Nb^2 = 94$  :

Trouvé.	Calculé	
	d'après Marignac.	d'après Hermann.
7,87 — 7,89	7,48	7,64

Il n'en est plus de même pour le chlorure jaune  $Nb'Cl^3$ . Dans leur Mémoire *Sur les densités des vapeurs obtenues à des températures très-élevées* <sup>(2)</sup>, MM. H. Sainte-Claire Deville et Troost donnent comme densité du chlorure de niobium 10,9 et pour le chlorure de tantale 9,6. Mais il y a eu interversion dans les nombres : 9,6 représente la densité du chlorure niobique. Si l'on compare, avec M. Hermann, à ce nombre erroné la densité calculée de son chlorure (11,32), l'accord est satisfaisant; il y a désaccord visible si l'on prend comme terme de comparaison le nombre rectifié donné par M. Deville <sup>(3)</sup>; on a, en effet,

Trouvé.	Calculé	
	d'après Marignac.	d'après Hermann.
9,6	9,4	11,32

Traités par l'eau, ces deux chlorures donneraient naissance à deux composés oxygénés du niobium, l'acide *niobeux*  $Nb'^2O^3$ , l'acide *niobique*  $Nb'O^3$ ; à ces deux acides Hermann en joint un troisième, l'acide *hypo-niobique*  $Nb'O^2$ , qui se rencontrerait dans le ferro-ilménite, la samarskite, la fergusonite, l'oeschynite, le pyrochlore et l'euxénite. Il conserve à l'acide tantalique la formule  $TaO^2$ ; les niobites et tantalites, isomorphes pourtant, deviennent alors



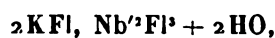
<sup>(1)</sup> HERMANN, *Journal für prakt. Chemie*, nouvelle série, t. III, p. 373; et t. IV, p. 178.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus*, t. LVI, p. 891.

<sup>(3)</sup> *Comptes rendus*, séance du 12 juin 1865.

L'ilménium ne donnerait qu'un chlorure jaune  $\text{Il}^2\text{Cl}^3$  ( $\text{Il}^2 = 104,75$ ), dont la densité de vapeur n'a pas été déterminée.

Les fluoxyniobates de M. Marignac seraient, d'après M. Hermann, des fluorures et même des mélanges de fluosels niobeux et ilménieux. Il existerait en effet, suivant lui, quatre sels de même forme cristalline :



Il est à remarquer que, si ces sels ont même forme cristalline, ils ont également des compositions centésimales bien voisines; ils présentent plutôt le caractère de sels incomplètement purifiés, souillés tantôt de fluosel tantalique, tantôt de fluosel titanique. Si l'on prend la moyenne des analyses données par Hermann et qu'on la compare au fluoxyniobate lamellaire, on a :

		Marignac (moyenne).
Acides métalliques.....	44,18	44,36
Potassium.....	25,15	25,92
Fluor.....	33,31	31,72
Eau.....	6,25	5,87

L'écart le plus considérable s'observe pour le fluor, dont les procédés de dosage sont si imparfaits.

Le procédé de séparation des acides niobique, tantalique et titanique par les fluosels ne peut donner que des résultats approchés, et ce n'est qu'après de nombreuses cristallisations, et quand on dispose de quantités de matières assez considérables pour qu'on puisse chaque fois en sacrifier une partie, que l'on peut espérer obtenir par l'analyse des nombres concordants.

Enfin, suivant M. Hermann, les fluoniobates n'existeraient point; ce seraient des fluosels niobeux acides. Le fluoniobate de potasse  $2\text{KFl}, \text{Nb}^2\text{Fl}^3$  deviendrait  $2\text{KFl}, \text{Nb}^2\text{Fl}^3 + 2\text{HFl}$ , et cela parce que 100 parties de ce sel ont perdu dans un creuset fermé à une température inférieure au rouge, 12,50 pour 100 d'acide fluorhydrique. La conclusion ne me semble pas légitime; le fluoniobate de potasse est peu stable, et l'on peut tout aussi bien dire que, par calcination à basse



température et sous l'influence de la vapeur d'eau,  $2\text{KFl}$ ,  $\text{Nb}^2\text{Fl}^3$  se transforme lentement en un fluoxyniobate,  $2\text{KFl}$ ,  $\text{Nb}^2\text{O}^2\text{Fl}^3$  avec perte de  $2\text{HFl}$ . La perte ainsi calculée s'élèverait à 13,11 pour 100.

La présence d'acide fluorhydrique libre dans ce composé ne peut d'ailleurs se concilier avec ce fait que, fondu avec un excès d'oxyde de plomb, il ne présente aucune perte de poids.

## II. — MINÉRAUX.

Les matières que j'ai eues à ma disposition, et qui m'ont fourni l'acide niobique dont je me suis servi dans le cours de cette étude, sont de deux sortes :

1° De l'oxychlorure de niobium cristallisé très-pur, préparé par M. H. Sainte-Claire Deville, il y a quelques années. Il avait été débarrassé par distillation de la petite quantité de chlorure jaune de niobium qui se produit simultanément, et qui pouvait renfermer un peu de chlorure de tantale. Sa décomposition par l'eau fournit un acide très-pur, et dans lequel on ne put constater la présence de l'acide tantalique.

2° Des minéraux niobifères de diverses provenances :

Niobite du Groënland..... ( $D = 5,37$ )

Niobite de Middleton..... ( $D = 5,68$ )

Niobite de Chanteloube..... ( $D = 5,6$  à  $5,7$ )

Ces minéraux ne différant pas de ceux qui ont été analysés par Mari-gnac, et pour lesquels il a déterminé la proportion d'acide tantalique, je n'ai pas cru devoir les étudier à nouveau.

A l'acide tantalique, que j'ai pu retirer du traitement des minéraux ci-dessus, est venu se joindre celui qui provenait :

1° De la décomposition par l'eau d'une petite quantité de chlorure de tantale fondu provenant des préparations de M. Deville ;

2° Du traitement d'une *tantalite* de Limoges, aujourd'hui très-rare, que je dois à l'obligeance de M. Damour, et d'une *yttrotantalite* de Kårarfvet.

La *tantalite* de Limoges a été décrite pour la première fois et analysée par M. Damour (1) ; mais les analyses publiées depuis par Jenzsch

---

(1) DAMOUR, *Annales des Mines*, t. XIII (1848).

et Chandler <sup>(1)</sup> montrent que ce minéral n'a pas une composition bien constante et indiquent la présence de la zircone. J'ai dû, avant d'en extraire les acides niobique et tantalique, m'assurer de la présence de ce corps. De plus, on n'a jamais jusqu'ici déterminé les proportions d'acide tantalique et niobique que renferme cette tantalite, et la densité (7,64-7,65) déterminée par M. Damour, si on la compare aux densités des tantalites de Finlande et de Suède analysées par Rammelsberg <sup>(2)</sup>, montre que ce minéral doit être un des plus riches en acide tantalique. La densité de l'échantillon que j'avais entre les mains est de 7,58.

L'analyse effectuée par la fusion au bisulfate de potasse, d'après les méthodes connues, donne

Acide tantalique.....	73,14
Acide niobique (titanifère).....	6,63
Acide stannique.....	2,85
Acide tungstique.....	traces
Zircone.....	0,85
Protoxyde de fer.....	14,97
Protoxyde de manganèse.....	1,56
	<hr/> 100,00

Je me suis borné à déterminer dans la liqueur qui ne renfermait plus que des oxydes de fer et de manganèse le rapport de ces deux oxydes. On a rapporté par le calcul à 100 de matière employée.

L'*yttrötantalite* de *Kårarfvet*, sur gangue, sans indices de cristallisation, très-impure, que j'ai eue à ma disposition en quantité beaucoup plus considérable, nécessitait une étude préliminaire. Elle m'avait été fournie sous le nom de *hjelmite*. La densité et la composition s'éloignent de celles qui ont été assignées à ce minéral par Nordenskjöld.

Ce dernier <sup>(3)</sup> lui attribue une densité de 5,82; les bases dominantes sont les protoxydes d'urane et de fer et l'yttria; l'eau y entre pour 3,26 pour 100; acides niobique et tantalique, 62,42; acides stannique et tungstique, 6,56.

Rammelsberg en a donné depuis une analyse qui s'éloigne nota-

---

<sup>(1)</sup> DANA, *Descriptiv. Mineralogy*, Londres, 1874, p. 515.

<sup>(2)</sup> RAMMELSBERG, *Pogg. Annalen*, t. CXLIV, p. 63.

<sup>(3)</sup> NORDENSKJÖLD, *Pogg. Annalen*, t. CXI, p. 287.

blement de la précédente ('). Elle renferme d'après lui, outre les oxÿdes signalés par Nordenskjöld et dans des proportions différentes,

Eau.....	4,57	
Acide tantalique.....	54,52	} 70,87
Acide niobique.....	16,35	
Acide stannique.....	4,60	} 4,88
Acide tungstique.....	0,28	

La densité est de 6,77, et il lui attribue la formule



Divers échantillons, pris arbitrairement parmi les matériaux que j'avais entre les mains, ont présenté des densités variables de 6,40 à 6,76, sans que je puisse affirmer, d'après les analyses de quelques échantillons très-riches en acide tantalique, que la densité ne s'élève pas au-dessus de ce dernier nombre.

Sans me préoccuper de donner ici les analyses complètes qui ne présentent qu'un intérêt très-minime, j'indiquerai seulement les teneurs extrêmes en acides métalliques et en eau :

	I.	II.	
Acide tantalique.....	} 66,04	65,99	} 74,02
Acide niobique.....		8,03	
Acide stannique.....	} 8,53	9,46	
Acide tungstique.....			
Eau.....	1,12	0,82	

Cette matière présente plutôt les caractères d'un mélange à proportions variables d'une tantalite et d'une yttrotantalite dont elle renferme tous les principes constituants. Je n'ai pu d'ailleurs y trouver ni acide titanique ni zircone.

### III. — EXTRACTION DES ACIDES.

Si, pour les analyses, l'attaque des minéraux niobifères par le bisulfate de potasse, indiquée par Berzélius, peut être difficilement rem-

(') RAMMELSBERG, *Deutsche Chemische Gesellschaft*, t. III, p. 947.

*Ann. de l'Éc. Normale. 2<sup>e</sup> Série. Tome VI. — AVRIL 1877.*

placée, il n'en est pas de même pour la préparation des acides métalliques.

M. H. Sainte-Claire Deville s'est servi, pour l'extraction de l'acide niobique des niobites, d'un procédé qui paraît peut-être plus complexe, mais qui, entre les mains d'un expérimentateur aussi habile, permettait d'arriver rapidement à un résultat précis. Le minéral finement pulvérisé, mélangé de charbon de sucre, est fortement calciné dans un creuset de charbon. Après traitement par l'acide chlorhydrique bouillant qui enlève l'étain, la majeure partie du fer et du manganèse, et par l'acide fluorhydrique étendu, on traite par le chlore sec dans un large tube de verre. L'oxychlorure de niobium peut aisément par distillations successives, dans le tube même, être séparé des autres chlorures plus volatils. On est certain, de cette façon, de s'être débarrassé du titane, avantage que ne présente pas l'attaque au bisulfate, suivie de la transformation en fluosels par la méthode de Marignac. L'étain est facilement éliminé; quant au tungstène, sa présence est signalée par son chlorure rouge, toujours d'ailleurs en très-faible quantité; il se trouve rejeté avec une petite quantité de chlorure de tantale et de niobium.

J'ai utilisé ce traitement au chlore gazeux pour l'attaque de la hjelmite, en le modifiant légèrement suivant le but différent qu'il s'agissait d'atteindre. Ici, en effet, l'acide tantalique domine et la séparation du chlorure tantalique d'une petite quantité d'oxychlorure de niobium présenterait de grandes difficultés.

Le minerai en poudre très-fine est intimement mélangé avec  $\frac{1}{6}$  de son poids de carbonate de soude sec et  $\frac{1}{8}$  de charbon de sucre; le tout est calciné pendant cinq à six heures dans un creuset de charbon de cornue à la température des essais de fer; on opérait chaque fois sur 150 à 200 grammes de hjelmite. On transforme les acides niobique, tantalique et titanique, comme je le montrerai plus loin, en un mélange d'azoture et de carbure. En reprenant par l'acide chlorhydrique concentré et bouillant la masse fortement agglomérée et semi-fondue, on enlève l'étain, le fer et la chaux, du moins en grande partie, ainsi qu'une petite quantité d'yttria. Une purification complète pourrait être obtenue par l'acide chlorhydrique gazeux agissant sur le résidu insoluble du premier traitement, mais cela ne présente aucun intérêt dans le cas actuel.

La matière, réduite ainsi à un très-petit volume et bien sèche, est attaquée par le chlore gazeux dans un large tube en verre de Bohême présentant plusieurs étranglements, en évitant d'élever la température au-dessus de celle qui est nécessaire pour la volatilisation des chlorures métalliques. Il ne se produit en général ici que des traces d'oxychlorure niobique; par déplacements successifs, on amène dans la dernière portion renflée du tube une petite quantité de chlorure de fer, d'oxychlorure rouge de tungstène et de chlorures niobique et tantalique entraînés. Quant aux chlorures d'étain, de titane et de silicium, beaucoup plus volatils, ils sont entraînés par le courant gazeux sous l'influence d'une légère élévation de température.

Dans la partie du tube où la matière avait été placée, on trouve une masse saline fondue empâtant une petite quantité de matière inattaquée et un résidu charbonneux très-divisé, que l'on sépare en reprenant par l'eau bouillante acidulée d'acide chlorhydrique. La dissolution renferme des chlorures d'uranium et de manganèse, et des chlorures ou oxychlorures d'yttrium et des métaux de la célite.

Les chlorures de niobium et de tantale sont décomposés par l'eau; la liqueur décantée est remplacée par de l'eau pure, à deux ou trois reprises. La dernière eau de lavage qui surnage les acides est neutralisée par l'ammoniaque et abandonnée à l'étuve jusqu'à ce que toute odeur ammoniacale ait disparu; on reçoit sur un filtre l'ensemble des acides précipités; ils sont, en général, très-purs. Si l'on craignait la présence d'une petite quantité de fer ou de tungstène, on s'en débarrasserait en fondant les acides calcinés avec six fois leur poids d'un mélange à parties égales de soufre et de carbonate de soude, d'après les méthodes connues.

Quant aux liqueurs acides provenant de la décomposition par l'eau des chlorures et des lavages successifs, elles renferment une assez forte proportion d'acides métalliques que l'on peut précipiter complètement par l'ammoniaque. J'ai préféré m'appuyer sur une réaction qui n'avait pas été indiquée jusqu'ici : les acides niobique et tantalique, en solution chlorhydrique très-étendue, sont complètement précipités par l'acide sulfureux, surtout si l'on élève la température vers 70 ou 80 degrés. On obtient ainsi un précipité volumineux qui paraît être une combinaison de ces acides avec l'acide sulfureux. Le précipité peut

être aisément lavé avec de l'eau chargée d'acide sulfureux sans craindre qu'il passe à travers les filtres, avec cette précaution pourtant de ne pas interrompre les lavages ; autrement, il se produit du sulfate d'acide niobique ou tantalique, qui colle les filtres et rend toute filtration impossible. Par l'emploi de l'acide sulfureux, on évite la précipitation d'une petite quantité de fer que renferment les liqueurs acides et les eaux de lavage.

Ce traitement par le chlore paraîtra plus compliqué que l'attaque au bisulfate, quoique, dans ce dernier procédé, les lavages de quantités un peu considérables des sulfates d'acide niobique et tantalique soient longs et pénibles. Mais il a l'avantage de permettre de suivre toutes les phases de la préparation, et de voir nettement, lorsqu'il s'agit du traitement de matières aussi complexes que les yttrotantalites, les différentes impuretés qu'il s'agit d'éliminer. De plus, des matières aussi précieuses que l'yttria et les oxydes de la célite peuvent être aisément recueillies.

Les acides métalliques hydratés ainsi obtenus sont dans les meilleures conditions pour être dissous dans l'acide fluorhydrique ; pour la séparation des acides niobique et tantalique, je me suis strictement conformé aux prescriptions si nettes de M. Marignac, et les fluosels obtenus ont été purifiés par de nombreuses cristallisations.

J'ai adopté, dans le cours de cette étude, pour équivalent du niobium le nombre donné par M. Marignac ( $Nb^2 = 94$ ). L'analyse de deux échantillons du *fluoxyniobate de potasse lamellaire*, obtenus par le traitement de tous les acides métalliques qui ne provenaient pas de la décomposition par l'eau de l'oxychlorure, montre que ce nombre peut être admis.

En prenant pour formule du fluosel  $Nb^2 O^3 Fl^3, 2 K Fl + 2 Aq$ , on a

	Calculé.		Trouvé.		Marignac (moyenne).
			I.	II.	
Nb <sup>2</sup> .....	94	31,23	31,20	31,17	31,12
2K.....	78	25,91	25,70	25,73	25,92
5Fl.....	95	31,56	»	»	31,72
2O.....	16	5,32	»	»	»
2Aq.....	18	5,98	5,78	5,81	5,87
	301	100,00			
Nb <sup>2</sup> O <sup>3</sup> .....	134	44,52	44,48	44,44	44,36
2KO, SO <sup>3</sup> ...	174	57,82	57,24	57,39	57,82

Pour le tantale, j'ai admis également l'équivalent de M. Marignac  $Ta^2 = 182$ . Les analyses effectuées à plusieurs reprises sur des fluotantalates de potasse purifiés par de nombreuses cristallisations s'accordent très-sensiblement avec ce nombre. D'ailleurs, c'est ce même équivalent que l'on retrouverait en admettant pour le fluoxytantalate d'ammoniaque cubique une formule analogue au fluosel correspondant du niobium,  $3 AzH^4 Fl$ ,  $Ta^2 O^2 Fl^3$ , comme je le montrerai plus loin.

---

## CHAPITRE PREMIER.

### ESSAIS DE RÉDUCTION DU NIOBIUM ET DU TANTALE. CARBURES. AZOTURES.

---

On a vainement essayé jusqu'ici de préparer le niobium et le tantale métalliques; néanmoins les diverses tentatives faites dans ce but ont conduit à des résultats intéressants.

Nous savons aujourd'hui, d'après les travaux de M. Marignac <sup>(1)</sup>, que Rose, en réduisant par le sodium le fluoxyniobate de potasse, n'a pu obtenir que l'oxyde inférieur  $Nb^2 O^2$ . En substituant le fluoniobate au fluoxyniobate, le savant chimiste de Genève obtint une poudre noire qui, par grillage, se transformait en acide niobique en absorbant de 35 à 38 pour 100 d'oxygène; le niobium pur devrait en absorber 42,5 pour 100. La matière renferme, en effet, de 0,9 à 1,05 d'hydrogène et correspond à un hydrure solide  $Nb^2 H$ , provenant vraisemblablement de la décomposition par l'eau d'un alliage avec le sodium, pendant les lavages de la masse saline provenant de la réaction.

La réduction par l'aluminium des fluoniobates et fluotantalates de potasse donne des alliages cristallisés,  $Nb Al^3$ ,  $Ta Al^3$ .

Il est probable que la réduction par le sodium du fluotantalate de potasse exécutée par Berzélius et H. Rose ne leur a également donné qu'un hydrure.

En 1868, M. H. Sainte-Claire Deville <sup>(2)</sup>, essayant de réduire l'acide

---

<sup>(1)</sup> MARIGNAC, *Archives de Genève*, t. XXXI, p. 89.

<sup>(2)</sup> H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE, *Comptes rendus*, t. LXVI, p. 180.

niobique par un mélange de carbonate de soude et de charbon dans un creuset de charbon à 1200 degrés, constata la production d'une matière cristallisée qui, fondue avec de la potasse, dégageait de l'ammoniaque. Le niobium se comporte donc, vis-à-vis de l'azote, comme le titane, qui, d'après les recherches de MM. Wöhler et Deville (<sup>1</sup>), absorbe si facilement l'azote de l'air qui traverse au rouge les parois des creusets ou les traces de ce gaz laissées dans les appareils.

En répétant cette expérience dans des circonstances variées et à des températures différentes, j'ai constaté que, toutes les fois que l'acide niobique et l'acide tantalique se trouvent portés à une haute température en présence du carbone, ce dernier élément se combinait également avec le niobium et le tantale.

#### I. — AZOTO-CARBURES ET CARBURE DE NIOBIUM.

On a opéré le plus souvent sur un mélange intime d'acide niobique, de carbonate de soude pur et de charbon de sucre dans les proportions suivantes :

Acide niobique.....	4 parties.
Charbon de sucre.....	1 »
Carbonate de soude sec.....	1 »

La substitution du carbonate de potasse au carbonate de soude donne de moins bons résultats. La masse fond plus facilement, s'imprègne dans les creusets qui se fendillent; on perd une quantité notable de matière et les produits obtenus restent fortement imprégnés de cyanure alcalin. Il est préférable d'employer un niobate acide,  $\text{KO}, 3\text{Nb}^2\text{O}^5$ , obtenu en faisant bouillir une dissolution de fluoxyniobate avec du bicarbonate de potasse, lavant le précipité et calcinant.

La matière est placée dans un creuset de charbon de cornue enveloppé d'un ou deux creusets de plumbagine, suivant la température et la durée de chauffe. On a opéré à des températures comprises entre la température de fusion de la fonte et la température de fusion du nickel, soutenue pendant six à sept heures dans un grand fourneau à

---

(<sup>1</sup>) WÖHLER et H. DEVILLE, *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LII.



vent, alimenté avec du coke de cornue dont la combustion est activée par un ventilateur à vapeur.

Il est nécessaire le plus souvent de purifier les produits avant de les soumettre à l'analyse. Après pulvérisation, ils sont mis en digestion à la température ordinaire avec de l'acide sulfurique concentré, puis avec de l'acide étendu de son volume d'eau à 50 ou 60 degrés; on traite par l'eau chaude jusqu'à ce que les eaux de lavage ne présentent plus de réaction acide. On enlève ainsi de petites quantités d'alcalis. La matière séchée à basse température peut être ensuite traitée par HCl gazeux, au rouge sombre, dans un tube de verre : l'eau enlève des traces de chlorures alcalins; mais cette dernière purification est à peine nécessaire.

Traités par le chlore, les divers produits ainsi purifiés donnent du chlorure de niobium sans traces d'oxychlorure, ce qui montre que l'oxygène a été complètement expulsé. Il se forme en même temps une petite quantité de sesquichlorure de carbone, et le résidu de l'opération est du charbon très-divisé.

Le grillage à l'air ou dans l'oxygène se fait avec incandescence et donne un acide niobique volumineux; l'oxydation est d'autant plus rapide que la matière est plus riche en azote; les carbures cristallisés obtenus aux températures élevées ne brûlent que très-difficilement dans l'oxygène.

Chauffée avec les oxydes de cuivre ou de plomb, ils les réduisent avec un dégagement de chaleur considérable; l'oxyde de cuivre très-divisé est réduit avec une telle vivacité que le cuivre est projeté en gouttelettes fondues sur les parois du tube. C'est en mélangeant les matières avec un grand excès d'oxyde qu'on a effectué les dosages d'azote.

La détermination du carbone et du métal (calculé d'après le poids d'acide) (') se fait par oxydation dans un courant d'oxygène sec et dépouillé d'acide carbonique. La matière est placée dans une nacelle de platine à la partie antérieure d'un tube de verre de Bohême de 50 à 60 centimètres de long; les gaz traversent ensuite une colonne d'oxyde de cuivre, puis du cuivre porté au rouge. L'acide carbonique

---

(') 100 d'acide correspondent à 70,15 pour 100 de niobium.

desséché par son passage sur du chlorure de calcium est recueilli dans des tubes à potasse.

La proportion de carbone va en augmentant à mesure que le produit a été obtenu à une température plus élevée; il en est de même pour le métal.

Les résultats fournis par l'analyse peuvent être facilement interprétés en admettant que l'on a affaire à des mélanges d'un azoture  $Nb^2 Az$  et d'un carbure  $Nb^2 C^2$ , dont la composition serait représentée par les nombres suivants :

	$Nb^2 Az.$		$Nb^2 C^2.$
Niobium.....	87,04	Niobium.....	88,68
Azote.....	12,96	Carbone.....	11,32
	<hr/> 100,00		<hr/> 100,00

La méthode que j'ai dû employer pour la préparation de ces azotocarbures et carbures rend inévitable la présence d'une petite quantité d'alcali, que l'on peut déterminer en fondant avec du bisulfate d'ammoniaque, soit le résultat du grillage, soit la matière primitive.

Je décrirai quelques-uns de ces produits, en insistant particulièrement sur le carbure cristallisé  $Nb^2 C^2$  obtenu à la température de fusion du nickel.

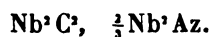
1° *Matière obtenue à la température de fusion de l'acier.* — Masse cristalline de couleur olive :

- I. 0,902 ont donné par combustion dans l'oxygène 1,127 d'acide et 0,2295 d'acide carbonique équivalant à  $C = 0,0625 = 6,92$  pour 100.
- II. 0,861, brûlés par l'oxyde de cuivre, ont laissé dégager 34 centimètres cubes à zéro et sous la pression de 0,760, soit  $Az = 0,04275$ .
- III. 1,217 de matière provenant d'une préparation différente ont fourni 1,518 d'acide.
- IV. L'acide provenant de la combustion de la matière I renferme 0,004 de soude, ce qui correspond à 0,73 pour 100 de cyanure de sodium.

Cette correction effectuée, on trouve pour le rapport des équivalents de carbone et d'azote

$$\frac{5666}{3564} = 1,59.$$

La composition de ce produit s'écarte peu de



On a, en effet,

	Trouvé.			Calculé.
Nb <sup>2</sup> .....	87,98	»	87,82	88,01
C.....	6,80	»	»	6,74
Az.....	»	4,99	»	5,25

2° *Produit obtenu à la même température, un peu moins longtemps soutenue.*

- I. Dans l'oxygène, on obtient avec 0<sup>r</sup>,727 de matière finement pulvérisée 0,903 d'acide et 0,177 d'acide carbonique, correspondant à 0,0482 de carbone.
- II. 0,914 ont donné 38 centimètres cubes d'azote à zéro et sous la pression de 760 millimètres, soit Az = 0,048.

La matière renferme un peu plus de cyanure que la précédente (0,97 pour 100). En effectuant les corrections, on a

Nb <sup>2</sup> .....	87,53	
C.....	6,44	
Az.....	»	5,08

Cette matière diffère peu de la précédente. Elle semble pourtant renfermer un peu moins de carbone. Le nombre trouvé pour l'azote est presque identique; mais le dosage en volume sur un poids de matière peu considérable et une quantité d'azote aussi faible présente peu de certitude.

La formule Nb<sup>2</sup>C<sup>2</sup>,  $\frac{4}{3}$ Nb<sup>2</sup>Az exigerait

Nb <sup>2</sup> .....	87,94
C.....	6,24
Az.....	5,82
	<hr/> 100,00

3° *Obtenu à la température de fusion du nickel.* — Longues aiguilles très-fines douées d'un grand éclat. Couleur violacée. Cette matière a été obtenue au moyen du niobate acide de potasse KO, 3Nb<sup>2</sup>O<sup>5</sup>.

Les cristaux ont été pulvérisés et purifiés avec le plus grand soin par l'acide sulfurique, comme je l'ai indiqué plus haut.

I. 0,619 par grillage dans un creuset de platine à la flamme du bec Bunsen ont donné 0,782 d'acide; soit  $Nb' = 0,5486 = 88,62$  pour 100.

II. 0,3395 brûlés dans l'oxygène ont donné 0,429 d'acide; soit

$$Nb' = 0,301 = 88,65 \text{ pour } 100.$$

On a recueilli en même temps 0,141 d'acide carbonique correspondant à 0,0385 de carbone = 11,34 pour 100.

Ces nombres ne diffèrent pas de ceux qui correspondent au carbure  $Nb^2C^3$ . On a en effet

	Trouvé.		Calculé.
Nb'.....	88,62	88,65	88,68
C.....	»	11,34	11,32
		99,99	100,00

L'analyse faite sur les cristaux non purifiés m'avait conduit à des résultats bien différents.

I. 0,956 par combustion dans l'oxygène donnèrent 1,197 d'acide et 0,374 d'acide carbonique.

II. Par combustion avec l'oxyde de cuivre, 0,9145 n'ont donné que 3<sup>cc</sup>,6 d'azote à 15 degrés et 758 millimètres, soit  $Az = 0,0043 = 0,47$  pour 100.

III. En reprenant par le bisulfate d'ammoniaque l'acide de l'opération I, on en a retiré 0,033 de sulfate de potasse; soit pour la potasse 0,0178. Ce poids de potasse correspond à 0,0246 de cyanure de potassium renfermant 0,005 d'azote = 0,52 pour 100 de la matière analysée. Le dosage direct d'azote a donné 0,47.

L'azote trouvé par la combustion avec l'oxyde de cuivre provenait donc du cyanure mélangé; et, si l'on fait cette correction, on trouve pour le niobium le nombre 88,78, identique à celui que l'on a obtenu avec la matière purifiée.

L'action prolongée du cyanhydrate d'ammoniaque, au rouge vif, sur l'acide niobique donne des produits qui, par leur aspect extérieur, rappellent ceux que l'on obtient dans un creuset de charbon à la température de fusion du fer. Mais la transformation de l'acide est loin d'être complète; par l'attaque au chlore on obtient en effet un mélange de chlorure et d'oxychlorure, et, outre du charbon très-divisé, il reste

un résidu d'oxyde noir de niobium. De plus, la décomposition du cyanhydrate à la température élevée à laquelle la réduction se produit doit laisser la matière mélangée de charbon en quantité d'autant plus considérable que la température est plus élevée et que l'opération a duré plus longtemps.

Enfin la réduction, par un mélange de carbonate de soude et de charbon, des niobites du Groënland et de Chanteloube permet d'obtenir des carbures ou azotocarbures de niobium très-nettement cristallisés. Les cristaux se trouvent disséminés dans une masse demi-fondue, dans une fonte manganésifère renfermant une petite quantité d'étain. Le culot attaqué à plusieurs reprises par l'acide chlorhydrique bouillant permet d'isoler la matière cristalline; les produits varient suivant le niobite employé.

## II. — AZOTO-CARBURES ET CARBURE DE TANTALE.

L'acide tantalique réduit, dans les mêmes conditions que l'acide niobique, par un mélange de carbonate de soude et de charbon, dans un creuset de charbon, donne lieu également à des mélanges d'azoture et de carbure.

La carburation du tantale paraît cependant beaucoup plus facile que celle du niobium.

Le mélange suivant est celui qui a donné les résultats les plus nets:

Acide tantalique.....	6
Carbonate de soude fondu.....	1
Charbon de sucre.....	1

On peut lui substituer simplement du tantalate neutre de potasse  $\text{KO}, \text{Ta}^2\text{O}^5$ .

Comme la proportion d'alcali employée est beaucoup plus faible que lorsqu'il s'agit de réduire l'acide niobique, les produits obtenus ne renferment que des traces de cyanure alcalin.

L'analyse a été faite par les méthodes précédemment indiquées; les matières ne renferment que très-peu d'azote; ne possédant qu'une petite quantité de produits, cet élément n'a pas été dosé directement.

Les azoture et carbure de tantale purs renfermeraient :

	Azoture $Ta^2Az$ .			Carbure $Ta^2C^2$ .	
$Ta^2$ .....	182	92,86	$Ta^2$ .....	182	93,82
Az.....	14	7,14	$C^2$ .....	12	6,18
	<u>196</u>	<u>100,00</u>		<u>194</u>	<u>100,00</u>

1° *Produit obtenu à la température de fusion de l'acier.* — Cristallin. Couleur bronze plus claire que pour le produit obtenu avec le niobium à la même température.

I. 0<sup>gr</sup>,4755 par combustion dans l'oxygène ont donné 0,542 d'acide tantalique <sup>(1)</sup>; soit  $Ta^2 = 0,4443 = 93,43$  pour 100.

On a recueilli en même temps 0<sup>gr</sup>,102 d'acide carbonique  $C = 0,0278 = 5,84$  pour 100.

II. 0,646 par combustion, à l'air, dans un creuset de platine ont fourni 0,736 d'acide tantalique :

$$Ta^2 = 0,603 = 93,40 \text{ pour } 100.$$

Ce produit diffère peu du mélange  $Ta^2C^2 + \frac{1}{2}Ta^2Az$ .

On a en effet

	Trouvé.		Calcul <sup>2</sup> .
Tantale.....	93,43	93,40	93,72
Carbone.....	5,84		5,58
Azote (p. d.).....	0,73		0,70
	<u>100,00</u>		<u>100,00</u>

2° *Carbure obtenu à la température de fusion du nickel.* — Jaune de laiton. Longues aiguilles très-fines et douées d'un grand éclat.

La matière brûle difficilement dans l'oxygène, ce qui ne permet pas de déterminer le carbone par la méthode précédemment indiquée.

La matière finement pulvérisée est traitée par l'acide sulfurique concentré à froid et par l'acide étendu à la température de 50 degrés; la liqueur ne renferme pas de sulfate alcalin. Le traitement par l'acide chlorhydrique gazeux au rouge sombre reste également sans résultat.

<sup>(1)</sup> 100 grammes d'acide tantalique correspondent à 81,98 de tantale.

Par grillage au moufle, 0<sup>gr</sup>,475 de matière donnent 0,543 d'acide tantalique :

$$\text{Ta}^2 = 0,445 = 93,71 \text{ pour } 100.$$

0<sup>gr</sup>,817 donnent 0,937 d'acide :

$$\text{Ta}^2 = 0,758 = 94,00.$$

La moyenne de ces nombres est 93,85.

Le carbure  $\text{Ta}^2\text{C}^2$  correspond à 93,82 pour 100 de tantale.

On obtient une matière d'un beau jaune de laiton, mais beaucoup mieux cristallisée, en réduisant à la température, de fusion du nickel le tantalite de Limoges, en poudre très-fine, par le carbonate de soude, dans un creuset de charbon. Il reste un culot de fonte très-dure, cassante, qui n'est que très-lentement attaqué par l'acide chlorhydrique bouillant; à mesure que le fer se dissout, on voit apparaître de longues aiguilles très-denses. Examinées au microscope, elles se montrent composées d'octaèdres; mais les cristaux sont trop petits pour qu'ils puissent être mesurés.

Si les cristaux sont plus nets, la matière est impure; elle retient en effet du fer et du manganèse dont on ne peut la débarrasser complètement; elle renferme en outre du carbure de niobium.

J'ai vérifié directement que l'azoture noir de tantale  $\text{Ta}^2\text{Az}$ , chauffé dans un creuset de charbon à la température de fusion de l'acier, se transformait partiellement en carbure. Partout où la matière avait le contact du charbon, elle a pris la couleur jaune de laiton du carbure de tantale. La matière renfermait 3,93 pour 100 de carbone.

Enfin j'ajouterai que le même produit paraît avoir été obtenu par Berzélius en chauffant l'acide tantalique dans un petit creuset de charbon. Il constata que la masse fortement agglomérée et noire à l'intérieur avait, au contact du charbon, la couleur du laiton; il crut avoir obtenu ainsi du tantale métallique.

### III. — AZOTURES DE TANTALE ET DE NIOBIUM.

J'ai admis précédemment l'existence d'azotures de formules  $\text{Ta}^2\text{Az}$ ,  $\text{Nb}^2\text{Az}$  qui jusqu'ici n'ont pas été décrits.

Ces azotures s'obtiennent par l'action de l'ammoniaque sur le chlorure correspondant ou sur l'acide.

H. Rose avait constaté (<sup>1</sup>), en faisant réagir l'ammoniaque sur les chlorures de niobium et de tantale, la production d'une matière noire qu'il regarda tout d'abord comme du niobium et du tantale métalliques. Mais, lorsque Wöhler eut montré que les cristaux cubiques des hauts-fourneaux, considérés jusque-là comme du titane métallique, renfermaient de l'azote, Rose reprit l'étude des produits obtenus par lui et constata qu'ils dégageaient de l'ammoniaque par la fusion avec la potasse; il avait donc préparé ainsi des azotures; il n'en détermina pas la composition.

*Azoture Ta<sup>6</sup>Az<sup>5</sup>.* — En étudiant l'action de l'ammoniaque sur le chlorure de tantale, j'ai obtenu deux azotures.

Le chlorure de tantale préparé dans un tube en verre de Bohême, par l'action du chlore sur un mélange d'acide tantalique pur et de charbon de sucre fortement calciné, a été déplacé trois fois dans le tube même, afin de s'assurer qu'il ne renfermait pas d'oxychlorure niobique et de le débarrasser d'une petite quantité de chlorure de silicium formé aux dépens du verre. Le tube renfermant le chlorure de tantale est introduit rapidement, après qu'on en a ouvert les deux bouts, dans un tube de verre plus large préalablement bien desséché. L'ammoniaque est lentement absorbée à la température ordinaire; mais, à l'approche de quelques charbons, une réaction très-vive se produit et du chlorhydrate d'ammoniaque se volatilise. La matière gonfle et prend une couleur jaune d'or. Si l'on continue à faire passer l'ammoniaque pendant plusieurs heures, de façon à compléter la réaction et à volatiliser le chlorhydrate d'ammoniaque, le tube se trouve rempli d'une matière amorphe rouge foncé, très-volumineuse. Dans les parties du tube où la couche est très-mince, sa couleur est d'un beau rouge de cuivre, bleue par transparence.

Analysée à cet état, elle est loin de présenter une composition bien constante; elle renferme encore du chlorhydrate d'ammoniaque, des traces de chlorure de tantale qui s'est trouvé soustrait à l'action de

---

(<sup>1</sup>) H. Rose, *Pogg. Annalen*, t. CVI, p. 141; et t. C, p. 146.



l'ammoniaque par l'azoture formé à sa surface, d'autant plus qu'on a employé du chlorure de tantale plus compacte.

La matière pulvérisée rapidement est de nouveau soumise à l'action d'un courant de gaz ammoniac parfaitement sec, dans un tube de verre, au rouge sombre, jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de constater trace de volatilisation du sel ammoniac; on laisse refroidir dans le courant de gaz.

La matière se présente alors sous la forme d'une poudre amorphe d'un rouge vif. Fondue avec de la potasse, elle dégage de l'ammoniaque. Chauffée à l'air sur une lame de platine, elle se transforme rapidement avec incandescence en acide tantalique. Elle réduit l'oxyde de cuivre à une température peu élevée, en dégageant de l'azote. Le dosage de ce dernier élément a été fait en chauffant la matière avec un grand excès d'oxyde de cuivre, comme pour une analyse organique.

I. 0,435 ont donné par grillage 0,472 d'acide tantalique, soit

$$\text{Ta}^2 = 0,387 = 88,84 \text{ pour } 100.$$

0<sup>re</sup>, 689 brûlé par l'oxyde de cuivre ont dégagé 63 centimètres cubes d'azote à 12 degrés et 757<sup>mm</sup>,5 de pression, soit en poids 0<sup>e</sup>, 076 = 11,03 pour 100.

II. 0,364 par grillage ont donné 0,395 d'acide correspondant à

$$\text{Ta}^2 = 0,324 = 88,93 \text{ pour } 100.$$

0<sup>e</sup>, 3555 ont fourni 0,386 d'acide

$$\text{Ta}^2 = 0,316 = 89,01.$$

	I.		II.	
Tantale.....	88,84	»	88,93	89,01
Azote.....	»	11,03		

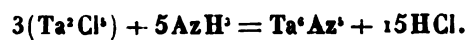
Dans l'analyse I, le rapport des équivalents d'azote et de tantale

$$(\text{Ta}^2) \text{ est } \frac{78,18}{48,81} = 1,614, \text{ soit } \frac{5}{3}.$$

La formule  $\text{Ta}^2\text{Az}^3$  exigerait

Ta <sup>2</sup> .....	88,63
Az <sup>3</sup> .....	11,37
	<hr/> 100,00

Cet azoture résulterait de la réaction



L'excès de tantale observé dans l'analyse II doit être attribué à une perte d'azote. A une température peu supérieure à celle où l'on volatilise le chlorhydrate d'ammoniaque, cet azoture éprouve déjà une perte sensible, noircit et donne un composé moins riche en azote.

*Azoture, Ta<sup>2</sup>Az.* — La matière précédente, chauffée au rouge vif dans un courant de gaz ammoniac parfaitement sec, pendant six à sept heures, perd les  $\frac{2}{3}$  de l'azote qu'elle contient. On obtient ainsi une poudre amorphe, de couleur noire, inattaquable par tous les acides, excepté par un mélange d'acide nitrique et d'acide fluorhydrique.

100 parties d'azoture Ta<sup>6</sup>Az<sup>5</sup> ont donné 95,65 de ce nouveau produit; la transformation en azoture Ta<sup>2</sup>Az exigerait 95,51.

L'analyse ne laisse d'ailleurs aucun doute, quoiqu'elle accuse un excès d'azote, indiquant que la transformation n'a pas été complète.

0<sup>gr</sup>, 507 donnent par grillage 0,564 d'acide tantalique, soit

$$\text{Ta}^2 = 0,464 = 91,52 \text{ pour } 100.$$

0,898 dégagent par combustion avec de l'oxyde de cuivre 57<sup>cc</sup>, 5 d'azote à 14 degrés et 758<sup>mm</sup>, 3 de pression, ou en poids 0,0686 = 7,64 pour 100.

Le rapport des équivalents d'azote et de tantale est  $\frac{54,57}{50,24} = 1,08$ .

La formule Ta<sup>2</sup>Az exigerait

Tantale.....	92,86
Azote.....	7,14
	<hr/>
	100,00

Cette transformation de l'azoture rouge en azoture noir sous l'action de l'ammoniaque présente une très-grande difficulté. La présence d'une petite quantité d'air ou de vapeur d'eau laissée dans les appareils suffit pour troubler le résultat final; l'acide tantalique n'est pas en effet réductible en azoture par l'ammoniaque, comme les acides niobique et titanique.

C'est certainement un mélange des deux azotures précédemment décrits que H. Rose avait obtenus; car la température à laquelle il opérerait, dans un tube de verre, trop élevée pour ne pas décomposer en

partie l'azoture  $Ta^6Az^5$ , n'était pas suffisante pour le transformer entièrement en azoture noir  $Ta^2Az$ .

Par suite des difficultés que l'on rencontre à se procurer du chlorure de niobium exempt d'oxychlorure, j'ai étudié uniquement l'action de l'ammoniaque sur le chlorure de tantale; mais les analogies si étroites entre le niobium et le tantale signalées par M. Marignac, et que j'ai été à même de vérifier bien souvent, permettent de prévoir que les deux chlorures doivent se comporter vis-à-vis de l'ammoniaque d'une manière identique.

Cette transformation d'un azoture en un autre moins riche en azote dans un courant d'ammoniaque est analogue à la transformation signalée par M. Wöhler<sup>(1)</sup> de l'azoture de titane  $Ti^3Az^2$  ( $Ti = 25$ ) en un azoture plus simple auquel les analyses de MM. Friedel et Guérin<sup>(2)</sup> assignent la formule  $Ti^2Az$ .

Ce même azoture  $Ti^2Az$  se produit également, comme l'ont montré MM. Friedel et Guérin, lorsqu'on fait passer un courant d'ammoniaque sur l'acide titanique au rouge vif. En est-il de même pour le niobium et le tantale?

L'acide tantalique irréductible par l'hydrogène n'est pas altéré par l'ammoniaque aux températures élevées.

Rose obtint avec l'acide niobique, dans les mêmes circonstances, une poudre noire; la matière avait perdu 5,2 pour 100 de son poids et fourni 14,31 pour 100 d'eau.

On calcule pour la composition du produit

Niobium . . . . .	74,0
Oxygène . . . . .	16,4
Azote . . . . .	9,6
	<hr/>
	100,0

Rammelsberg<sup>(3)</sup> fait remarquer que cette composition se rapproche de celle qui correspond à la formule  $Nb^2O^2Az$  (azoture de niobyle) et qui exigerait

Niobium . . . . .	75,80
Oxygène . . . . .	12,90
Azote . . . . .	11,30

(1) WÖHLER, *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. LXXIII, p. 46.

(2) FRIEDEL et GUÉRIN, *Annales de Chimie et de Physique*, 5<sup>e</sup> série, t. VIII, p. 51.

(3) RAMMELSBERG, *Pogg. Annalen*, t. CXXXVI, p. 372.

La matière obtenue par Rose renfermait encore de l'acide inaltéré. Mais l'existence d'un tel composé offre peu de probabilités, et l'hypothèse la plus naturelle est que la réduction était fort incomplète. M. H. Sainte-Claire Deville, par l'action répétée de l'ammoniaque sur l'acide niobique, obtint une réduction plus avancée.

16<sup>gr</sup>,30 d'acide ont donné, après une chauffe prolongée au rouge blanc,

14<sup>gr</sup>,58, perte = 8,09 pour 100;

après une deuxième chauffe,

13<sup>gr</sup>,68, perte = 16,07 pour 100;

après une troisième

13<sup>gr</sup>,30, perte = 18,40 pour 100.

La transformation complète de  $\text{Nb}^2\text{O}^5$  en  $\text{Nb}^2\text{Az}$  exigerait une perte de 19,4 pour 100.

J'ai pu constater moi-même que, sans atteindre le nombre théorique, la perte de poids que l'on observe, lorsque l'on chauffe de l'acide niobique au rouge vif dans un courant de gaz ammoniac, dépassait de beaucoup la valeur que Rose lui assigne.

La poudre noire obtenue présente tous les caractères d'un azoture mélangé d'un excès d'acide; et, si l'on n'obtient pas une réduction plus complète, il faut l'attribuer à la difficulté d'éloigner toute trace d'humidité pendant cinq à six chauffes successives dans un tube de porcelaine; de plus, au rouge blanc, l'acide s'agglomère, et la réduction ne peut être que superficielle.

#### IV. — SUR LES CUBES DE TITANE DES HAUTS-FOURNEAUX.

En étudiant les combinaisons du titane avec l'azote, Wöhler (1) a admis l'existence de quatre composés ( $\text{Ti} = 25$ ):

$\text{Ti}^2\text{Az}$ ,  $\text{TiAz}$ ,  $\text{Ti}^3\text{Az}^2 = 2\text{TiAz}, \text{Ti}^3\text{Az}$ ,  $\text{Ti}^3\text{Az}^3 = 3\text{TiAz}, \text{Ti}^3\text{Az}$ .

MM. Friedel et Guérin (2) ont montré dernièrement que l'azoture

(1) WÖHLER, *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. LXXIII, p. 43.

(2) FRIEDEL et GUÉRIN, *Annales de Chimie et de Physique*, 5<sup>e</sup> série, t. VIII, p. 51.

TiAz devait être considéré comme un mélange de sesquioxyde de titane et d'azoture, et, qu'en faisant passer de l'ammoniaque au rouge vif sur l'acide titanique, on obtenait, en se plaçant dans de bonnes conditions, l'azoture  $Ti^3Az$ .

Le composé  $Ti^3Az^2$ , qui résulte de l'action de l'ammoniaque sur le chlorure de titane, se transforme au rouge, dans un courant de gaz ammoniac, en un composé moins riche en azote  $Ti^2Az$ .

Quant à l'azoture  $Ti^3Az$ , Wöhler n'en a admis l'existence que pour expliquer la composition des cubes de titane des hauts-fourneaux.

On sait que ces cristaux ont été longtemps considérés comme du titane métallique, et que l'illustre chimiste de Göttingen a signalé le premier dans cette matière la présence de l'azote et du carbone. MM. Wöhler et H. Sainte-Claire Deville ont d'ailleurs montré directement qu'à une température élevée un mélange d'acide titanique et de charbon absorbait l'azote.

Les cubes des hauts-fourneaux constitueraient, d'après Wöhler, un azotocyanure de titane  $TiC^2Az, 3(Ti^3Az)$ .

Le cyanure  $TiC^2Az$  n'a jamais été obtenu seul, et les observations sur lesquelles on s'est fondé pour admettre l'existence d'un tel composé peuvent être, ce me semble, diversement interprétées.

1° Traités par le chlore, les cubes donnent du chlorure de titane et une petite quantité d'une matière cristallisée, le chlorocyanure de titane, qui a été reproduit synthétiquement par Wöhler<sup>(1)</sup>,  $CyCl, 2TiCl^2$ .

Or les cristaux renferment des cyanures alcalins et alcalino-terreux dont il est excessivement difficile de les débarrasser. Le chlorure de cyanogène ne proviendrait-il pas simplement de l'action du chlore sur ces cyanures?

2° Les cubes sont oxydés par la vapeur d'eau; il se dégage de l'ammoniaque et du cyanhydrate d'ammoniaque.

La matière renferme du carbone et de l'azote. Le cyanhydrate d'ammoniaque peut être considéré comme résultant de l'action de l'ammoniaque au rouge sur le carbone.

L'explication donnée par Wöhler est suffisante, elle ne me semble pas nécessaire.

---

(1) WÖHLER, *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. LXXIII, p. 219.

Les cubes de titane ne seraient-ils pas plus simplement un mélange d'un carbure de titane  $Ti^2C^2$  et de l'azoture  $Ti^2Az$ , si nettement étudié par MM. Friedel et Guérin? La formule donnée par Wöhler deviendrait alors  $Ti^2C^2,4(Ti^2Az)$ , et le titane se comporterait exactement comme le niobium et le tantale vis-à-vis de l'azote et du carbone.

Les nombreux essais de reproduction des cubes de titane, que j'ai tentés à des températures et dans des circonstances très-diverses, montrent que l'on peut obtenir des mélanges à proportions variables d'azoture  $Ti^2Az$  et de carbure  $Ti^2C^2$ . On se rapproche du carbure en opérant à des températures de plus en plus élevées.

L'étude de ces composés obtenus avec le titane fera l'objet d'un Mémoire spécial.

---

## CHAPITRE II.

### FLUOXYTANTALATES.

---

Lorsqu'on dissout l'acide niobique hydraté dans l'acide fluorhydrique, en présence de fluorures alcalins ou métalliques, on obtient, comme l'a montré M. de Marignac<sup>(1)</sup>, des sels bien cristallisés résultant de la combinaison de l'oxyfluorure  $Nb^2O^2Fl^2$  avec les autres fluorures. Ce n'est qu'en faisant cristalliser les sels précédents dans l'acide fluorhydrique concentré que les fluosels obtenus renferment le fluorure  $Nb^2Fl^5$ .

L'acide tantalique hydraté se dissout également dans l'acide fluorhydrique, mais les composés obtenus en présence de divers fluorures ne correspondent pas aux fluoxyniobates<sup>(2)</sup>, isomorphes des fluoniobates; ils doivent être considérés comme renfermant le fluorure de tantale  $Ta^2Fl^5$ . Ces fluotantalates se décomposent quand on les traite par l'eau pure, et M. de Marignac ne décrit aucun sel analogue aux fluoxyniobates.

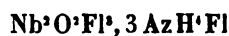
---

(<sup>1</sup>) MARIGNAC, *Archives de Genève*, t. XXIII, p. 270.

(<sup>2</sup>) MARIGNAC, *Archives de Genève*, t. XXVI, p. 107.

En substituant le fluorure ammonique à l'acide fluorhydrique pour dissoudre l'acide tantalique, on peut préparer des fluoxytantalates.

L'acide niobique hydraté disparaît dans une dissolution concentrée et chaude de fluorure ammonique aussi facilement que dans l'acide fluorhydrique, et l'on obtient par refroidissement le fluoxyniobate cubique



en octaèdres réguliers, limpides et volumineux.

Si l'on traite de même un mélange d'acides niobique et tantalique hydratés (<sup>1</sup>), il se produit, quelle que soit la composition du mélange, des cristaux identiques, par leur forme, aux précédents.

Ainsi 20 grammes d'acides métalliques extraits de la hjelmitte de Kårarfvet, débarrassés d'étain et de tungstène, ont été dissous par le fluorure d'ammonium en solution concentrée et chaude. Par refroidissement, il s'est produit un abondant dépôt de cristaux octaédriques. Par de nouvelles concentrations, on retire des cristaux identiques aux précédents, et cela jusqu'à ce que la liqueur, réduite à un petit volume, laisse cristalliser le fluorure d'ammonium.

Les cristaux lavés avec une petite quantité d'eau froide sont séchés sur du papier à filtre et par exposition à l'air pendant quelques heures. Ce sont des octaèdres non modifiés : l'examen dans la lumière polarisée parallèle montre qu'ils appartiennent au système cubique.

Limpides et éclatants, ils ne tardent pas à devenir opaques par exposition à l'air ; à 100 degrés ils ne subissent aucune altération, mais un séjour prolongé à l'étuve leur fait perdre leur transparence et leur poids diminue lentement avec le temps.

Pour mettre en évidence la présence du tantale dans ces cristaux, on peut s'appuyer sur la faible solubilité à froid du fluotantalate de potasse  $2\text{KFl}, \text{Ta}^2\text{Fl}^2$ . Le sel est dissous dans une petite quantité d'eau dont on élève la température à 60 degrés environ ; si l'on ajoute à cette dissolution du fluorure neutre de potassium, il se produit, par refroidissement, une abondante cristallisation de fluotantalate potassique

---

(<sup>1</sup>) J'ai toujours opéré sur des acides hydratés provenant de la décomposition par l'eau des chlorures, afin d'éviter la présence d'une petite quantité de potasse que des lavages très-prolongés ne parviennent pas à enlever aux acides provenant de l'attaque au bisulfate.

en cristaux aciculaires et un abondant précipité grenu identique à celui que l'on obtient par la décomposition par l'eau du fluotantalate de potasse.

Identique, par sa forme cristalline et son procédé de préparation, au fluoxyniobate  $\text{Nb}^2\text{O}^3\text{Fl}^3, 3\text{AzH}^4\text{Fl}$ , ce fluosel renferme néanmoins du tantale; il y a donc lieu de considérer les cristaux obtenus dans l'opération précédente comme constituant un mélange isomorphe de fluoxyniobate triammonique et d'un fluoxytantalate de même formule.

L'existence du fluoxytantalate ammonique se trouve établie par l'analyse du fluosel précédent et des produits obtenus en opérant avec de l'acide tantalique parfaitement pur.

On déduit le poids du tantale que renferment ces fluosels du poids d'acide tantalique qu'ils fournissent :

- 1° Par un grillage prolongé à basse température;
- 2° Par décomposition au moyen de l'acide sulfurique.

Dans le second cas, le fluorure est mis en digestion dans une capsule de platine avec son poids d'acide sulfurique jusqu'à liquéfaction complète; on élève ensuite lentement la température jusqu'à ce qu'on ne perçoive plus d'odeur d'acide fluorhydrique, et l'on chasse l'acide sulfurique en excès et le sulfate d'ammoniaque à une température inférieure au rouge; on termine par une calcination au rouge vif. Si le fluosel a été obtenu au moyen d'acide préparé par le bisulfate de potasse, il est rare que l'acide obtenu ne renferme pas une petite quantité de potasse qu'on détermine de la manière suivante : après avoir chassé l'excès d'acide et le sulfate d'ammoniaque au rouge sombre, on reprend par l'eau; après évaporation de la liqueur filtrée et calcination, il reste du sulfate de potasse. Mais cette dernière opération devient inutile lorsque l'acide provient de la décomposition par l'eau du chlorure.

Ces deux méthodes donnent en général des résultats identiques. Il peut ne pas en être de même de la suivante.

L'ammoniaque précipite complètement l'acide tantalique. On éprouve, il est vrai, une difficulté à laver l'acide; car, dès que la majeure partie des sels ammoniacaux ont été enlevés, il passe à travers les filtres; on remédie à cet inconvénient en effectuant les lavages avec de l'eau renfermant une petite quantité d'acétate d'ammoniaque. Les acides métalliques, obtenus par cette méthode, présentent parfois,



après calcination, un poids plus élevé que par les deux méthodes précédentes : c'est qu'ils renferment alors une petite quantité de silice. En examinant avec soin au microscope les cristaux soumis à l'analyse, on peut y constater alors la présence de cubo-octaèdres ou de lames hexagonales de fluosilicate ammonique. La silice provient d'une mauvaise préparation du chlorure de tantale ou du fluorure ammonique.

La liqueur, débarrassée par l'ammoniaque de l'acide tantalique, renferme tout le fluor, que l'on transforme, par les méthodes connues, en fluorure de calcium.

L'ammoniaque est dosée par distillation avec de la potasse ou par calcination avec de la chaux vive. Dans le cas où le sel renfermerait de l'eau non chassée à 100 degrés ou de l'acide fluorhydrique, la différence des résultats donnés par ces deux méthodes servirait à les déterminer.

Le fluor peut se déterminer indirectement en combinant la perte subie par le grillage avec la perte subie par calcination avec de la chaux. La différence de ces deux pertes représente en effet l'excès du poids du fluor sur l'oxygène fixé.

En appliquant ces méthodes à l'analyse du fluosel niobotantalique, on a obtenu les résultats suivants :

- I. 1<sup>er</sup>, 558 traités par l'acide sulfurique ont donné 0<sup>gr</sup>, 907 d'acides métalliques, soit 58, 21 pour 100.
- II. 1<sup>er</sup>, 458 dissous dans l'eau froide sont précipités par l'ammoniaque. Le précipité, lavé et calciné, pèse 0,849, soit 58, 23 pour 100 d'acides.
- III. Dans la liqueur filtrée de l'opération précédente, on précipite le fluor à l'état de fluorure de calcium. On recueille ainsi 0,971 de Ca Fl, soit 0,473 de Fl = 32,41 pour 100.
- IV. 2<sup>es</sup>, 317 soumis, à la distillation avec de la potasse caustique, donnent 0<sup>gr</sup>, 312 d'ammoniaque, soit Az H<sup>3</sup> = 14,26 pour 100. Ce dosage d'ammoniaque a été effectué sur des cristaux déjà effleuris.

A une dissolution dans l'eau pure à 60 degrés de 6<sup>es</sup>, 646 de fluosel, on a ajouté 2<sup>es</sup>, 106 de fluorure neutre de potassium (').

La liqueur abandonne par refroidissement du fluotantalate potassique mélangé d'un dépôt pulvérulent riche en acide tantalique. On recueille le tout sur un filtre, on y ajoute les cristaux aciculaires ob-

---

(') Ce poids de fluorure de potassium est celui qu'il faudrait employer pour transformer en fluotantalate de potasse 6<sup>es</sup>, 646 du fluosel, en admettant qu'il ne renfermât que du tantale.

tenus par concentrations successives, et on lave avec de petites quantités d'eau froide. La matière recueillie sur le filtre, séchée et décomposée par l'acide sulfurique, donne l'acide tantalique.

L'eau mère, évaporée à sec et traitée par l'acide sulfurique, a donné 0<sup>gr</sup>,457 d'acide niobique, soit 6,89 pour 100 de fluosel.

Les 58,22 d'acide métallique renferment donc :

Acide niobique.....	6,89
Acide tantalique.....	51,33
	<hr/> 58,22

En attribuant au fluosel niobique la formule  $\text{Nb}^3\text{O}^3\text{Fl}^3$ ,  $3\text{AzH}^4\text{Fl}$ , qui correspond, d'après les analyses de M. de Marignac, à 48,20 pour 100 d'acide, on en conclut pour la composition du mélange :

Fluosel niobique.....	14,29
Fluosel tantalique.....	85,71
	<hr/> 100,00

Or, 14,29 de fluosel niobique se décomposent de la façon suivante :

$\text{Nb}^3$ .....	4,83	33,82
$3\text{AzH}^4$ .....	2,78	19,42
$6\text{Fl}$ .....	5,86	41,01
$\text{O}$ .....	0,82	5,75
	<hr/> 14,29	<hr/> 100,00

Les 85,71 de fluosel tantalique auraient donc donné 51,33 d'acide, soit 59,98 pour 100; la formule  $\text{Ta}^3\text{O}^3\text{Fl}^3$ ,  $3\text{AzH}^4\text{Fl}$  exigerait 60,65.

On aurait d'ailleurs, pour la composition de ce fluosel,

$\text{Ta}^3$ .....	42,08	49,10
$\text{AzH}^4$ .....	11,48	13,39
$\text{Fl}$ .....	26,55	30,99
$\text{O}$ .....	5,60 (p. diff.)	6,52
	<hr/> 85,41	<hr/> 100,00

Le rapport du tantale ( $\text{Ta}^2 = 182$ ) au fluor est, en équivalents, 1 : 6,04.

Cette analyse, bien qu'imparfaite par suite des difficultés que pré-

sente la séparation des acides niobique et tantalique effectuée sur une faible quantité de matière, suffit pourtant pour montrer que l'on a affaire, non à un fluorure, mais à un oxyfluorure tantalique.

*Fluoxytantalate triammonique.*

Si l'on opère sur de l'acide tantalique parfaitement pur, on obtient encore des cristaux octaédriques dont l'analyse peut être faite avec la plus grande exactitude et ne laisse aucune incertitude sur la nature du produit.

Le sel n'éprouve aucune perte à 100 degrés, à condition pourtant que le séjour à l'étuve ne soit pas prolongé.

L'ammoniaque, le niobium et le fluor ont été dosés par les méthodes indiquées plus haut. La formule  $3\text{AzH}^4\text{Fl}$ ,  $\text{Ta}^2\text{O}^3\text{Fl}^3$ , se trouve pleinement vérifiée.

	Calculé.		Trouvé.	
Ta <sup>2</sup> .....	182	49,73	49,38	49,73
3AzH <sup>4</sup> .....	54	14,75	14,76	
6Fl.....	114	31,15	31,29	
2O.....	16	4,37		
	366	100,00		
Ta <sup>2</sup> O <sup>3</sup> .....	222	60,65	60,24	60,66

Ce fluosel se dissout sans décomposition dans une petite quantité d'eau pure et froide; mais, à l'ébullition, la liqueur se trouble, laisse déposer un précipité blanc, amorphe, et, par refroidissement, on obtient une abondante cristallisation du fluosel ammonique  $2\text{AzH}^4\text{Fl}$ ,  $\text{Ta}^2\text{Fl}^3$  en larges lames rectangulaires biseautées, mêlées d'un excès de fluoxytantalate non décomposé. Si à la dissolution chaude on ajoute du fluorure de potassium, la solution se trouble de nouveau par refroidissement et laisse déposer des cristaux aciculaires caractéristiques de fluotantalate de potasse.

*Fluoxytantalate acide d'ammoniaque.*

Si l'on concentre par évaporation l'eau mère qui a laissé déposer le fluoxytantalate octaédrique, il se dégage de l'ammoniaque; la liqueur

devient fortement acide, et, par refroidissement, on obtient un nouveau fluosel en petits cristaux lamellaires.

Ce sont des prismes fortement aplatis terminés par un pointement octaédrique; les cristaux sont trop minces pour être déterminés.

Les dosages effectués par les méthodes connues s'accordent avec la formule  $\text{Ta}^2\text{O}^2\text{Fl}^3$ ,  $3\text{AzH}^4\text{Fl}$ ,  $\text{HFl}$ .

La dissolution de ce sel dans l'eau pure est fortement acide; elle ne se trouble pas à l'ébullition comme celle du fluoxytantalate précédent.

Il s'effleurit rapidement à l'air. A l'étuve à 100 degrés, il laisse dégager des vapeurs acides; au bout d'une vingtaine de minutes, la perte de poids cesse d'être sensible. C'est ainsi qu'on a dosé l'acide fluorhydrique libre. La petite quantité de matière que j'avais à ma disposition ne m'a pas permis d'effectuer le dosage de la totalité du fluor.

	Calculé.		Trouvé.
Ta <sup>2</sup> .....	182	47,15	47,18
6Fl.....	114	29,53	
3Az H <sup>4</sup> .....	54	13,99	14,02
2O.....	16	4,15	
H Fl.....	20	5,18	4,71
	386	100,00	
Ta <sup>2</sup> O <sup>3</sup> .....	222	57,51	57,55

Ce sel doit être rapproché du fluoxyniobate de potasse aciculaire  $\text{Nb}^2\text{O}^2\text{Fl}^3$ ,  $3\text{KFl}$ ,  $\text{HFl}$  <sup>(1)</sup> et du fluostannate acide  $\text{Sn}^2\text{Fl}^4$ ,  $3\text{KFl}$ ,  $\text{HFl}$  <sup>(2)</sup> décrits par M. Marignac.

#### *Fluoxytantalate potassique.*

Lorsqu'à une dissolution encore chaude d'acide tantanique dans un grand excès de fluorure d'ammonium, concentrée par une ébullition prolongée, on ajoute du carbonate de potasse pur, par petites portions, jusqu'à saturation presque complète, on obtient, par refroidissement, de volumineux octaèdres réguliers, transparents. Traités par une petite quantité d'eau pure, ces cristaux deviennent immédiatement opaques

(<sup>1</sup>) MARIGNAC, *Archives de Genève*, t. XXIII, p. 260.

(<sup>2</sup>) MARIGNAC, *Annales des Mines*, 5<sup>e</sup> série, t. XV, p. 233.

et ne se dissolvent, par une légère élévation de température, qu'en laissant un volumineux résidu amorphe riche en acide tantalique.

Cette décomposition du sel au contact de l'eau semble prouver l'existence d'un fluoxytantalate potassique analogue au composé ammoniacal précédemment décrit; mais ce procédé ne permet pas de le préparer à l'état de pureté.

Les fluoniobate et fluotantalate de potasse  $2\text{KFl}$ ,  $\text{Nb}^2\text{Fl}^3$ ;  $2\text{KFl}$ ,  $\text{Ta}^2\text{Fl}^3$  étaient jusqu'ici les deux seuls fluosels isomorphes: c'est cette relation d'isomorphisme qui avait permis à M. Marignac d'attribuer à l'acide tantalique la formule  $\text{Ta}^2\text{O}^5$ , analogue à celle que l'examen des fluoxyniobates avait fait admettre pour l'acide niobique.

Les mêmes relations d'isomorphisme qui unissent les fluoxyniobates aux fluoxytungstates, fluoxymolybdates, fluotitanates, fluostannates, fluozirconates, fluosilicates, permettent de joindre les fluoxytantalates à cette longue série de fluosels.

On a, en effet, en se bornant aux principaux :

Prisme rhomboïdal oblique.	Cubiques.	Prisme rhomboïdal oblique.
$\text{Ti}^2\text{Fl}^4$ , $2\text{KFl}$ , $2\text{HO}$ ,	$\text{Zr}^2\text{Fl}^4$ , $3\text{KFl}$ ,	$\text{Sn}^2\text{Fl}^4$ , $3\text{KFl}$ , $\text{HFl}$ ,
$\text{W}^2\text{O}^4\text{Fl}^3$ , $2\text{KFl}$ , $2\text{HO}$ ,	$\text{Zr}^2\text{Fl}^4$ , $3\text{AzH}^4\text{Fl}$ ,	$\text{Nb}^2\text{O}^4\text{Fl}^3$ , $3\text{KFl}$ , $\text{HFl}$ ,
$\text{Nb}^2\text{O}^4\text{Fl}^3$ , $2\text{KFl}$ , $2\text{HO}$ .	$\text{Ti}^2\text{Fl}^4$ , $3\text{AzH}^4\text{Fl}$ } <sup>(1)</sup>	$\text{Ta}^2\text{O}^4\text{Fl}^3$ , $3\text{AzH}^4\text{Fl}$ , $\text{HFl}$ <sup>(2)</sup>
Prisme rhomboïdal droit.	$\text{Si}^2\text{Fl}^4$ , $3\text{AzH}^4\text{Fl}$ }	
$\text{W}^2\text{O}^4\text{Fl}^3$ , $2\text{AzH}^4\text{Fl}$ ,	$\text{Nb}^2\text{O}^4\text{Fl}^3$ , $3\text{KFl}$	
$\text{Nb}^2\text{O}^4\text{Fl}^3$ , $2\text{AzH}^4\text{Fl}$ ,	$\text{Nb}^2\text{O}^4\text{Fl}^3$ , $3\text{AzH}^4\text{Fl}$ ,	
	$\text{Ta}^2\text{O}^4\text{Fl}^3$ , $3\text{AzH}^4\text{Fl}$ ,	
	$[\text{Ta}^2\text{O}^4\text{Fl}^3, 3\text{KFl}]$ .	

Ces fluoxytantalates, tout en établissant une analogie plus étroite encore entre le niobium et le tantale, rattachent directement les fluosels tantaliques aux fluosels du zirconium, du silicium, du titane, du tungstène et du molybdène.

(<sup>1</sup>) Ces deux sels sont placés dans cette série, quoiqu'ils cristallisent en prismes carrés très-voisins du cube.

(<sup>2</sup>) Le fluosel tantalique, ayant même formule que les deux précédents, leur est joint quoiqu'on n'ait pu déterminer la forme cristalline.

## CHAPITRE III.

## NIOBATES ET TANTALATES.

Les combinaisons de l'acide niobique avec les bases ont été étudiées par H. Rose <sup>(1)</sup> et par M. de Marignac <sup>(2)</sup>.

Les niobates alcalins sont seuls solubles; quant aux niobates métalliques, ils n'ont été obtenus jusqu'ici que sous forme de précipités amorphes, par double décomposition entre un niobate de soude soluble et diverses solutions métalliques.

H. Rose n'a pas réussi à obtenir de niobate de potasse cristallisé et nettement défini. En fondant de l'acide niobique pur avec deux ou trois fois son poids de carbonate de potasse, et concentrant la dissolution dans le vide, M. de Marignac obtient un sel en cristaux volumineux dont la formule est  $3\text{Nb}^2\text{O}^5, 4\text{KO}, 4\text{HO} + 12\text{Aq}$ . En dissolvant ce sel dans l'eau pure, on a le niobate  $7\text{Nb}^2\text{O}^5, 8\text{KO}, 9\text{HO} + 23\text{Aq}$ , et en présence d'un excès de potasse  $2\text{Nb}^2\text{O}^5, 3\text{KO}, 6\text{HO} + 7\text{Aq}$ .

Par contre, M. de Marignac n'a pu obtenir de niobate de soude nettement cristallisé. H. Rose en a décrit plusieurs dont quelques-uns ne sont pas de composition bien constante. Il en est un pourtant dont on ne peut révoquer en doute l'existence et que j'ai obtenu à plusieurs reprises dans le cours de ce travail, en fondant de l'acide niobique pur avec trois fois son poids de carbonate de soude. La masse fondue est laissée quelque temps en contact avec une petite quantité d'eau froide qui enlève le carbonate alcalin en excès et ne dissout que des traces de niobate sodique. Le résidu insoluble se dissout dans l'eau bouillante et abandonne, par refroidissement, de petits cristaux prismatiques très-brillants qui paraissent appartenir au système rhombique. Le mode de préparation, identique à celui de H. Rose, ne pouvant

---

<sup>(1)</sup> H. ROSE, *Sur les hyponiobates*. (*Pogg. Annalen*, t. CXIII, p. 105-292.)

<sup>(2)</sup> MARIGNAC, *Archives de Genève*, t. XXIII, p. 250.

laisser aucun doute sur la nature du produit, je me suis contenté de vérifier sa teneur en acide <sup>(1)</sup>.

La formule  $\text{NaO}, \text{Nb}^2\text{O}^5 + 6\text{HO}$  s'accorde assez exactement avec les analyses de Rose.

		Calculé.	Trouvé.	H. Rose (moyenne).
$\text{Nb}^2\text{O}^5$ .....	134	61,18	61,14	60,82
$\text{NaO}$ .....	31	14,15	"	15,86
$6\text{HO}$ .....	54	24,67		
	219	100,00		

Ce niobate est peu soluble dans l'eau froide, insoluble dans une solution de soude ou de carbonate de soude; exposée à l'air, la dissolution se trouble et laisse déposer un niobate acide pulvérulent. Il résulte de la décomposition par l'eau d'un sel plus riche en alcali, probablement  $3\text{NaO}, \text{Nb}^2\text{O}^5$ .

Les tantalates alcalins ont été étudiés par Rose avec un soin minutieux <sup>(2)</sup>; la plupart des sels décrits par lui ne doivent être considérés pourtant que comme des mélanges. M. Marignac <sup>(3)</sup> ne regarde comme nettement définis que deux tantalates potassiques :

1°  $3\text{Ta}^2\text{O}^5, 4\text{KO} + 16\text{HO}$  qu'il obtient en fondant, au creuset d'argent, l'acide tantalique avec deux ou trois fois son poids de potasse caustique. Isomorphe du sel niobique de même composition;

2°  $\text{Ta}^2\text{O}^5, \text{KO}$  insoluble, que l'on obtient en calcinant le sel précédent.

Quant aux sels de soude, les tantalates  $3\text{Ta}^2\text{O}^5, 4\text{NaO} + 25\text{Aq}$  et  $\text{Ta}^2\text{O}^5, \text{NaO}$  présentent seuls les caractères de composés définis.

#### *Action des acides niobique et tantalique sur le carbonate de soude.*

H. Rose fit de nombreuses expériences en vue de déterminer les poids d'acide carbonique déplacé par les acides *niobique*, *hyponiobique* et l'acide tantalique, lorsqu'on les fond avec du carbonate de soude.

<sup>(1)</sup> Le même sel a été décrit, depuis la rédaction de ce travail, par M. Birger-Santesson (*Bulletin de la Société chimique*, t. XXIV, p. 53; juillet 1875).

<sup>(2)</sup> H. ROSE, *Pogg. Annalen*, t. C, p. 551; t. CI, p. 11.

<sup>(3)</sup> MARIGNAC, *Archives de Genève*, juin 1866.

Il n'y a pas lieu de se préoccuper de son acide *niobique*, qui n'est qu'un mélange d'acide niobique réel et d'acide tantalique.

Mais, si les nombres obtenus avec un acide provenant de la décomposition par l'eau de l'oxychlorure de niobium (acide hyponiobique de Rose) peuvent être considérés comme concordants et diffèrent peu de ceux qui correspondent à la formation du sel  $3\text{NaO}, \text{Nb}^3\text{O}^5$ , il n'en est plus de même avec l'acide tantalique, et Rose avait cru pouvoir en conclure l'existence de sels différents.

Scheerer, en 1861, étudiant l'action de la silice sur le carbonate de soude, crut établir que la silice et la soude se combinent en diverses proportions suivant la température et les quantités d'acide et de carbonate mises en présence.

M. Mallard<sup>(1)</sup> a montré que les acides métalliques se comportent différemment suivant qu'ils sont monobasiques ou bibasiques.

L'alumine, le sesquioxyde de fer, l'acide borique donnent rapidement une perte en acide carbonique correspondant aux sels  $\text{NaO}, \text{Al}^3\text{O}^3$ ;  $\text{NaO}, \text{Fe}^2\text{O}^3$ ;  $\text{NaO}, \text{BoO}^3$ .

Avec les acides bibasiques les phénomènes sont plus complexes :

1° La proportion d'acide carbonique chassé tend vers une limite qui varie d'une manière continue avec la température.

2° Le phénomène est limité d'une part par la tension de l'acide carbonique à la surface du mélange dans le creuset; d'autre part, par la réaction mutuelle des deux sels monobasique et bibasique.

Les acides niobique et tantalique étant, comme nous le verrons plus loin, tribasiques, il y avait quelque intérêt à les étudier par les méthodes mêmes de M. Mallard.

Les résultats sont beaucoup plus simples qu'avec les acides bibasiques (silice, acide titanique).

1° *Acide niobique et carbonate de soude.* — Les pertes en acide carbonique, rapportées à 100 d'acide, sont corrigées de la perte éprouvée par le carbonate de soude seul, déterminée par des expériences préliminaires.

---

(<sup>1</sup>) MALLARD, *De l'action que la silice et quelques oxydes analogues exercent à une température élevée sur le carbonate de soude.* (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XXVIII, p. 88; 1873.)



Le carbonate et l'acide réagissaient sensiblement dans le rapport en poids de 4 à 1, ou en équivalents de 10 à 1.

*a. Fusion au creuset de platine au-dessus d'un bec Bunsen. —*

Pression du gaz : 41 millimètres d'eau.

Acide niobique.....	1,0085
Carbonate calciné, mais non fondu.....	3,7655

Pertes observées de dix minutes en dix minutes :

1.....	46,35
2.....	47,62
3.....	47,62

En vingt minutes, à une température relativement basse, la perte limite est atteinte. La formation d'un niobate tribasique  $3\text{NaO}, \text{Nb}^2\text{O}^5$  exigerait 49,26.

*b. Bec Bunsen. — Pression du gaz : 18 millimètres d'eau.*

Acide niobique.....	1,013
Carbonate.....	4,012

On observe de dix en dix minutes les pertes suivantes :

1.....	25,07
2.....	36,82
3.....	40,27
4.....	42,74
10.....	47,38

Sauf la rapidité d'action, la limite est sensiblement la même que précédemment.

*c. Bec Bunsen. — Pression : 18 millimètres.*

Acide niobique.....	0,996
Carbonate.....	4,040

Au bout de dix minutes, la matière étant fondue, on fait passer dans le creuset un courant d'air sec. La limite est atteinte après une heure dix minutes de chauffe; elle est de 47,29, égale aux précédentes.

L'expérience est continuée en substituant au courant d'air un courant d'acide carbonique sec. On constate une absorption lente, et, au bout de trois heures dix minutes, la perte se trouve réduite à 42,21.

La limitation de la perte en acide carbonique par la tension du gaz ne se manifeste donc ici qu'à condition que cette dernière ait atteint une valeur bien supérieure à celle qui s'exerce dans le creuset.

Quant aux expériences faites à des températures supérieures, au chalumeau, elles ne donnent pas de résultats différents de ceux que je viens de signaler. De plus, l'incertitude des corrections ne permet pas de leur attribuer une confiance absolue.

H. Rose (1) opérait dans des conditions de température très-différentes et mal déterminées; il ne faisait pas les corrections relatives aux pertes éprouvées par le carbonate seul; enfin, pour 1 d'acide, les poids de carbonate variaient dans le rapport de 4 à 13. Les nombres obtenus ont varié de 47,7 à 52,1. Dans un cas où il avait négligé d'employer un acide provenant de la décomposition par l'eau de l'oxychlorure, la perte observée fut de 34,1 pour 100 d'acide; ce résultat doit être attribué à la présence de l'acide tantalique.

2° *Acide tantalique et carbonate de soude.* — L'attaque de l'acide tantalique est beaucoup plus lente qu'avec l'acide niobique.

Les poids de carbonate et d'acide étaient dans le rapport de 5 à 1.

a. *Bec Bunsen.* — Pression du gaz: 32 millimètres d'eau.

Acide.....	1,0775
Carbonate.....	6,3055

La perte limite corrigée après deux heures vingt minutes de chauffe est de 28,67.

b. *Fusion au bec Bunsen.* — Pression: 42 millimètres.

Carbonate... ..	3,1835
Acide.....	0,5575

Au bout de deux heures, la perte limite est de 28,87.

L'expérience, continuée au chalumeau, accuse une perte en acide

---

(1) H. ROSE, *Pogg. Annalen*, t. CXIII, p. 105.

carbonique qui ne diffère pas de celle qui aurait été constatée avec le carbonate seul.

*c. Fusion au chalumeau.*

Carbonate.....	2,700
Acide.....	0,450

La perte limite est atteinte au bout d'une heure dix minutes. Elle est de 38,66 pour 100 d'acide et, après correction, de 30,00.

La formation du tantalate  $3\text{NaO}, \text{Ta}^2\text{O}^3$  correspondrait à une perte de 29,72.

Tous ces nombres peuvent être considérés comme identiques.

H Rose (') avait constaté des pertes très-différentes :

16,8	24,8	33,7	40,3
	24,9	35,1	
	25,0		
	26		

Ces nombres obtenus à des températures élevées, difficiles à préciser, et qui n'ont subi aucune correction, ne représentent en aucune façon l'action du carbonate de soude sur l'acide tantalique. Il résulte, au contraire, des expériences ci-dessus que, pour l'acide tantalique comme pour l'acide niobique, le seul composé dont on puisse admettre la formation est un sel tribasique.

*Niobates et tantalates par voie sèche.*

Les minéraux niobifères et tantalifères constituent des niobates et tantalates complexes renfermant presque constamment les acides titanique, stannique et tungstique, souvent de la zircone et de la thorine. Les *niobites* et *tantalites*, qui sont, de ces minéraux, les plus simples au point de vue de la composition chimique et les mieux caractérisés par leur forme cristalline, doivent être considérés, d'après les analyses de Blomstrand, Marignac et Rammelsberg, comme des niobo-tantalates monobasiques de fer et de manganèse.

$$(\text{FeO}, \text{MnO}) (m \text{Nb}^2\text{O}^3, n \text{Ta}^2\text{O}^3) \left\{ \begin{array}{l} m > n \text{ niobites,} \\ m < n \text{ tantalites.} \end{array} \right.$$

(') H. ROSE, *Pogg. Annalen.*, t. CI, p. 40.



des composés analogues aux apatites et aux wagnérites, si faciles à obtenir avec les acides phosphorique, arsénique et vanadique.

Dans une même opération, on obtient le plus souvent des sels de basicité différente, qu'il faut soumettre à un triage rigoureux pour l'analyse. Cela n'est pas toujours possible; avec l'acide tantalique notamment, les cristaux sont souvent trop petits pour être isolés et j'ai dû me borner à ne décrire que les sels dont la pureté ne pouvait être mise en doute.

### I. — NIOBATES DE POTASSE.

*Niobate monobasique.* — L'acide niobique se dissout au rouge vif dans le fluorure de calcium. Si l'on fond avec une petite quantité de carbonate de potasse (1 équivalent de  $\text{KOCO}_2$  pour 1 équivalent d'acide employé) la masse cristalline ainsi obtenue, on trouve, après refroidissement lent, à la surface du culot et contre les parois du creuset, de belles tables rectangulaires trémisées d'un beau jaune paille. Vu la nature de la gangue, il est très-pénible d'isoler ces cristaux, et ce n'est qu'après plusieurs jours d'un traitement par l'acide sulfurique étendu et bouillant, qui ne les altère nullement, et des lavages prolongés, que la purification peut être considérée comme complète.

Pour l'analyse, les cristaux finement pulvérisés ont été attaqués par le bisulfate d'ammoniaque; la dissolution se fait lentement. Après disparition complète de la poussière cristalline, on reprend par l'eau, qui précipite à l'ébullition le sulfate d'acide niobique; la liqueur filtrée, évaporée à sec, laisse, après calcination, déterminer le sulfate de potasse. On s'est assuré que ce sel, repris par l'eau, ne laissait aucun résidu insoluble, et que la dissolution ne renfermait pas de chaux.

C'est un niobate de potasse monobasique.

		Calculé.	Trouvé.
KO .....	47	25,96	25,40
Nb <sup>2</sup> O <sup>5</sup> .....	134	74,04	74,16
	181	100,00	99,56

Les cristaux renfermaient en outre une très-petite quantité de  $\text{Fe}^2\text{O}^3$ . On ne peut mesurer sur ces cristaux que des angles de 90 degrés;

l'examen dans la lumière polarisée montre qu'ils n'appartiennent pas au système cubique.

*Niobate acide de potasse.* — L'acide niobique, maintenu au rouge blanc pendant plusieurs heures dans un creuset de platine avec deux fois son poids environ de sulfate de potasse, donne un sel différent du précédent. Après lavages prolongés qui enlèvent du sulfate de potasse en excès, il reste une matière cristallisée en minces lamelles transparentes, à éclat nacré correspondant à la formule  $3\text{KO}, 4\text{Nb}^2\text{O}^5$ .

		Calculé.	Trouvé.
$3\text{KO}$ .....	141	20,83	21,59
$4\text{Nb}^2\text{O}^5$ .....	536	79,17	78,41
	<u>677</u>	<u>100,00</u>	<u>100,00</u>

MM. Henri Sainte-Claire Deville et Damour avaient obtenu avec l'acide tantalique le sel correspondant  $3\text{KO}, 4\text{Ta}^2\text{O}^5$  dans des circonstances analogues.

## II. — NIOBATES DE MAGNÉSIE.

*Niobate de magnésie tétrabasique*  $4\text{MgO}, \text{Nb}^2\text{O}^5$ . — On place dans un creuset de platine de l'acide niobique avec un excès de chlorure de magnésium récemment fondu et bien pur; il convient de mettre à la surface un peu de chlorhydrate d'ammoniaque. Le creuset, muni de son couvercle, est placé, enveloppé de magnésie, dans un creuset de terre luté. On chauffe dans un bon fourneau à vent avec du coke de cornue, en ayant soin d'élever la température aussi rapidement que possible jusqu'au rouge blanc; cette température est soutenue pendant une heure environ. Un refroidissement lent paraît favorable au développement des cristaux, mais il entraîne la formation de périclase dont il est difficile de se débarrasser.

On peut remplacer sans avantage sensible l'acide niobique par un niobate alcalin préalablement calciné.

Lorsqu'on traite par l'eau la matière fondue restée dans le creuset de platine, il reste, après disparition du chlorure de magnésium en excès, de larges plaques hexagonales transparentes, incolores ou légèrement colorées en jaune.

Ces plaques peuvent atteindre de 4 à 5 millimètres de diamètre, ce qui permet de les séparer aisément d'une poussière cristalline ou d'autres cristaux prismatiques qui les accompagnent d'ordinaire; il suffit pour cela de les agiter sur un tamis très-fin; un triage à la pince permet ensuite d'en recueillir une quantité suffisante pour l'analyse. Si l'on examine ces plaques au microscope, on n'y trouve aucune trace d'inclusions étrangères.

L'analyse a été faite en attaquant la matière finement pulvérisée par le bisulfate d'ammoniaque dans un creuset de platine. Lorsque la dissolution est complète, on reprend par l'eau qui, à l'ébullition, précipite l'acide niobique en flocons volumineux. L'acide est reçu sur un filtre, desséché et calciné jusqu'à cessation de perte de poids. Dans la liqueur filtrée, la magnésie est précipitée à l'état de phosphate ammoniaco-magnésien.

On a obtenu ainsi :

	I.	II.	Oxygène (I).	Rapport.
Acide niobique....	62,23	61,26	18,58	1,24 ou $\frac{3}{4}$
Magnésie.....	37,55	37,80	15,02	
	99,78	99,06		

La formule  $4\text{MgO}, \text{Nb}^2\text{O}^5$  exige

Acide niobique.....	62,62
Magnésie.....	37,38
	100,00

L'analyse I portait sur 0<sup>gr</sup>,188 de cristaux triés; l'analyse II sur 0<sup>gr</sup>,222.

Les lames hexagonales de niobate de magnésie présentent l'éclat particulier aux lames de mica, dont elles ont d'ailleurs tous les caractères extérieurs.

La densité prise sur les cristaux triés est de 4,37. Ces cristaux n'exercent aucune action sur la lumière polarisée parallèle les traversant normalement; l'action devient manifeste si l'on incline la plaque.

Au microscope polarisant dans la lumière convergente, on aperçoit nettement les anneaux et la croix noire des cristaux à un axe; ils appartiennent donc au système rhomboédrique.

Les acides nitrique et chlorhydrique bouillants sont sans action; l'acide sulfurique les dissout à la faveur d'une longue ébullition.

Dans son travail sur les titanates (<sup>1</sup>), M. Hautefeuille a décrit deux combinaisons de l'acide titanique avec la magnésie : un titanate monobasique  $\text{MgO}, \text{TiO}^2$  et un titanate bibasique  $2\text{MgO}, \text{TiO}^2$  en beaux octaèdres réguliers. Quant au premier, il présente avec le niobate une similitude complète de forme, d'éclat et de propriétés optiques, comme j'ai pu le vérifier en suivant, pour leur reproduction, les indications si précises de l'auteur. Il est à remarquer de plus que la composition centésimale du titanate diffère peu de celle du niobate. On a, en effet, pour la formule  $\text{MgO}, \text{TiO}^2$  ( $\text{Ti} = 25$ )

Acide titanique .....	67,22
Magnésie.....	32,78
	<hr/> 100,00

Mais il ne pouvait exister de doute sur la nature de l'acide qui avait servi à la préparation du niobate hexagonal, préparation que j'ai d'ailleurs répétée bien souvent, toujours avec des acides provenant de la décomposition par l'eau d'un oxychlorure bien pur.

D'ailleurs, la densité du titanate n'est que de 3,91. Si l'on traite par l'acide sulfurique bouillant les lamelles hexagonales de ce sel, sans pulvérisation préalable, elles deviennent rapidement opaques et la carcasse d'acide titanique ne se dissout qu'à la longue. Il n'en est pas de même avec le niobate, qui disparaît sans que les cristaux cessent d'être transparents.

Ce n'est pas là le seul exemple que j'aurai à signaler d'un niobate et d'un titanate présentant des formes cristallines identiques ou presque identiques, quoique de formule différente.

*Niobate tribasique*  $3\text{MgO}, \text{Nb}^2\text{O}^5$ . — Les cristaux de ce sel accompagnent fréquemment les lames hexagonales du niobate à 4 équivalents de magnésie, sur lesquelles ils se trouvent implantés, et l'impossibilité de les séparer complètement fait que peu d'opérations permettent d'obtenir des cristaux assez purs pour l'analyse.



Ce sont de petits prismes fortement aplatis, transparents et incolores; ils n'ont pu être mesurés.

L'analyse faite sur des cristaux triés à la pince donne

		Calculé.	Trouvé.
3 MgO.....	60	30,92	30,28
Nb <sup>2</sup> O <sup>5</sup> .....	134	69,08	69,72
	<u>194</u>	<u>100,00</u>	<u>100,00</u>

L'analyse a porté sur 0<sup>gr</sup>, 185 de matière. Elle a été faite au moyen du bisulfate de potasse.

*Niobate bibasique* 2MgO, Nb<sup>2</sup>O<sup>5</sup>. — Dans une préparation de niobate de magnésie hexagonal se sont formés de petits prismes très-brillants, d'un noir d'acier.

Leur couleur noire n'est que superficielle et provient d'une réduction partielle par le chlorhydrate d'ammoniaque qui accompagne presque toujours le chlorure de magnésium fondu. La poudre est grise, mais une calcination au rouge pendant quelques minutes suffit pour la blanchir.

L'analyse effectuée sur 0<sup>gr</sup>, 1175 correspond à un niobate bibasique. On a en effet

	Trouvé.	Calculé.
2 MgO.....	76,50	77,02
Nb <sup>2</sup> O <sup>5</sup> .....	23,24	22,98
	<u>99,74</u>	<u>100,00</u>

Quoique très-petits, ces cristaux permettent des mesures assez précises par suite de la netteté des faces. Ils dérivent d'un prisme rhomboïdal droit dont la forme primitive diffère peu de celle de la niobite. Si l'on place horizontalement la plus grande dimension du prisme de telle sorte qu'elle devienne la grande diagonale de la base, et si l'on prend les mêmes notations que pour le niobate de fer, on a

	Niobate de magnésie.	Niobite (calculée).
$a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$ .....	128°, 14	
$h^1 a^{\frac{1}{2}}$ .....	154°, 7	154°, 35
$h^1 g^1$ .....	110°, 20	111°, 54

Pour les autres faces, notamment dans la zone  $g'p$ , les mesures sont incertaines.

### III. — TANTALATE DE MAGNÉSIE.

L'action du chlorure de magnésium fondu sur l'acide tantalique est beaucoup plus lente et exige une température plus élevée que pour l'acide niobique. Il est nécessaire, si l'on veut obtenir des produits nettement cristallisés, de maintenir le mélange d'acide et de chlorure fondu au rouge blanc pendant quatre ou cinq heures. Il est impossible d'éviter dès lors la production de magnésie cristallisée qui reste mélangée aux cristaux d'ailleurs très-petits; ces derniers correspondent probablement eux-mêmes, comme cela se passe pour l'acide niobique, à des sels différents.

Il se produit toujours en grande quantité des plaques hexagonales; mais, ou les cristaux sont trop petits pour être séparés à la pince, ou les lamelles plus larges, examinées au microscope, présentent des inclusions d'octaèdres réguliers de périclase.

L'analyse montre, en effet, que les cristaux renferment une proportion de magnésie supérieure à celle qu'exigerait la formule  $4\text{MgO}, \text{Ta}_2\text{O}_5$ . Cette dernière exigerait :

Acide tantalique.....	73,50
Magnésie.....	26,50
	<hr/>
	100,00

L'analyse de deux échantillons a donné :

		II
Acide tantalique.....	70,16	69,23
Magnésie.....		31,02
		<hr/>
		100,25

C'est aussi la nécessité d'opérer à une température élevée qui a empêché Hiortdahl (1) d'obtenir un zirconate de magnésie exempt de périclase.

---

(1) *Comptes rendus*, t. LXI, p. 213.

## IV. — NIOBATES DE CHAUX.

*Niobate bibasique*,  $2\text{CaO}, \text{Nb}^2\text{O}^5$ . On introduit, dans un creuset de platine, de l'acide niobique bien pur avec un grand excès de chlorure de calcium récemment fondu. Le creuset, protégé, comme toujours, par un creuset de terre, est chauffé pendant cinq à six heures au rouge très-vif; on laisse refroidir lentement dans le fourneau. La masse fondue se dissout très-lentement dans l'eau bouillante acidulée par l'acide chlorhydrique. On lave à plusieurs reprises par décantation et lévigation.

Après tamisage, qui sépare une poussière cristalline, on trie à la pince.

Pour l'analyse la matière est attaquée par le bisulfate d'ammoniaque. L'acide niobique précipité par l'eau renferme encore de la chaux; il est nécessaire de l'attaquer de nouveau par le bisulfate.

On a obtenu ainsi, sur des produits provenant de préparations différentes :

	I.	II.	Oxygène.	
Acide niobique..	70,29	70,32	20,98	Rapport $\frac{1}{2}$ .
Chaux.....	30,07		8,59	
	<u>100,36</u>			

La formule  $2\text{CaO}, \text{Nb}^2\text{O}^5$  exigerait :

Acide niobique.....	70,53
Chaux.....	<u>29,47</u>
	100,00

Ce niobate se présente sous la forme de petits prismes incolores très-brillants, le plus souvent maclés, ce qui fait que les mesures au goniomètre de Wollaston ne sont possibles que sur un petit nombre d'échantillons. Ils appartiennent au système du prisme rhomboïdal droit; quelques cristaux, réduits à l'état de tables rectangulaires très-minces par le développement excessif des faces  $g'$ , peuvent être examinés au microscope polarisant. Le plan des axes optiques est perpendiculaire à  $g'$  et parallèle à l'axe vertical du prisme.

Les mesures effectuées dans la zone du prisme s'écartent peu des angles suivants:

$h'm$ .....	139°
$h'g^2$ .....	112°

Pour la niobite les angles correspondants sont 140° et 111°54'. Les cristaux de niobate bibasique de chaux ne sont pas attaqués par les acides nitrique et chlorhydrique; l'acide sulfurique bouillant les attaque lentement.

L'adjonction de silice au mélange d'acide niobique et de chlorure de calcium donne lieu au même produit; on n'a pu constater la production d'un siliconiobate, quelles que fussent les proportions d'acide niobique et de silice mises en présence.

L'acide titanique et le zircon ne sont attaqués par le chlorure de calcium qu'en présence de la silice, et la pérowskite  $\text{CaO}, \text{TiO}_2$  résulte, comme l'a montré M. Hautefeuille, de la décomposition du sphène qui s'est formé tout d'abord.

*Niobate monobasique*,  $\text{CaO}, \text{Nb}_2\text{O}_5$ . — L'action directe du chlorure de calcium sur l'acide niobique au rouge vif ne donne jamais que le niobate à 2 équivalents de chaux. J'ai pu préparer un niobate monobasique en chauffant, pendant quatre ou cinq heures, dans un creuset de platine, le mélange suivant :

Acide niobique.....	7 parties
Fluorure de calcium.....	2 »
Chlorure de potassium fondu en excès.	

En reprenant par l'eau qui dissout le fondant, on trouve le fond du creuset tapissé de longues aiguilles très-minces légèrement colorées en rose.

On peut remplacer le fluorure par du chlorure de calcium en employant les proportions suivantes :

Acide niobique.....	2
Chlorure de calcium.....	1
Chlorure de potassium fondu en excès.	

L'analyse a été faite en faisant bouillir avec l'acide sulfurique les cristaux finement pulvérisés jusqu'à dissolution complète.

	I.	II.	Oxygène.	
Acide niobique.....	82,60	82,14	24,65	Rapport: 5,03.
Chaux.....	17,16		4,90	
	99,76			

L'analyse I a été faite sur 0,437 de matière préparée avec le chlorure de calcium; l'analyse II sur 0,140 de matière préparée avec le fluorure.

La formule  $\text{CaO}, \text{Nb}^2\text{O}^5$  exigerait :

Acide niobique.....	82,72
Chaux.....	17,28
	100,00

Les cristaux paraissent dériver d'un prisme rhomboïdal droit. Leur forme laminaire ou les macles rendent les mesures très-difficiles.

#### V. — TANTALATE DE CHAUX.

*Tantalate bibasique*,  $2\text{CaO}, \text{Ta}^2\text{O}^5$ . — L'acide tantalique chauffé pendant quelques heures au rouge vif, en présence du chlorure de calcium, ne paraît que très-incomplètement attaqué. A la partie supérieure de la masse et contre les parois du creuset, on trouve de beaux cristaux transparents légèrement colorés en jaune; au fond du creuset, une matière cristalline qu'on prendrait au premier abord pour de l'acide non attaqué et qui est un tantalate monobasique.

Cette dernière matière, maintenue pendant sept à huit heures en présence du chlorure de calcium, à une température voisine de la température de volatilisation de ce dernier, se transforme partiellement en tantalate bibasique.

L'analyse faite sur des cristaux triés à la pince correspond à la formule  $2\text{CaO}, \text{Ta}^2\text{O}^5$  :

		Calculé.	Trouvé.
$2\text{CaO}$ .....	56	20,14	21,05
$\text{Ta}^2\text{O}^5$ .....	222	79,86	79,82
	278	100,00	100,87

Les prismes transparents et légèrement jaunes sont terminés par des

faces planes. C'est un prisme rhomboïdal droit de  $128^{\circ}40'$  modifié par les faces  $h'$  et  $g'$ , toujours très-peu développées. Il peut être considéré comme ayant avec la niobite une zone commune, la zone  $h'a'p$ . L'angle  $h'a'^{\frac{1}{2}}$  est de  $154^{\circ}20'$ ; l'angle calculé avec les formes primitives de la niobite serait de  $154^{\circ}35'$ . Ce même angle ( $154^{\circ}7'$ ) a déjà été trouvé plus haut pour le niobate bibasique de magnésie.

*Tantalate monobasique*,  $\text{CaO}, \text{Ta}^2\text{O}^5$ . — La matière cristalline restée au fond du creuset dans la préparation du tantalate bibasique de chaux présente la composition d'un tantalate monobasique.

On a en effet :

	Trouvé.	Calculé.
Acide tantalique.....	88,60	88,80
Chaux.....	11,25	11,20
	<u>99,85</u>	<u>100,00</u>

La matière examinée au microscope paraît parfaitement homogène.

*Pyrochlore*. — Le pyrochlore se rencontre sous forme d'octaèdres réguliers à Miask, Brewig, Fredrikswärn et Kaiserstuhl. C'est un niobate de chaux renfermant en outre des oxydes de cérium, de lanthane, de fer, de la magnésie, des alcalis et du fluor.

Les pyrochlores de Miask et de Brewig renferment de l'acide titanique et de la thorine, celui de Fredrikswärn de l'acide titanique.

Les cristaux de Kaiserstuhl ne contiennent ni acide titanique ni thorine, d'après les analyses de Knop et Rammelsberg.

L'acide tantalique ne se rencontre dans aucune variété de pyrochlore.

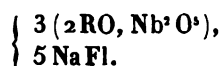
Les analyses de ce minéral ont été reprises par Rammelsberg<sup>(1)</sup>; d'après cet habile chimiste, les pyrochlores seraient des mélanges isomorphiques de fluorure de sodium et de divers niobates et titanates parmi lesquels dominent les sels de chaux.

Pour les pyrochlores de Miask et Brewig :

$$\begin{cases} m(\text{RO}, \text{Nb}^2\text{O}^5), \\ n[\text{RO}(\text{Ti}, \text{Th})\text{O}^5], \\ p\text{NaFl}, \end{cases} \quad m:n:p = 5:4:4,$$

(<sup>1</sup>) *Poggendorff's Annalen*, t. CXLIV, p. 191, et t. CL, p. 198.

et pour le pyrochlore de Kaiserstuhl



Outre qu'il semble bien difficile de faire la part des inclusions étrangères (et nous savons aujourd'hui, par l'étude microscopique d'un grand nombre de minéraux, qu'il existe peu de substances qui en soient exemptes), l'isomorphisme des titanate, niobate de chaux et du fluorure de sodium me semble difficile à admettre.

La perowskite  $\text{CaO}, \text{TiO}^2$  ne cristallise pas dans le système régulier; elle appartient au système quadratique et les niobates  $\text{CaO}, \text{Nb}^2\text{O}^5$  et  $2\text{CaO}, \text{Nb}^2\text{O}^5$ , précédemment étudiés, au système rhombique, la forme du niobate bibasique différant peu de celle de la niobite, très-voisine elle-même d'un prisme carré.

Le pyrochlore ne serait-il pas une combinaison d'un niobate de chaux avec le fluorure de calcium? Cette hypothèse s'appuie sur l'observation suivante :

En maintenant pendant quelques heures du fluorure de calcium fondu en présence d'acide niobique, on constate la production de niobate de chaux, d'un oxyfluorure niobique en trémies non cubiques, et, enfin, de cristaux octaédriques jaune d'ambre, principalement au fond et contre les parois du creuset. En attaquant la masse, grossièrement concassée, par l'acide sulfurique, à une température inférieure à la température d'ébullition, on enlève le fluorure de calcium en excès; lavant à l'eau bouillante et triant à la pince, on peut séparer les cristaux octaédriques, légèrement attaqués à la surface, et qui constituent probablement le pyrochlore; la difficulté de les séparer du fluorure en excès sans les altérer profondément et la petite quantité de matière que j'avais à ma disposition font que les cristaux n'ont pas été étudiés de plus près. C'est un point sur lequel d'ailleurs je compte revenir.

#### VI. — NIOBATE D'YTTRIA.

L'acide niobique se trouvant fréquemment associé à l'yttria dans les minéraux naturels, il était intéressant d'étudier par synthèse et à l'état de pureté des niobates de cette base.

En maintenant au rouge blanc, pendant quatre heures, le mélange suivant :

Acide niobique.....	2 parties,
Chlorure d'yttrium.....	2 »
Chlorure de potassium fondu en excès.	

il reste, après dissolution de l'excès de chlorure dans l'eau chargée d'acide chlorhydrique et lavages prolongés, une poudre blanche, cristalline, composée de petits octaèdres, qui, d'après l'examen au microscope, dans la lumière polarisée parallèle, n'appartiennent pas au système cubique.

L'analyse faite par le bisulfate d'ammoniaque donne :

		Oxygene.
Acide niobique .....	52,33	16,62
Ytria .....	47,19	9,47
	<u>99,52</u>	

Le rapport de l'oxygène de l'acide à l'oxygène de la base est ici de 1,65, soit  $\frac{5}{3}$ .

La formule  $3 \text{YO}, \text{Nb}^2 \text{O}^5$  exigerait ('):

Acide niobique .....	52,7
Ytria .....	<u>47,3</u>
	100,00

Ce sel est à rapprocher de la fergusonite du Groënland qui se présente sous forme d'octaèdres quadratiques hémiedres. D'après les analyses de Rammelsberg (<sup>2</sup>), ce minéral peut être considéré comme un mélange isomorphique de niobates et de tantalates tribasiques d'yttria et d'erbine.

Il se produit en même temps, dans l'opération précédente, de longs prismes très-déliés, que l'on peut séparer par tamisage du produit précédent, mais que je n'ai obtenus qu'en trop petite quantité pour les soumettre à l'analyse. Ces cristaux représentent probablement un autre niobate moins riche en yttria, peut-être  $2 \text{YO}, \text{Nb}^2 \text{O}^5$ , un des principes constituants des yttrotantalites. Suivant Rammelsberg, la tyrite de

(') L'équivalent de l'yttria employée dans cette préparation était 32.

(<sup>2</sup>) RAMMELSBERG, *Pogg. Annalen*, t. CL, p. 198.



Halle, près Arendal, est un niobate bibasique d'yttria, et les variétés d'yttrotantalites d'Ytterby, de Kårarfvet, des niobotantalates bibasiques de la même base. Il est rare de rencontrer des cristaux d'yttrotantalites; d'après M. Nordenskjöld, ils appartiendraient au système rhombique, la forme primitive différant peu de celle de la tantalite.

## VII. — NIOBATE DE MANGANÈSE.

Je n'ai pu obtenir qu'un niobate monobasique, en maintenant au rouge blanc pendant une heure environ.

Acide niobique. .... 1 partie  
Protofluorure de manganèse..... 1 »  
Chlorure de potassium fondu en excès.

Un refroidissement lent dans le fourneau favorise le développement des cristaux.

Ce sont des prismes rhombiques roses, transparents, se présentant parfois sous forme de larges lames rectangulaires.

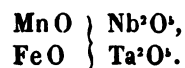
La densité prise à 18 degrés est de 4,94.

La composition est celle d'un niobate manganeux  $\text{MnO}$ ,  $\text{Nb}^2\text{O}^5$ . On a en effet :

		Calculé.	Trouvé.
$\text{MnO}$ .....	35,5	20,94	21,15
$\text{Nb}^2\text{O}^5$ .....	134	79,06	79,13
	<u>169,5</u>	<u>100,00</u>	<u>100,28</u>

Même en présence d'un excès de fluorure manganeux, je n'ai pu obtenir de produits différents.

Les *niobites* renferment toutes du manganèse et doivent être considérées, d'après les analyses de Marignac, comme des niobotantalates de protoxyde de fer et de manganèse.



Le niobate manganeux est donc un des constituants de ce groupement isomorphique. Les mesures goniométriques effectuées sur des cris-

taux très-nets ne diffèrent pas sensiblement des mesures faites par Schrauf<sup>(1)</sup> et M. Des Cloizeaux<sup>(2)</sup> sur des cristaux du Groënland.

L'angle du prisme est de  $100^{\circ}40'$  et l'on a, pour le rapport d'un des côtés de la base à la hauteur,

$$\frac{b}{h} = \frac{1000}{671,62}.$$

	Mesuré.	Calculé.	D'après M. Des Cloizeaux.
$h'm$ .....	$140^{\circ}.20'$		$140^{\circ}.00'$
$h'h^{\frac{4}{3}}$ .....	162.19	$162^{\circ}.19'$	
$h'h^{\frac{1}{3}}$ .....	158.00	157.33	
$h'g^{\frac{1}{3}}$ .....	127.00 environ	125.55	
$h'g^{\frac{4}{3}}$ .....	99.28	99.47	
$h'a^{\frac{1}{3}}$ .....	117.44		118.20
$a^{\frac{1}{3}}p$ .....	152.16	152.07	151.30
$h'a^{\frac{1}{2}}$ .....	153.20	154.35	

La niobite du Groënland a sa forme primitive définie, d'après M. Des Cloizeaux, par l'angle de  $100^{\circ}40'$  et par le rapport

$$\frac{b}{h} = \frac{1000}{675,69}.$$

Les faces  $h^{\frac{4}{3}}$ ,  $g^{\frac{1}{3}}$ ,  $g^{\frac{4}{3}}$  et  $a^{\frac{1}{2}}$  n'ont pas été observées sur les cristaux du Groënland.

#### VIII. — NIOBATE DE FER.

C'est de tous les niobates celui qu'il est le plus difficile d'obtenir à l'état de pureté ou en cristaux mesurables.

On peut le préparer, comme le niobate de manganèse, en portant au rouge blanc, pendant deux heures, dans un creuset de platine, le mélange suivant :

Acide niobique .....	3 parties.
Protofluorure de fer.....	2 »
Chlorure de potassium fondu en excès.	

On obtient, après traitement par l'eau, de gros prismes noirs d'acier,

(<sup>1</sup>) *Minéralogie* de Dana.

(<sup>2</sup>) DES CLOIZEAUX, *Annales des Mines*, t. VIII, p. 386.

fibreux et fréquemment mélangés d'acide niobique cristallisé, ce qui rend les mesures difficiles et les analyses incertaines.

Le même procédé qui a permis à M. Debray (1) d'obtenir de beaux cristaux de wolfram ne donne ici que des résultats très-imparfaits. Lorsqu'on fait passer au rouge blanc un courant d'acide chlorhydrique sur un mélange intime d'acide niobique et de sesquioxyde de fer, on obtient, outre de l'acide niobique cristallisé, de petits prismes très-brillants, noir de fer; mais ces cristaux ne se produisent jamais qu'en très-minime quantité.

#### IX. — NIOBATE DE FER ET DE MANGANÈSE.

La présence du manganèse semble faciliter la production de cristaux nets, mais toujours très-petits, de niobite.

C'est ainsi qu'en portant au rouge vif le mélange suivant :

Acide niobique . . . . .	5 parties,
Protofluorure de fer . . . . .	4 »
Protofluorure de manganèse . . . . .	2 »

on obtient de petits cristaux noirs, très-brillants, rappelant, par leur forme ramassée, les cristaux de niobite du Groënland.

Leur densité est de 5,24.

L'analyse donne :

Acide niobique . . . . .	77,99
Protoxyde de fer . . . . .	14,89
Protoxyde de manganèse . . . . .	7,22
	<hr/>
	100,10

ou très-sensiblement



Cette composition diffère peu de celle de la niobite de Chanteloube, près de Limoges, découverte et analysée par M. Damour et qui renferme :

Acide niobique . . . . .	78,74
Protoxyde de fer . . . . .	14,50
Protoxyde de manganèse . . . . .	7,17
	<hr/>
	100,41

(1) DEBRAY, *Comptes rendus*, t. LV, p. 287.

La densité de cette dernière variété (5,72) est un peu plus élevée que celle de la variété artificielle, mais on ne doit pas oublier que la niobite de Limoges renferme une assez forte proportion d'acide tantalique, ce qui, tout en élevant la densité, augmente en même temps la proportion d'acide métallique.

### CONCLUSIONS.

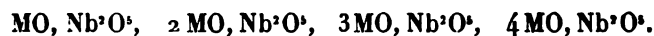
I. Les combinaisons du carbone et du tantale avec l'azote n'étaient pas connues. J'ai décrit pour le tantale les azotures  $Ta^6Az^5$ ,  $Ta^3Az$  et le carbure cristallisé  $Ta^3C^2$ .

Le niobium fournit également un carbure  $Nb^3C^2$  et l'azoture  $Nb^3Az$ .

Toutes les fois qu'on porte les acides niobique et tantalique à une température élevée en présence du charbon, il se forme des composés renfermant de l'azote et du carbone, et qui ne sont que des mélanges d'azoture et de carbure.

II. J'ai montré que le tantale pouvait donner des oxyfluosels analogues à ceux que l'on obtient si facilement avec le niobium.

III. L'acide niobique forme, en se combinant par voie sèche à différentes bases, quatre classes de sels



On n'a observé la formation d'un niobate tétrabasique qu'avec la magnésie.

J'ai étudié pour l'acide tantalique quelques sels correspondants. Il m'a été impossible d'obtenir des composés analogues aux apatites et aux wagnérites, si faciles à préparer avec les acides phosphorique et arsénique, et l'acide vanadique lui-même.



---

**OBSERVATIONS**  
**SUR**  
**DEUX POINTS DU CALCUL DES VARIATIONS,**

PAR M. CH. MÉRAY,  
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

---

**I. — SUR LE CALCUL DE LA VARIATION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE.**

Le développement de la variation d'une intégrale définie, qui conduit immédiatement aux conditions du maximum ou du minimum de cette intégrale, s'obtient habituellement de deux manières différentes, selon que les limites de l'intégrale sont données ou indéterminées. Les calculs sont simples et directs dans le premier cas, mais non dans le second, soit qu'on le ramène au premier en changeant la variable d'intégration, soit que l'on introduise dans le raisonnement la quantité auxiliaire, désignée ordinairement par la lettre  $\omega$ . Ces procédés ont tous deux quelques inconvénients pour l'enseignement : ils compliquent sensiblement les calculs et rompent l'uniformité de la théorie ; le dernier même, qui est le plus usité, me semble comporter une obscurité réelle par la nécessité qu'il impose d'introduire cette quantité  $\omega$ , qui n'est pas une variation, et surtout de considérer la variable d'intégration comme dépendant d'autre chose que d'elle-même. La méthode que je vais indiquer s'applique indistinctement aux deux cas et n'est sujette à aucune de ces critiques.

Pour fixer les idées, je considérerai simplement l'intégrale définie,

$$S = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y, y^{(n)}] dx,$$

où  $y$  représente une fonction indéterminée de  $x$ ,  $y^{(m)}$  sa dérivée  $m^{\text{ième}}$ , et  $x_0, x_1$  des quantités indéterminées;  $y_0, y_0^{(i)}$  d'une part,  $y_1, y_1^{(i)}$  d'autre part, désigneront les valeurs que prennent les fonctions  $y, \frac{d^i y}{dx^i}$  pour  $x = x_0$  et pour  $x = x_1$ . Enfin, après avoir remplacé, dans l'intégrale S,  $x_0$  et  $x_1$  par des fonctions indéterminées d'une nouvelle variable  $\alpha$ ,  $y$  par une fonction indéterminée des variables indépendantes  $x, \alpha$ , j'appellerai *variations* des quantités  $x_0, x_1, y, y^{(i)}$ , et je représenterai par la caractéristique  $\delta$  leurs différentielles partielles par rapport à  $\alpha$ . On aura ainsi

$$\delta x_0 = \frac{dx_0}{d\alpha} d\alpha, \quad \delta x_1 = \frac{dx_1}{d\alpha} d\alpha; \quad \delta y = \frac{dy}{d\alpha} d\alpha, \quad \delta y^{(i)} = \frac{d y^{(i)}}{d\alpha} d\alpha.$$

Cela posé, l'intégrale S est devenue aussi une fonction de  $\alpha$ , et le calcul de sa variation, c'est-à-dire de sa différentielle par rapport à  $\alpha$ , s'opère par l'application des quatre principes suivants :

1° La variation  $\delta S$  de l'intégrale proposée est égale à

$$F[x_1, y_1, y_1^{(m)}] \delta x_1 - F[x_0, y_0, y_0^{(m)}] \delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} dx \cdot \delta F[x, y, y^{(m)}].$$

2° La variation  $\delta F$  d'une fonction composée de  $y$  et de ses dérivées, telle que  $F[x, y, y^{(m)}]$ , est égale à

$$\frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{d y^{(m)}} \delta y^{(m)}.$$

3° La variation  $\delta y^{(i)}$  d'une dérivée d'ordre quelconque de  $y$  par rapport à  $x$  est égale à

$$\frac{d^i}{dx^i} \delta y.$$

4° La valeur  $[\delta y^{(i)}]_0$  que prend, quand on attribue à  $x$  une valeur égale à l'une des limites de l'intégrale,  $x_0$  par exemple, la variation  $\delta y^{(i)}$ , est égale à l'excès de la variation de  $y_0^{(i)}$ , valeur de  $y^{(i)}$  pour  $x = x_0$ , sur le produit de  $y_0^{(i+1)}$  par  $\delta x_0$ .

Les deux premiers principes reposent sur les règles de la différentiation par rapport au paramètre  $\alpha$ , soit d'une intégrale définie le con-

tenant tant dans ses limites que dans la fonction placée sous le signe  $f$ , soit d'une fonction composée de  $x$  et de fonctions simples des variables indépendantes  $x, \alpha$ . Le troisième résulte de l'indifférence de l'ordre de différentiations quelconques exécutées par rapport à  $x$  et à  $\alpha$  sur une même fonction de ces deux variables indépendantes; et il est inutile d'insister autrement sur leur démonstration.

Le quatrième s'établit en remarquant que  $y_0^{(i)}$  est une fonction *composée* de  $\alpha$ ; car,  $y$  étant, par hypothèse, une fonction des variables indépendantes  $x, \alpha$ ,  $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}$  est aussi une certaine fonction  $\varphi(x, \alpha)$  des mêmes variables, et  $y_0^{(i)} = \varphi(x_0, \alpha)$  est une fonction de  $\alpha$  seulement, où ce paramètre entre de deux manières, savoir: immédiatement et, en outre, par l'intermédiaire de  $x_0$ , qui est fonction de  $\alpha$ . Il en résulte, par la théorie des fonctions composées,

$$\frac{d\varphi(x_0, \alpha)}{d\alpha} d\alpha = \left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right) d\alpha + \left(\frac{d\varphi}{dx_0}\right) \frac{dx_0}{d\alpha} d\alpha,$$

formules où les parenthèses indiquent des dérivées partielles; mais on a évidemment

$$\frac{d\varphi(x_0, \alpha)}{d\alpha} d\alpha = \delta y_0^{(i)}, \quad \left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right) d\alpha = [\delta y^{(i)}]_0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx_0}\right) = y_0^{(i+1)}, \quad \frac{dx_0}{d\alpha} d\alpha = \delta x_0,$$

et la formule précédente devient ainsi

$$\delta y_0^{(i)} = [\delta y^{(i)}]_0 + y_0^{(i+1)} \delta x_0;$$

d'où l'on tire bien

$$(1) \quad [\delta y^{(i)}]_0 = \delta y_0^{(i)} - y_0^{(i+1)} \delta x_0.$$

On a de même, à l'autre limite,

$$(2) \quad [\delta y^{(i)}]_1 = \delta y_1^{(i)} - y_1^{(i+1)} \delta x_1.$$

Cela posé, l'application des trois premiers principes donne, comme on le sait,

$$\delta S = F[x_1, y_1, y_1^{(m)}] \delta x_1 - F[x_0, y_0, y_0^{(m)}] \delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} dx \left[ \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dy^{(m)}} \frac{d^m \delta y}{dx^m} \right];$$

l'intégration réitérée par parties du second terme de la fonction placée

sous le signe  $\int$  transforme l'intégrale en

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \left[ \frac{dF}{dy} + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \frac{dF}{dy^{(m)}} \right] \delta y,$$

et ajoute à la quantité extérieure au signe  $\int$  la différence

$$\left\{ \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{i+1} \left[ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} \frac{dF}{dy^{(m)}} \right] \frac{d^{m-i} \delta y}{dx^{m-i}} \right\}_{x=x_1} - \left\{ \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{i+1} \left[ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} \frac{dF}{dy^{(m)}} \right] \frac{d^{m-i} \delta y}{dx^{m-i}} \right\}_{x=x_0}.$$

L'application du troisième principe aux facteurs  $\left( \frac{d^{m-i} \delta y}{dx^{m-i}} \right)_1, \left( \frac{d^{m-i} \delta y}{dx^{m-i}} \right)_0$ , des termes généraux de ces sommes les change en  $[\delta y^{(m-i)}]_1, [\delta y^{(m-i)}]_0$ , quantités que les relations (1) et (2) permettent d'écrire

$$\delta y_1^{(m-i)} - y_1^{(m-i+1)} \delta x_1, \quad \delta y_0^{(m-i)} - y_0^{(m-i+1)} \delta x_0,$$

moyennant quoi  $\delta S$  revêt définitivement la forme d'une fonction linéaire et homogène des variations de  $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}, x_1, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(m-1)}$ , augmentée d'une intégrale définie portant sur le produit par  $\delta y$ , d'une certaine fonction composée de  $x, y, y', \dots, y^{(2m)}$ .

Si quelque limite de l'intégrale  $S$  est donnée, il faut remplacer partout sa variation par zéro, et par suite la valeur correspondante de  $\delta y^{(m-i)}$  par la simple variation de la valeur correspondante de  $y^{(m-i)}$ . Dans tous les cas, et sauf la transformation finale des valeurs des variations aux limites de l'intégrale, notre méthode n'exige ainsi que les considérations avec lesquelles on traite habituellement le cas des limites fixes.

## II. — SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONDITIONS DE MAXIMUM OU DE MINIMUM D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

Considérons, pour fixer les idées, une intégrale définie où la fonction sous le signe  $\int$  dépend d'une seule fonction indéterminée  $y$  de la variable d'intégration  $x$ . Après avoir mis la variation de cette intégrale sous la forme

$$(1) \quad A + \int_{x_0}^{x_1} dx \cdot B \delta y,$$



où  $A$  est une fonction linéaire et homogène de  $\delta x_0, \delta y_0, \delta y'_0, \dots, \delta x_1, \delta y_1, \delta y'_1, \dots$ , et  $B$  une fonction composée de  $x, y, y', \dots$ , on dit que la nullité indéfinie de cette variation entraîne les conditions séparées

$$(2) \quad A = 0, \quad B = 0,$$

parce que la détermination préalable, en fonction du paramètre  $\alpha$ , des valeurs aux limites de  $x, y, y', \dots$ , qui entrent dans  $A$  par elles-mêmes ou par leurs variations, n'en laisse pas moins  $y$  fonction indéterminée de  $x$  et de  $\alpha$  dans l'intervalle  $x_0, x_1$ . Ce raisonnement laisse à désirer; car, après la détermination partielle dont il s'agit,  $y$  n'est plus fonction arbitraire de  $x$  et de  $\alpha$  entre  $x_0$  et  $x_1$ , cette fonction ne pouvant évidemment être égale à aucune de celles qui, pour  $x = x_0$  et  $x = x_1$ , ne se réduisent pas, elles et leurs dérivées, aux fonctions de  $\alpha$ , antérieurement choisies pour les valeurs initiales et finales de  $y, y', y'', \dots$ . Mais voici une manière très-simple de procéder en toute rigueur.

En désignant par  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(k_0-1)}; y_1, y'_1, \dots, y_1^{(k_1-1)}$  les valeurs aux limites de  $y$  et de ses dérivées qui figurent dans  $A$ , soit par elles-mêmes, soit par leurs variations, toute fonction  $y$  de  $x$  et de  $\alpha$ , *olotrope* <sup>(1)</sup> dans l'intervalle  $x_0, x_1$ , qui se réduit à  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(k_0-1)}$ , elle et ses  $k_0 - 1$  premières dérivées par rapport à  $x$ , pour  $x = x_0$ , et à  $y_1, y'_1, \dots, y_1^{(k_1-1)}$ , elle et ses  $k_1 - 1$  premières dérivées par rapport à  $x$ , pour  $x = x_1$ , est de la forme

$$(3) \quad y = H + (x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1} \eta,$$

où  $H$  désigne une fonction olotrope de  $x$  et de  $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(k_0-1)}, x_1, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(k_1-1)}$ , choisie au hasard parmi celles qui satisfont à ces deux séries de conditions extrêmes, et  $\eta$  une fonction de  $x$  (et de  $\alpha$ ) tout à fait arbitraire. Effectivement la différence  $y - H$  s'annule évidemment avec ses  $k_0 - 1$  premières dérivées pour  $x = x_0$ , et avec ses  $k_1 - 1$  premières dérivées pour  $x = x_1$ , et par suite, en vertu de la théorie des fonctions d'une seule variable, se réduit au produit de  $(x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1}$  par une certaine fonction olotrope dans l'inter-

---

(1) J'ai désigné ainsi, dans une autre occasion, les fonctions développables par la série de Taylor, en faisant remarquer qu'à elles seules on est en droit d'appliquer les propositions générales du Calcul différentiel et intégral.

valle  $x_0, x_1$ . D'ailleurs toutes les fonctions fournies par la formule (3) satisfont évidemment aux conditions auxquelles  $H$  et, par suite,  $\gamma$  sont assujetties en  $x_0$  et  $x_1$ .

Cela posé, comme la différentiation de la relation (3) par rapport à  $x$  donne

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \partial \gamma &= \partial H - [(x - x_0)^{k_0-1} (x - x_1)^{k_1-1} \eta] [k_0 (x - x_1) \delta x_0 + k_1 (x - x_0) \delta x_1] \\ &\quad + (x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1} \delta \eta, \end{aligned} \right.$$

où  $\partial H$  est évidemment une fonction linéaire et homogène des variations de  $x_0, y_0, \dots, y_0^{k_0-1}, x_1, y_1, \dots, y_1^{k_1-1}$ , la variation (1) prend la forme

$$(5) \quad A' + \int_{x_0}^{x_1} dx (x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1} B' \delta \eta,$$

$A'$  représentant ici l'ensemble des termes de  $A$  et de ceux de même nature fournis par les deux premières parties du second membre de la formule (4), et  $B'$  étant ce que devient l'expression différentielle  $B$ , après la substitution à  $\gamma$ , du second membre de la relation (3).

A présent,  $\delta \eta$  étant *tout à fait* arbitraire entre  $x_0$  et  $x_1$ , le raisonnement habituel permet d'établir rigoureusement que la nullité indéfinie de la variation (5) entraîne l'identité

$$(x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1} B' = 0,$$

puis

$$(6) \quad B' = 0$$

entre  $x_0$  et  $x_1$ , et finalement de  $x_0$  à  $x_1$  *inclusivement*; car  $B'_0, B'_1$  sont les limites vers lesquelles tend  $B$  quand  $x$  tend successivement vers  $x_0$  et vers  $x_1$ . Il suffit actuellement d'exécuter dans l'identité (6) la substitution inverse de celle qu'exprime la relation (3) pour retrouver successivement la seconde et la première des conditions (2).



---

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE  
SUR LES  
PHÉNOMÈNES D'INDUCTION ÉLECTRODYNAMIQUE,

PAR M. L. MOUTON,  
AGRÉGÉ PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE.

---

HISTORIQUE.

La reprise de l'étude, au point de vue statique, des phénomènes présentés par les piles a, sinon enfanté, du moins justifié, éclairci et étendu le système théorique auquel on en rattache aujourd'hui l'ensemble. On peut donner plusieurs raisons pour expliquer l'abandon dans lequel furent laissées, surtout en France, ces études statiques dont le génie de Volta avait su tirer un si merveilleux parti : d'abord les difficultés d'un maniement précis des électroscopes à feuilles d'or ou à pailles qu'avait employés Volta ; en second lieu, le peu d'importance pratique de ces phénomènes devant les prodigieux effets que produisait coup sur coup la pile fermée ; et enfin surtout le manque de netteté théorique qu'offrait aux esprits élevés à l'école de Coulomb cette tension que Volta transmettait par communication immédiate, sans se soucier de la forme géométrique des corps, qui paraissait appartenir aussi bien à l'intérieur qu'à la surface des conducteurs, sorte de température électrique complètement ignorée de Coulomb, et où Volta avait été conduit par les voies impénétrables du génie (<sup>1</sup>).

---

(<sup>1</sup>) Ces lignes étaient écrites quand j'ai lu, dans la Préface du *Traité d'électricité statique* de M. Mascart (Paris, 1876), le nom de *tension de Volta* donné au potentiel. Les expressions. *Ann. de l'Éc. Normale. 2<sup>e</sup> Série. Tome VI. — JUIN 1877.*

Si l'on veut une preuve de ce que j'avance, que l'on voie comment Biot faisait l'expérience classique destinée à mettre en évidence la tension électrique de la lame de cuivre mise en contact avec une lame de zinc tenue à la main; au lieu de mettre pendant le contact la lame de cuivre en communication avec l'un des plateaux de l'électroscope, il la séparait de celle de zinc, puis allait la décharger à l'électroscope, et recommençait. « Après sept ou huit contacts de ce genre, dit-il, si l'on enlève le plateau supérieur du condensateur, les pailles divergent très-fortement en vertu de l'électricité déposée dans le plateau inférieur par les contacts successifs du disque métallique <sup>(1)</sup>. »

Il est bien curieux de voir comme Ampère sépare nettement ces deux manifestations, statique et dynamique, de l'électricité, essaye de les relier l'une à l'autre, mais est obligé de se tenir dans des généralités insaisissables au calcul à cause de la complexité de cette tension, mesurée par des attractions et des répulsions, qu'il a seule dans la pensée.

« L'action électromotrice, dit-il, se manifeste par deux sortes d'effets que je crois devoir d'abord distinguer par une définition précise : j'appellerai le premier *tension électrique*, le second *courant électrique*..... Dans le second cas, il n'y a plus de tension électrique, les corps légers ne sont plus sensiblement attirés, et l'électromètre ordinaire ne peut plus servir à indiquer ce qui se passe dans le corps; cependant l'action électromotrice continue d'agir; car, si de l'eau par exemple, un acide, un alcali ou une dissolution saline font partie du circuit, ces corps sont décomposés..... Mais ces effets cessent dès qu'on interrompt le circuit, que les tensions se rétablissent, et que les corps légers sont de nouveau attirés, ce qui prouve bien que ces tensions ne sont pas cause de la décomposition de l'eau, etc.

» Lorsque les deux corps ou les deux systèmes de corps, entre lesquels l'action électromotrice a lieu, sont en communication par des corps conducteurs entre lesquels il n'y a pas une autre action électro-

---

sions *tension de Coulomb*, *tension de Volta*, qui peuvent se définir d'une façon purement expérimentale, ne seraient pas seulement un hommage rendu à de grands noms, mais pourraient peut-être lever les scrupules des physiciens qui hésitent, non sans raison, à emprunter au calcul des considérations *à priori*.

(<sup>1</sup>) Biot, *Traité de Physique expérimentale et mathématique*, Paris, 1816; t. II, p. 471.

motrice égale et opposée à la première, ce qui maintiendrait l'état d'équilibre électrique et, par conséquent, les tensions qui en résultent, ces tensions disparaissent ou du moins deviennent très-petites, et il se produit les phénomènes indiqués ci-dessus comme caractérisant ce second cas. Mais, comme rien n'est d'ailleurs changé dans l'arrangement des corps entre lesquels se développait l'action électromotrice, on ne peut douter qu'elle ne continue d'agir; et, comme l'attraction mutuelle des deux électricités, mesurée par la différence des tensions électriques, qui est devenue nulle ou a considérablement diminué, ne peut plus faire équilibre à cette action, on est généralement d'accord qu'elle continue à porter les deux électricités dans les deux sens où elle les portait auparavant, en sorte qu'il en résulte un double courant, l'un d'électricité positive, l'autre d'électricité négative, partant en sens opposés des points où l'action électromotrice a lieu et allant se réunir dans la partie du circuit opposée à ces points. Les courants dont je parle vont en s'accéléralant jusqu'à ce que l'inertie des fluides électriques et la résistance qu'ils éprouvent par l'imperfection même des meilleurs conducteurs fassent équilibre à la force électromotrice, après quoi ils continuent indéfiniment avec une vitesse constante tant que cette force conserve la même intensité; mais ils cessent toujours à l'instant où le circuit vient à être interrompu. C'est cet état de l'électricité dans une série de corps électromoteurs et conducteurs que je nommerai, pour abrégé, *courant électrique* (1).

Que la tension, dont le nom revient si souvent dans ce passage, soit celle de Volta, et cette page magnifique, que je n'ai pu m'empêcher de citer tout entière, contient toute la théorie mathématique que M. Kirchhof a donnée vingt-neuf ans plus tard (2).

Mais c'est dans le Mémoire même dont j'ai extrait les lignes qui précèdent qu'Ampère donne à l'instrument nouveau, basé sur la récente expérience d'Ørstedt, son nom de *galvanomètre*, instrument dont la sûreté et la commodité pour l'étude du courant vont faire complètement abandonner les recherches statiques.

Il a fallu la justification expérimentale des lois si singulièrement

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 59 (1820).

(2) *Poggendorff's Annalen*, Band. LXXVIII, Seit. 506 (1849).

établies par Ohm (<sup>1</sup>), puis les travaux mathématiques des Green, des Maxwell, des Thomson, pour remettre en honneur les études statiques, amener la création de nouveaux électromètres ou le perfectionnement des anciens, et finalement édifier la belle théorie mathématique de M. Kirchhof (<sup>2</sup>).

J'ai cru devoir tracer ces quelques lignes de l'histoire des piles, parce que c'est à elle que je dois rapporter l'idée du travail qui va suivre, et que, d'ailleurs, elle me paraît éclairer celle des phénomènes d'induction d'un jour particulier.

Quand Faraday les découvrit en 1831 (<sup>3</sup>), le galvanomètre était le seul instrument dont on se servit avec les piles ou autour d'elles. Aussi l'illustre physicien anglais n'étudia-t-il l'action inductrice qu'en tant que produite dans un circuit fermé renfermant un galvanomètre. Il examina du reste les différents modes de production de cette action, constituant les importants chapitres de cette grande science. Je ne signalerai, parmi les nombreux travaux dont cette découverte fut le point de départ, que ceux qui se rapportent spécialement à l'induction produite par l'établissement ou la rupture du courant inducteur.

Dans un Mémoire sur l'extra-courant, Masson (<sup>4</sup>) appelle l'attention sur l'étincelle et les effets physiologiques produits par l'induction. C'est

(<sup>1</sup>) Une des plus curieuses individualités que présente l'*Histoire des piles* est celle de Ohm. En reprenant la tension de Volta, c'est-à-dire en accordant à l'électricité des propriétés si complètement en désaccord avec les idées que l'on avait alors de ce fluide, a-t-il obéi comme Volta à l'intuition d'un génie que le reste de ses écrits ne justifierait peut-être pas suffisamment, ou bien, disciple de Fourier, a-t-il voulu simplement, en calquant ce grand maître, faire une de ces études *a priori* qu'affectionnent les Allemands? Il y aurait là un sujet d'étude assez tentant, ..., si Ohm était un Français.

(<sup>2</sup>) Outre le Mémoire cité plus haut, voir l'analyse qu'en a donnée Verdet dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XLI, p. 496; aussi *Œuvres de Verdet, Conférences de Physique faites à l'École Normale*, publiées par M. Gernez, première Partie, p. 329. — BAUOT, *Théorie mécanique de la chaleur*, Paris, 1869, p. 259.

(<sup>3</sup>) Les recherches de Faraday sur ce sujet ont été lues le 24 novembre 1831 à la Société royale de Londres; une lettre de Faraday à M. Hachette, lui annonçant ses expériences, fut traduite et lue à l'Académie des Sciences de Paris, le 26 décembre 1831; une copie en fut imprimée dans le *Temps* du 28 décembre. La lecture de Faraday est imprimée dans les *Philosophical Transactions of the royal Society of London* de l'année 1832, p. 125 et suiv., sous le titre : *Experimental researches in electricity*; une traduction en a été donnée aux *Annales de Chimie et de Physique*, t. L, 2<sup>e</sup> série (1832).

(<sup>4</sup>) *Annales de Chimie et de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. LXVI (1837).

à propos de cette étude qu'il imagine une roue interruptrice destinée à multiplier les effets, première ébauche des rhéotopes, interrupteurs, disjoncteurs, etc., qui furent depuis à peu près universellement employés dans les recherches sur l'induction.

De 1835 à 1840 parurent les importants travaux de M. Henry, de Princeton, sur les courants induits d'ordre supérieur <sup>(1)</sup>. Ce physicien se servit comme moyen d'investigation de l'aimantation produite par les courants induits sur de petites aiguilles d'acier.

M. Abria a donné un résumé des travaux de M. Henry <sup>(2)</sup>. C'est là que se trouvent développées les considérations théoriques devenues classiques pour expliquer le mécanisme de l'induction <sup>(3)</sup>.

Dans ces explications figurent à chaque instant les mots *quantité*, *intensité*, *tension*, pour désigner des fonctions qu'il est malheureusement difficile, non pas peut-être de définir théoriquement, mais de rendre directement et sûrement, surtout pour ce qui est des dernières, accessibles à des mesures directes. L'introduction de telles locutions dans les sciences expérimentales entraîne souvent de fâcheuses conséquences, et le cas actuel en est une preuve. Pour ne citer qu'un exemple, que signifient les expressions *décharge de quantité* et *décharge de tension*, *courant de quantité* et *courant de tension*, qu'il n'est pas rare de rencontrer dans les travaux qui nous occupent?

Les définitions théoriques qui semblent ressortir le plus nettement des Mémoires des physiciens qui ont employé ces termes sont les suivantes, que j'emprunte textuellement à M. Bertin <sup>(4)</sup>:

« Lorsque le courant est constant (formule  $I = \frac{E}{R}$ ), la quantité d'électricité transportée dans un certain temps  $\theta$  est  $I\theta$ ; et, si le temps est égal à 1, cette quantité est I, de sorte que les mots *intensité* et *quantité* peuvent être pris l'un pour l'autre dans ce cas, mais seulement

<sup>(1)</sup> *Transactions of the american philosophical Society*, années 1835 et suiv. — *Philosophical Magazine*, mars, avril et juillet 1840.

<sup>(2)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. III, p. 394 et suiv. (1841).

<sup>(3)</sup> VERDET, *OEuvres, Conférences faites à l'École Normale*, publiées par M. Gernez, première Partie, p. 390. — JAMIN, *Cours de Physique de l'École Polytechnique*, 2<sup>e</sup> édition (1869); t. III, p. 283, 287. — GAVARRET, *Traité d'électricité*, t. II, p. 220 (1858).

<sup>(4)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXII, 4<sup>e</sup> série (1871). — *Revue des travaux de Physique publiés à l'étranger*, p. 487.

dans ce cas. Si, au contraire, le courant est variable, l'intensité l'est aussi; c'est à chaque instant la quantité d'électricité que le courant transporterait par seconde, s'il restait indéfiniment dans l'état où il est à cet instant-là. Mais cet état, au lieu d'être constant, ne dure qu'un temps infiniment petit  $dt$ ; si donc on désigne par  $i$  l'intensité au temps  $t$ , la quantité d'électricité transportée dans le temps  $dt$  sera  $i dt$ , et la quantité totale sera  $q = \int i dt$ , en étendant cette intégrale à toute la durée du courant.

» On peut chercher à représenter les variations du courant par une courbe dont l'abscisse serait le temps et l'ordonnée l'intensité; la quantité du courant serait l'aire de la courbe, et la tension serait caractérisée par l'intensité maximum. Ainsi, en résumé, quand on sera parvenu à tracer la courbe des courants induits, en prenant pour abscisse le temps et pour ordonnée l'intensité, la tension sera indiquée par l'ordonnée maximum, et la quantité sera représentée par l'aire de la courbe. »

Au point de vue théorique, on peut objecter à ces définitions que le  $I$  de Ohm est indépendant non-seulement du temps, mais du point considéré du circuit. En est-il de même du  $i$  variable à un moment donné? Que deviennent alors les définitions qui précèdent? Et en supposant ce point éclairci, que de difficultés dans la traduction des données expérimentales pour les amener à exprimer les fonctions qui viennent d'être définies! Que d'à peu près dont la conséquence est une discordance complète des résultats obtenus par divers expérimentateurs!

Ce fut M. Abria qui rechercha le premier « les lois des courants d'induction », ainsi qu'il le dit lui-même au début de son premier Mémoire <sup>(1)</sup>. Comme M. Henry, il se sert de l'aimantation d'aiguilles d'acier, trouvant que « le galvanomètre n'est pas, pour la sensibilité, comparable au procédé d'aimantation ». « Ce moyen de comparaison, dit M. Pouillet <sup>(2)</sup>, ne peut pas sans doute donner des rapports d'intensité parfaitement rigoureux; mais il conduit du moins à des ap-

---

<sup>(1)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. III (1841), p. 5.

<sup>(2)</sup> *Éléments de Physique expérimentale et de Météorologie*, 7<sup>e</sup> édition (1856), t. I, p. 725.



proximations qu'il faut bien accepter, en attendant que l'on trouve une méthode plus sûre. »

M. Abria étudie successivement l'influence du nombre de tours du fil inducteur, de la distance, de la section et de la conductibilité du fil induit.

Dans un second Mémoire <sup>(1)</sup>, il étudie les effets désignés habituellement sous le nom d'*influence des diaphragmes*, et les explique, comme on le fait encore, par les courants induits d'ordre supérieur; puis, constatant la différence des effets généraux, selon qu'on les mesure au galvanomètre ou à l'aimantation, il passe à l'étude des « autres effets physiologiques, calorifiques, lumineux ou chimiques que peuvent produire les courants d'induction ».

Préoccupé d'étudier l'état électrotonique (*electro-tonic state*) par lequel Faraday <sup>(2)</sup> avait tenté d'abord d'expliquer les phénomènes de l'induction, Marianini <sup>(3)</sup> essaye de ne fermer le circuit induit qu'à des temps variables après la fermeture du courant inducteur. Il trouve qu'au bout de  $\frac{1}{2}$  seconde il n'obtient plus aucun phénomène de courant; mais, si le temps qui sépare les deux fermetures est moindre que  $\frac{1}{2}$  seconde, il obtient au fil induit une déviation plus faible, mais toujours de même sens que celle de Faraday. Ce dernier résultat est en contradiction avec celui qu'ont obtenu, dans des expériences analogues, M. Blaserna et M. Bernstein, vingt-cinq ans plus tard. Le phénomène oscillatoire se traduit, dans ce cas, par des changements de sens du courant, qui paraissent avoir échappé à Marianini.

En 1841, MM. Masson et Bréguet fils présentent à l'Académie des Sciences un important Mémoire <sup>(4)</sup> dans lequel leur principale préoccupation paraît être d'amener une assimilation entre les phénomènes de l'induction et ceux de l'électricité statique. Ils étudient en un mot les phénomènes de tension (*Spannungsercheinungen*, comme disent les

<sup>(1)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. VII (1843), p. 462.

<sup>(2)</sup> *Philosophical Transactions*, déjà cité, p. 139.

<sup>(3)</sup> *Mémoire sur le courant qui se produit dans un circuit métallique fermé, quand on arrête le courant voltaïque qui circule près de ce fil*, par M. Marianini. Lu à la réunion des savants italiens à Florence en 1841, traduit par M. Usiglio dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XI (1844), p. 395.

<sup>(4)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. IV (1842), p. 129.

Allemands) produits par l'induction, la tension étant ici mesurée par la distance à laquelle se produisent les étincelles qui doivent fermer le circuit, et la force de celles-ci.

C'est pour multiplier et séparer les effets qu'ils perfectionnent la première roue interruptrice de Masson, et construisent leur rhéotrope devenu classique. Ce Mémoire créait le bel appareil si grandement réalisé depuis par M. Ruhmkorff. MM. Masson et Bréguet y mettent en évidence la propriété du courant induit de rupture, de franchir un espace que ne saurait traverser celui de fermeture, ou, comme on le dit, la différence de tension de ces deux courants, et en tirent le moyen de les séparer aisément.

Il y a une expérience relatée dans ce Mémoire dont je voudrais dire quelques mots. Les auteurs font communiquer les extrémités du fil induit avec les plateaux d'un électroscope condensateur, et constatent que, si la tension est suffisante, il part des étincelles entre ces plateaux, ce qui n'a rien de surprenant. Mais ils n'ajoutent pas ce que deviennent les feuilles d'or de l'électroscope dans le cas où les étincelles ne partent pas, et où ces feuilles sont là, par conséquent, le seul indicateur des phénomènes électriques dont les plateaux sont le siège. Dans un Mémoire sur les appareils d'induction, M. Poggendorff<sup>(1)</sup> dit à ce sujet ce qui suit :

« Lorsque les deux extrémités du fil induit sont séparées par une substance isolante, aucun phénomène ne se produit, du moins lorsque ces extrémités sont des fils métalliques de dimensions ordinaires. Il n'en est pas de même lorsque ce sont deux plaques d'une certaine étendue, séparées par la lame non conductrice. Les deux bouts du circuit induit se trouvent alors en communication avec les deux armatures d'un véritable condensateur, et il se produit des phénomènes remarquables. Le condensateur se charge sous l'influence de chaque courant induit, et se décharge immédiatement après par le fil induit lui-même, de façon qu'on ne peut jamais constater une accumulation sensible d'électricité sur le condenseur. »

Et, en effet, si ce condenseur fait partie d'un électroscope à feuilles

---

<sup>(1)</sup> *Poggendorff's Annalen*, t. XCIV, p. 289. Un extrait de ce Mémoire a été inséré par Verdet dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XLIV, p. 375.

d'or, et qu'on laisse en contact les extrémités du fil induit avec les plateaux, on constate à chaque interruption du courant inducteur une divergence très-faible, ou, pour mieux dire, une tendance à une divergence aussitôt réprimée. Il me semble qu'on peut voir là la preuve du phénomène oscillatoire dont le fil induit est alors le siège. Si, en effet, l'extrémité du fil reliée au plateau inférieur de l'électroscope se trouvait portée par l'induction à un certain potentiel retombant simplement à zéro sans changer de signe, il se produirait là un effet de percussion mécanique que manifesterait l'écartement des feuilles; il est probable, en effet, que la durée de cette percussion est comparable, sinon égale, à celle qui, lorsque le circuit induit est fermé, fait dévier les aiguilles beaucoup plus lourdes d'un galvanomètre. Du reste, quelque courte que soit cette durée, on peut toujours augmenter les effets de façon que les intégrales qui déterminent les composantes de la quantité de mouvement que possèdent les feuilles après la percussion <sup>(1)</sup> aient une valeur aussi grande qu'on le veut. Le fait de l'immobilité de ces feuilles paraît donc inexplicable; mais si, comme le fait observer M. Thomson <sup>(2)</sup>, on remarque que les feuilles d'or de l'électroscope divergent par suite de la différence de potentiel qui existe entre elles et les corps solides entourant l'espace dans lequel elles se meuvent, le mouvement à peu près nul de ces feuilles, dans l'expérience qui précède, indique qu'elles demeurent à un potentiel moyen aussi à peu près nul; ce qui, vu l'énergie des tensions électriques si fortes que prouve la production d'étincelles, ne peut s'expliquer que par une succession rapide dans les feuilles de potentiels à peu près égaux et de signe contraire deux à deux.

Je signalerai encore les Mémoires de M. Wartmann <sup>(3)</sup> et l'intéressante étude de tous les disjoncteurs et rhéotropes employés jusque-là, qui précède le Mémoire du tome XXII; la méthode si originale de la balance électrodynamique employée par M. Lallemant <sup>(4)</sup>, pour établir les lois des courants induits et leur analogie avec les courants ordinaires au point de vue des propriétés électrodynamiques; le Mémoire

---

<sup>(1)</sup> Voir DUHAMEL, *Cours de Mécanique*, 3<sup>e</sup> édition (1863), t. II, p. 82.

<sup>(2)</sup> *Reprint of Papers on electrostatics and magnetism*, London, 1872, p. 260.

<sup>(3)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XIX, XXII et XXIV.

<sup>(4)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXXII (1851).

dans lequel M. Riccardo Felici <sup>(1)</sup> recherche, par une méthode analogue à celle d'Ampère, la loi élémentaire de l'action de deux éléments de circuits fermés dont l'un est traversé par un courant brusquement interrompu; les Mémoires de M. Perrot <sup>(2)</sup> sur l'étincelle d'induction, dont les phénomènes oscillatoires pourraient peut-être bien un jour expliquer la complexité; le travail de M. Seguin <sup>(3)</sup> sur l'analogie de l'étincelle d'induction avec les autres décharges électriques, etc.

J'arrive enfin aux travaux qui ont établi, dans toutes ces décharges, l'existence de phénomènes oscillatoires.

En 1847, dans son célèbre Mémoire sur la conservation de la force, M. Helmholtz disait : « ... Vorsselman de Heer et Knochenhauer ont démontré que le dégagement de chaleur mesuré par Riess, correspondant à la même charge d'une même batterie, est le même, quelles que soient les variations du fil de réunion... Cette loi se comprend facilement pourvu que la décharge d'une batterie ne soit pas représentée comme un simple mouvement de l'électricité dans une direction, mais comme une série d'oscillations entre les deux armatures, oscillations qui deviennent toujours plus petites, jusqu'à ce que la force vive soit éteinte par l'ensemble des résistances <sup>(4)</sup>. »

Une analyse de M. W. Thomson, publiée en 1855 <sup>(5)</sup>, établit l'équation générale différentielle du mouvement électrique dans le fil qui réunit deux conducteurs de potentiels différents, et, en l'intégrant, conduit à une expression de l'intensité du courant qui circule dans ce fil, tantôt de la forme d'une exponentielle, tantôt de fonctions périodiques du temps qui justifient la conception d'Helmholtz.

Le premier travail expérimental qui soit venu sanctionner ces conclusions théoriques est de M. Feddersen. Il a publié les premiers résultats de ses recherches en 1857 <sup>(6)</sup>; il a envoyé aux *Annales de Chimie*

<sup>(1)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXXIV (1852), p. 64.

<sup>(2)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LXI, p. 161 et 200.

<sup>(3)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LXIX, p. 97.

<sup>(4)</sup> *Erhaltung der Kraft*, Berlin, 1847, p. 44. Une traduction française en a été publiée chez Masson (1869), par M. Louis Pérard. Voir p. 106 et 107.

<sup>(5)</sup> *Philosophical Magazine*, 4<sup>e</sup> série, t. V, p. 393. — WIEDEMANN, *Die Lehre von Galvanismus und Electromagnetismus*, 2<sup>e</sup> édition (1874), t. II, 2<sup>e</sup> Partie, p. 121.

<sup>(6)</sup> *Poggendorff's Annalen*, t. CIII, p. 69; un extrait de ce Mémoire a été donné par Verdet aux *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LIV (1858), p. 435.

et de Physique, en 1863<sup>(1)</sup>, un Mémoire complet résumant ceux qui avaient été insérés dans les années 1859 et 1861 aux *Annales de Poggendorff*<sup>(2)</sup>.

La méthode de Feddersen consiste à faire éclater l'étincelle d'une batterie (de préférence entre des électrodes en zinc), et à en amplifier l'image au moyen du miroir tournant de Wheatstone, à axe de rotation parallèle à la ligne des électrodes. Dans les premières expériences, le miroir était plan, dans les secondes il était concave, et Feddersen put examiner sur un verre dépoli et même photographier, en la recevant sur une plaque collodionnée, l'image réelle amplifiée de l'étincelle. Des effluves lumineuses, partant alternativement de l'une et de l'autre électrode, caractérisaient ce que l'auteur appelle la décharge oscillante, dans laquelle, dit-il, « la décharge de la batterie oscille d'une armature à l'autre avec une intensité graduellement décroissante. Elle se produit d'une manière particulièrement nette avec les plus faibles résistances du circuit; cependant, même avec des résistances moyennes, on la voit ordinairement apparaître. On peut donc dire que toutes les fois qu'on détermine une décharge à travers un circuit fermé par un fil métallique, on doit tout d'abord supposer que la décharge se fait de cette manière. »

M. Paalzow<sup>(3)</sup> appliqua la même méthode du miroir tournant à l'étude de la décharge d'une batterie à travers un tube de Geissler. Il constata l'alternance du phénomène par l'apparition successive de la teinte bleue aux deux extrémités du tube, et par le dédoublement des courants sous l'influence d'un aimant qui les amenait, les uns contre un bord, les autres contre l'autre bord du tube, selon le sens suivant lequel ils le parcouraient.

Enfin, M. von Oettingen<sup>(4)</sup> constata également l'alternance en faisant passer les décharges successives de la batterie à travers un galvanomètre.

Une bobine d'induction dont on n'utilise que le courant direct pou-

(<sup>1</sup>) *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LXIX (1863), p. 178.

(<sup>2</sup>) *Pogg. Ann.*, CVIII, p. 497 (1859); CXII, p. 452; CXIII, p. 437; CXVI, p. 132 (1861). Voir aussi WIEDEMANN, *loc. cit.*, p. 125.

(<sup>3</sup>) WIEDEMANN, *loc. cit.*, p. 126.

(<sup>4</sup>) WIEDEMANN, *loc. cit.*, p. 126.

vant charger un condensateur, il était naturel que l'on s'en servit dans l'étude des phénomènes qui nous occupent, et l'on y trouvait en plus l'avantage d'avoir dans le fil même, dont les extrémités avaient apporté la charge à la batterie, le conducteur par lequel devait s'effectuer la décharge. C'est ainsi qu'opéra M. Helmholtz<sup>(1)</sup>. Les deux armatures d'une batterie étaient en communication avec les extrémités d'une spirale d'induction; une lourde masse en tombant produisait d'abord la rupture du courant inducteur, par suite la charge de la batterie, puis un temps connu après cette rupture amenait la séparation de la spirale des armatures de la batterie, et la mise en communication de celles-ci avec les nerfs d'une grenouille fraîchement écorchée, dont les contractions indiquaient le sens de la décharge à l'instant considéré.

C'est dans ce travail, entrepris pour étudier la décharge d'un condensateur, que M. Helmholtz remarqua qu'en enlevant ce condensateur, et reliant au sol l'une des extrémités de la spirale induite pendant que l'autre était isolée, le fil était de même le siège d'un mouvement oscillatoire.

Ce fait nouveau avait déjà été aperçu par Blaserna<sup>(2)</sup>. Cherchant à apprécier la durée des courants d'induction, ce physicien avait été conduit à rendre de plus en plus courte la durée du contact, qui, dans le rhéotrope genre Masson et Bréguet, fermait ces courants en les lançant dans le fil d'un galvanomètre; et il avait vu l'aiguille de ce galvanomètre prendre des déviations de sens différents selon l'instant où s'opérait cette fermeture. Son appareil éprouvant des vibrations capables de mettre en doute la rigueur des résultats, la question fut reprise par une méthode identique par M. Bernstein<sup>(3)</sup>.

L'une des extrémités de la bobine d'induction étant constamment en relation avec le sol et une des bornes d'un galvanomètre, l'autre extrémité se trouvait reliée à l'autre borne à des instants variables et connus après la rupture du courant inducteur, et pendant des temps excessivement courts. Le sens de la déviation de l'aiguille indiquait alors la

(<sup>1</sup>) WIEDEMANN, *loc. cit.*, p. 128.

(<sup>2</sup>) *Archives des Sciences physiques et naturelles*, nouvelle série, t. XXXVIII, p. 338 (1870).

(<sup>3</sup>) *Pogg. Ann.*, t. CXLII, p. 54 (1871). — WIEDEMANN, *loc. cit.*, p. 129. — *Journal de Physique* de M. d'Almeida, t. I, p. 77 (1872).

direction du courant qui, à cet instant, parcourait le fil de la bobine. Pour éviter les vibrations des pièces frottantes qu'on pouvait reprocher à M. Blaserna, M. Bernstein employa un mode de fermeture de courant consistant dans le glissement de deux pointes sur des rigoles de mercure dépassant un peu le sol par le fait de la capillarité; en quittant le mercure, les pointes produisaient la rupture du courant inducteur. Jusqu'à quel point peut-on, dans de telles conditions, affirmer l'identité des diverses ruptures ou fermetures, et, par suite, la constance de l'origine des phénomènes dans toute une série d'expériences? Je n'ai pas à discuter cette question. Dans tous les cas, cette difficulté d'ordre tout pratique laissée de côté, M. Bernstein pouvait bien saisir les zéros de la courbe générale des différences de tension successives par lesquelles passaient les extrémités du fil induit, en admettant encore que la communication de l'une d'elles au sol ne modifiât en rien les phénomènes; mais il lui était impossible d'obtenir avec quelque exactitude la valeur correspondant à aucun autre point de la courbe, résultat que, du reste, il ne paraît pas avoir eu pour but de poursuivre.

---

## INTRODUCTION.

---

Je me proposais simplement, au début de ce travail, d'étudier la différence de potentiel produite par le fait de l'induction aux deux extrémités, complètement séparées et isolées, du fil d'une bobine induite. Je pris dans ce but un électromètre de M. W. Thomson, à quadrants suffisamment grands et espacés, dont l'aiguille était maintenue chargée par sa communication avec le pôle positif d'une pile ouverte. L'appareil d'induction était une petite bobine en construction dans les ateliers de MM. Ducretet et C<sup>ie</sup> (<sup>1</sup>), sans trembleur ni fer à l'intérieur,

---

(<sup>1</sup>) Je profite de la première occasion pour remercier ces Messieurs de la complaisance avec laquelle ils ont constamment mis à ma disposition les ressources de leurs ateliers pendant tout le temps qu'a duré ce travail.

et je crus qu'il suffisait simplement, pour me borner, par exemple, au cas de la rupture du courant inducteur, de mettre lors de cette rupture les deux extrémités du fil induit en communication avec les deux couples de quadrants de l'électromètre. J'essayai d'abord d'un disjoncteur automatique, dans le genre de l'interrupteur Foucault, employé déjà par M. Bertin dans son étude « sur les propriétés des courants interrompus (') ». Quand le courant inducteur se rompait par la sortie d'une pointe d'un godet de mercure, deux autres pointes soigneusement isolées l'une de l'autre et reliées aux extrémités de la bobine induite plongeaient dans d'autres godets en communication avec les quadrants de l'électromètre. Dans ces conditions, le résultat fut le plus souvent nul; parfois néanmoins une brusque secousse, tantôt d'un sens, tantôt de l'autre, était imprimée à l'aiguille.

Me défiant des mouvements du mercure des godets, j'eus recours aux disjoncteurs à pièces solides, et je me servis à la manière ordinaire d'un rhéotrope Masson et Bréguet, que possède le cabinet de Physique de l'École Normale. Le résultat fut absolument le même que le précédent. A quoi tenait cet insuccès d'une expérience classique, dans laquelle je remplaçais simplement le galvanomètre par un électromètre? Je me laissai guider par les considérations suivantes : lorsque les fluides ébranlés par l'induction ont parcouru le fil du galvanomètre, il n'est que meilleur certainement qu'ils retrouvent le chemin du fil induit d'où ils sont partis, pour achever de se neutraliser; dans le cas de l'électromètre, au contraire, il doit y avoir intérêt, les fluides une fois lancés dans les quadrants, à isoler ceux-ci du fil de la bobine qui ne ferait que les mettre en communication métallique, et, par suite, les ramener au même potentiel. Et j'avais remarqué, en effet, que l'aiguille de l'électromètre n'avait subi de secousse que dans quelques cas où la communication des extrémités du fil induit avec les secteurs avait cessé presque à l'instant de la rupture du courant inducteur. La suite de cette étude rectifiera le raisonnement précédent et expliquera le phénomène. Je fus ainsi amené à construire un instrument dans lequel pût être excessivement courte la durée des communications du fil induit avec les quadrants. Dans ce cas encore de nombreuses irrégularités

---

(') *Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. XV.



me firent penser que la différence de potentiel que je me proposais d'apprécier ne devant pas naturellement prendre brusquement sa valeur maximum, je devais chercher à produire ces communications rapides à tous les instants qui suivent la rupture métallique du courant inducteur. C'est alors que le phénomène oscillatoire me fut nettement révélé et que des mesures purent se faire.

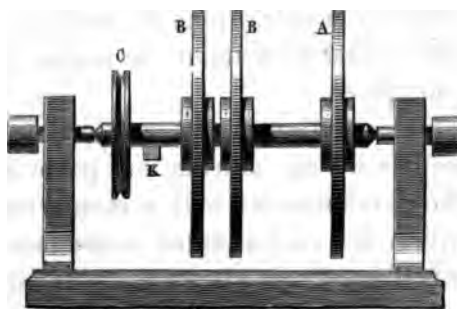
Ce travail sera partagé en deux Parties : la première contiendra la description des différents appareils dont j'ai fait usage ; dans la seconde, je discuterai la méthode employée et j'exposerai les résultats qu'elle a fournis.

## PREMIÈRE PARTIE.

DESCRIPTION DES APPAREILS. — DISJONCTEUR. — MOTEUR. — RÉGULATEUR. — INSCRIPTEUR DU MOUVEMENT. — ÉLECTROMÈTRE ET SA GRADUATION. — APPAREILS D'INDUCTION. — COURANT INDUCTEUR.

*Disjoncteur.* — Il présente d'abord trois roues en cuivre de 1 décimètre de diamètre A, B, B (*fig. 1*), montées sur le même arbre hori-

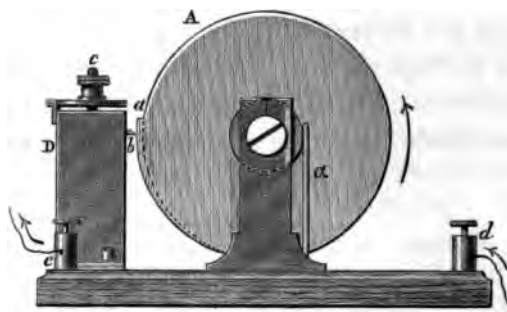
Fig. 1.



zontal, et soigneusement isolées de cet arbre par des pièces d'ébonite. La roue A produit la fermeture et la rupture du courant inducteur. A cet effet, elle présente un petit filet excentrique *a* (*fig. 2*), qui vient à chaque tour frotter contre une pièce en bronze *b* taillée en couteau.

Cette pièce, constamment poussée par un ressort, est tenue à distance de la roue A par une vis buttante et ne communique avec elle qu'au passage du filet  $\alpha$ . La pièce  $b$  fait partie d'un système très-solide D,

Fig. 2.



isolé du reste de l'appareil, et dans lequel elle peut s'élever ou s'abaisser verticalement de quantités soigneusement mesurées par une vis micrométrique  $c$  graduée à  $\frac{1}{60}$  de millimètre. Le courant inducteur entrant par la borne  $d$  passe dans la roue A par le ressort frotteur  $\alpha$ , et, pendant le contact de la pièce  $b$  avec le filet  $\alpha$ , gagne le système D et retourne à la pile par la borne  $e$ . Le frottement a lieu sur un parcours angulaire d'environ 25 degrés (''); ce qui, en admettant une vitesse de rotation de l'appareil de vingt tours par seconde, que je n'ai jamais atteinte, représente un temps de fermeture supérieur à  $\frac{1}{300}$  de seconde. C'est, comme on le verra, plus de temps qu'il n'en faut pour qu'un courant arrive à l'état permanent, du moins dans les conditions où je me suis toujours placé.

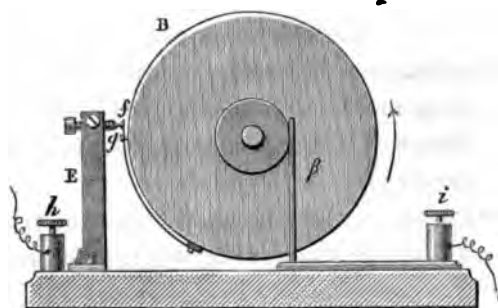
Les roues B, B sont identiques. Chacune d'elles présente un couteau  $f$  (*fig. 3*) parallèle à l'axe de rotation, porté à l'extrémité d'un long ressort couché parallèlement à la circonférence de la roue et qu'empêchent de vibrer des vis buttantes le condamnant à n'effectuer que des mouvements d'amplitude extrêmement faibles. A chaque révolution, le couteau touche une pointe fixe  $g$ , portée sur une colonne isolée E et mise en relation avec les quadrants de l'électromètre par

---

(') La longueur de la partie frottée était d'environ 2°,5; la circonférence de la roue étant  $10^\circ \times 3,14 = 31^\circ,4$ , cette longueur représente un angle égal à  $\frac{360 \times 2,5}{31,4} = 28^\circ$ .

un fil partant de la borne  $h$ . Chaque roue  $B$  communique en outre constamment par un frotteur  $\beta$  isolé du reste de l'appareil, avec une borne  $i$ , mise par un fil en relation métallique avec une extrémité du fil induit.

Fig. 3.



Au moyen de la loupe, contrôlée par un procédé qui sera indiqué dans la seconde Partie, je m'assurais que les contacts des couteaux  $f$  avec les pointes  $g$  avaient bien lieu au même instant. Si l'on se reporte alors à la description du système D, on voit qu'en faisant monter ou descendre la pièce  $b$  au moyen de la vis micrométrique  $c$  (*fig. 2*), on peut faire que l'instant du double contact des couteaux  $f$  (*fig. 3*) et des pointes  $g$  se rapproche ou s'éloigne de quantités bien déterminées de celui de la rupture métallique du courant inducteur.

Ces quantités, mesurées par la vis micrométrique, se traduisent aisément en temps, comme on le verra plus loin, si l'on connaît la vitesse de rotation de l'appareil. Pour mesurer cette vitesse, une came  $K$  (*fig. 1*), pressant sur un ressort, fermait, comme on le verra, le courant spécial d'un appareil inscripteur qui comptait le nombre de tours faits par seconde.

Enfin la poulie  $C$  (*fig. 1*) était reliée à l'arbre du moteur par une corde qui communiquait le mouvement à l'appareil.

MM. Brünnner frères ont bien voulu se charger de la construction de cet appareil qui demandait la sûreté et la précision que l'on est habitué à rencontrer à un si haut degré chez tout ce qui sort de leurs mains. Je les en remercie bien sincèrement. Les frais en ont été supportés par le laboratoire de Physique de l'École Normale, où a été fait ce travail.

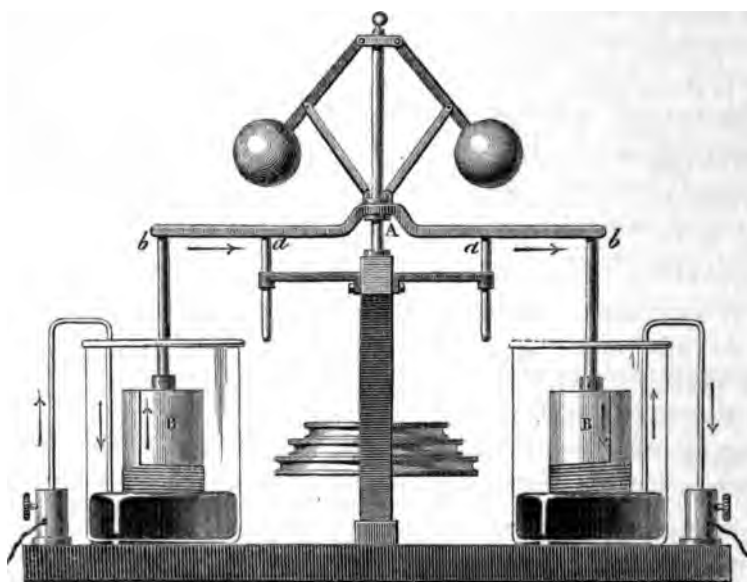
Pour cela et pour bien d'autres choses, j'exprime ici toute ma reconnaissance à M. Bertin.

*Moteur et régulateur.* — Je me suis servi pour moteur d'une petite machine Gramme dans le fil de laquelle était lancé le courant de deux ou trois éléments Bunsen. Cette machine est pour les cabinets de Physique un moteur d'un emploi très-commode. Ses seuls défauts sont l'irrégularité de combustion de son foyer qui est la pile, et aussi, du moins pour les petites machines, la trop petite masse de l'anneau en mouvement, qui laisse se traduire les plus légères causes accidentelles de variation du mouvement.

J'ai purement remédié à ces inconvénients par l'emploi du régulateur suivant : C'est le système à force centrifuge de Watt, prenant son mouvement par une corde sur l'arbre même de la machine.

Au sommet A (*fig. 4*) du losange articulé où se trouve fixé dans le

Fig. 4.



régulateur des machines à feu l'anneau portant le bras du levier qui doit augmenter ou diminuer l'entrée de la vapeur dans le cylindre, est fixée une tige horizontale faisant corps avec cet anneau, et guidée par

deux baguettes verticales  $a, a$ , l'empêchant de faire autre chose que s'élever ou s'abaisser parallèlement à elle-même, selon que les boules s'élèvent ou s'abaissent. Aux deux extrémités  $b, b$  de cette tige horizontale sont fixés deux cylindres B, B en caoutchouc durci sur chacun desquels est enroulé en hélice un fil de fer de  $\frac{1}{2}$  millimètre de diamètre environ. Ces cylindres plongent dans des vases remplis de mercure; le fil de fer enroulé se trouve ainsi communiquer par une extrémité avec le mercure, par l'autre avec l'ensemble métallique de l'appareil. Les cylindres étant creux, on peut, en versant du mercure dans l'intérieur, modifier à volonté l'effet moyen de la poussée.

Le courant qui fait mouvoir le moteur, au lieu de se rendre directement dans celui-ci, est d'abord lancé dans le mercure des vases; de là il passe dans les spires émergées du fil de fer, puis dans la machine. On comprend qu'un accroissement de vitesse, par exemple de celle-ci, se traduit immédiatement par la sortie d'une ou plusieurs spires du mercure; d'où une augmentation de résistance et, par suite, un affaiblissement du courant moteur dont les chiffres suivants vont donner l'idée.

La résistance totale du fil de la machine Gramme que j'ai employée est de 0,683 unité Siemens (<sup>1</sup>); la longueur du fil de fer formant une spire était 16<sup>c</sup>, 8 et la résistance de 1 mètre de ce fil 0<sup>m</sup>, 841, d'où pour une spire 0<sup>m</sup>, 141. La machine étant alimentée par deux éléments Bunsen, dont la résistance moyenne était 0<sup>m</sup>, 1 (<sup>2</sup>), on voit que la résistance totale du circuit, en supposant deux spires émergées à chaque cylindre, était égale à

$$0,683 + 0,564 + 0,2 = 1^m,447.$$

L'introduction dans ce circuit moyen d'une spire à chaque cylindre augmente sa résistance de 0<sup>m</sup>, 282, c'est-à-dire environ des  $\frac{2}{9}$  de sa valeur, fraction bien supérieure aux variations rapides que peut éprouver, soit la résistance, soit la force électromotrice d'une pile bien montée.

(<sup>1</sup>) On sait que cette unité est la résistance à zéro de 1 mètre de mercure de 1 millimètre carré de section. La maison Siemens et Halske, de Berlin, fabrique des étalons contrôlés en maillechort; c'est à l'aide d'un de ces étalons que j'ai effectué toutes mes mesures de résistance.

(<sup>2</sup>) Les mesures de résistance de fil ont été faites par le procédé ordinaire du pont de Wheatstone; celles des piles par une méthode que j'ai indiquée au *Journal de Physique* de M. d'Almeida, t. V, p. 144 (1876).

Si la vitesse tendait à diminuer, les choses se passeraient évidemment d'une façon analogue en sens inverse.

Il suit de là que, la hauteur moyenne des boules étant atteinte, on peut être certain *a priori* que cette hauteur ne variera, du fait de la pile motrice, que de quantités bien inférieures à la distance de deux spires consécutives (').

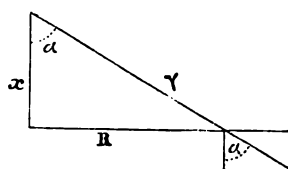
Les boules assez lourdes du régulateur, jouant le rôle d'un volant, augmentent en même temps l'inertie du moteur, et remédient au second inconvénient signalé plus haut.

Il est évident que cet appareil, qui régularise, non le courant de la

(') Il est aisé de conclure de ce fait les limites extrêmes entre lesquelles restera certainement enfoncée la vitesse.

Si  $\omega$  est la vitesse moyenne de rotation du régulateur, que je suppose atteinte, l'instru-

Fig. 5.



ment satisfaisant, cela va sans dire, à la condition de possibilité bien connue  $g < \omega^2 \gamma$  (fig. 5), on a

$$R = x \tan \alpha,$$

et comme  $\tan \alpha = \frac{\omega^2 R}{g}$ ,  $x = \frac{g}{\omega^2}$ ; par suite, à une petite variation  $\Delta x$ , correspond une variation  $\Delta \omega$ , donnée par

$$\Delta x = -\frac{2g}{\omega^3} \Delta \omega,$$

en négligeant les puissances de  $\Delta \omega$  supérieures à la première. En remplaçant  $\omega$  par le nombre  $n$  de tours par seconde,  $\omega = 2\pi n$ , on a

$$\Delta x = -\frac{2g}{8\pi^3 n^3} 2\pi \Delta n.$$

La valeur moyenne de  $n$  était 5; la distance des spires, c'est-à-dire la valeur maximum de  $\Delta x$ , 1 millimètre; en mettant ces valeurs dans la formule qui précède et effectuant, on trouve pour le maximum de  $\Delta n$  le nombre 0,250, et par suite 0,05 ou  $\frac{1}{20}$  pour le rapport de la variation maxima de la vitesse à la valeur moyenne de cette vitesse.

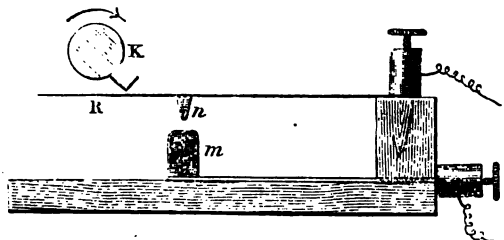
On verra tout à l'heure que ce nombre, basé sur une variation que n'éprouvent jamais des éléments de Bunsen, doit être encore de beaucoup diminué.

pile, mais le mouvement qui en résulte, peut être appliqué à toute espèce de moteur alimenté par un courant électrique.

Cet appareil a été construit chez M. Ducretet. C'est lui qui m'a conseillé de faire plonger les cylindres dans du mercure, au lieu de les faire frotter contre un ressort, comme j'en avais d'abord l'idée.

*Inscripteur du mouvement.* — Je devais d'abord savoir jusqu'où allait réellement la régularité du mouvement. Pour cela j'adaptai au disjoncteur le petit appareil représenté *fig. 6*. La came K, dont on a vu la

Fig. 6.



place dans la description du disjoncteur, venait à chaque tour de celui-ci presser le ressort R et amener le contact entre la pointe *n* et l'enclume *m*. Le courant d'une pile spéciale, alors fermé, mettait en action un électro-aimant inscripteur ordinaire. Ce dernier traçait une courbe indicatrice du mouvement sur un cylindre tournant recouvert de papier noirci, concurremment avec celle des vibrations d'un diapason de M. Kœnig donnant l'*ut*, c'est-à-dire faisant 64 vibrations complètes par seconde. La *fig. 7* donne une idée de l'ensemble de ces

Fig. 7.



deux courbes, dont j'ai obtenu ainsi plus de 30 séries parfaitement nettes. Je me suis borné à compter le nombre des vibrations du diapason correspondant à 20 tours du disjoncteur, et, dans une série par exemple, j'ai trouvé ce nombre toujours compris entre 100 et 101. Je puis donc affirmer que le nombre *n* de tours par seconde restait com-

pris, ce jour-là, entre  $\frac{20 \times 64}{100} = 12,8$  et  $\frac{20 \times 64}{101} = 12,7$ , c'est-à-dire qu'il ne variait pas dans un intervalle de plus de quatre minutes, durée de la série, de  $\frac{1}{100}$  de sa valeur moyenne (').

Une fois assuré de la régularité du mouvement, je simplifiai de la façon suivante la mesure journalière de la valeur absolue de sa vitesse. Par la méthode précédente, je traçai simultanément deux courbes, l'une de la marche du disjoncteur, l'autre de celle de la machine Gramme; et je pus constater qu'à 14 tours du premier correspondaient exactement 5 tours de la seconde. Je pris alors le récepteur d'un télégraphe Morse dont le mouvement d'horlogerie, comparé à un excellent chronomètre de Winnerl, déroulait toujours, à 1 ou 2 millimètres près, 85 centimètres de papier par minute. L'appareil de la *fig. 6* étant alors placé sur la machine motrice, j'envoyai le courant qui lui correspondait dans le récepteur Morse. On voit qu'en supposant une vitesse du disjoncteur de 20 tours par seconde, ce qui correspondrait à  $\frac{5 \times 20}{14}$ , pour la machine, la pointe du télégraphe ferait sur le papier des points distants de  $\frac{850^{\text{mm}} \times 14}{60 \times 100}$  ou 2 millimètres environ, distance à laquelle ils sont parfaitement distincts. Une petite formule que l'on verra plus loin me permettait, connaissant le nombre de ces points compris dans une bande de longueur donnée, d'obtenir immédiatement la valeur absolue en temps correspondant à un déplacement connu de la vis micrométrique du disjoncteur.

*Électromètre et sa graduation.* — Je n'ai rien à dire des électromètres à quadrants de M. Thomson, déjà devenus classiques. Les potentiels

---

(') Il suffit d'être assuré de la régularité du mouvement pendant un temps relativement court, mais suffisant pour une expérience. « Le succès de ces recherches, dit M. Guillemin, est basé sur l'uniformité du mouvement de rotation, dont on peut changer la vitesse dans les diverses expériences, pourvu qu'elle soit invariable dans chacune. » *Mémoire sur l'état variable du courant dans les fils télégraphiques* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LX, 1860, p. 407).

Lorsqu'on ôte le régulateur, le mouvement donné par la machine Gramme, surtout si les piles ne sont pas fraîchement montées, se compose de périodes assez régulières, d'une seconde environ d'accélération et de retard, que l'oreille perçoit très-nettement et que je ne saurais expliquer.



que j'avais à mesurer pouvant atteindre de très-grandes valeurs, j'ai fait choix d'un instrument à boîte spacieuse (1 décimètre de diamètre sur 3 centimètres de hauteur). Fabriqué chez MM. Elliott, de Londres, il présente le système de réflecteur communément employé dans les galvanomètres Thomson : un petit miroir concave, de 80 centimètres environ de rayon de courbure, fixé à l'aiguille. En regard et à 80 centimètres, se trouve une planchette portant une échelle et, au-dessous de cette échelle, une fente éclairée par une lampe. L'image de la fente se produit très-nette sur l'échelle <sup>(1)</sup>.

Dans celle que j'ai employée, chaque division était de  $\frac{1}{40}$  de pouce anglais, c'est-à-dire de  $\frac{1}{1600}$  de mètre. En tendant un fil fin au milieu de la fente lumineuse, on peut apprécier sans peine la demi-division, d'où une approximation de  $\frac{180 \times 60}{\pi \times 3200 \times 0,80}$ , soit un peu plus de 1 minute <sup>(2)</sup>. Si cette approximation est moins satisfaisante que celle que l'on obtiendrait avec les lunettes, ce procédé présente en revanche l'avantage de n'exiger qu'un coup d'œil jeté sur l'échelle pendant même qu'on opère, avantage immense quand on étudie, comme c'est à peu près le cas au début de tout travail, un phénomène dont on ne connaît ni l'intensité, ni peut-être même le sens. A ce dernier point de vue surtout, je me permets de recommander ce système aux chercheurs.

J'ai entouré l'instrument d'une boîte métallique communiquant au sol, écran électrique, comme l'appelle M. Thomson, qui en attribue l'idée à Faraday <sup>(3)</sup>, protégeant l'appareil contre les courants d'air et les influences électriques extérieures. Une petite ouverture, fermée par une glace de verre, laissait passer la lumière destinée à la lecture. L'aiguille, formée d'une lame très-mince d'aluminium, était suspendue par un bifilaire en cocon, et portait un fil de platine plongeant, comme

<sup>(1)</sup> D'après M. Thomson (*Reprint of papers on electrostatics and magnetism*, p. 267 et 268), les constructeurs anglais auraient porté à un haut degré de perfection la fabrication de ce genre de miroir; on aurait de bonnes images avec des miroirs ne pesant pas plus de  $\frac{1}{12}$  et même  $\frac{1}{16}$  de gramme. M. Lutz m'en a construit donnant des images excellentes et pesant moins de 1 décigramme, avec 1 centimètre de diamètre.

<sup>(2)</sup> M. Thomson (*loc. cit.*, p. 268) dit qu'on peut apprécier le  $\frac{1}{4}$  et même le  $\frac{1}{16}$  d'une des divisions ci-dessus, ce qui porterait l'approximation à 20 secondes environ; mais il faut être alors dans une chambre complètement obscure.

<sup>(3)</sup> THOMSON, *loc. cit.*, p. 203, 239, 256.

dans tous les électromètres Thomson, dans un condensateur à acide sulfurique. Sur l'avis de M. Mascart, dont les bienveillants conseils ne m'ont jamais fait défaut, et que je remercie vivement, j'ai terminé ce fil de platine par une palette légère amortissant les oscillations.

Je demande à insister quelque peu sur le mode de charge de l'aiguille, et surtout sur l'étude et la graduation de l'instrument.

L'aiguille était chargée par la communication de l'acide du condensateur avec un des pôles d'une pile ouverte de 50 éléments zinc-platine-eau, ou zinc-cuivre-eau, dont l'autre pôle était relié au sol<sup>(1)</sup>. Un commutateur à bascule, qu'il est aisé d'imaginer, me permettait d'intervertir rapidement l'ordre des communications, et de donner ainsi à l'aiguille une même valeur de potentiel, soit positif, soit négatif<sup>(2)</sup>.

Ce procédé de charge, appliqué aux électromètres Thomson par M. Branly<sup>(3)</sup>, est d'une grande commodité.

On lui a objecté la variabilité de la force électromotrice de la pile de charge; j'ajouterai que d'autres causes encore peuvent venir modifier la sensibilité et les données de l'instrument, entre autres l'état de l'acide dans lequel plonge le fil de platine attaché à l'aiguille, surtout quand ce fil porte une palette.

Je me suis mis en garde contre toutes ces objections de la façon suivante. Je considère comme toujours égale à elle-même, dans les limites ordinaires de température d'un appartement, la force électromotrice de 1 élément Daniell monté avec soin, depuis une heure environ, avec des dissolutions identiques de sulfate de zinc et de sulfate de cuivre<sup>(4)</sup>.

(<sup>1</sup>) M. Thomson (*loc. cit.*, p. 267) recommande de charger l'aiguille positivement, le fluide positif, dit-il, s'échappant bien moins d'un conducteur à angles que le fluide négatif. Cette précaution peut être utile dans le cas des charges que donne M. Thomson, charges obtenues par un frottement de diélectrique, atteignant par cela rapidement une valeur considérable de potentiel, et dont l'entretien ne laisse pas que d'être toujours pénible; elle ne l'est plus dans les conditions de charge relativement faible et constante où l'on se trouve placé par l'emploi d'une pile ouverte, et l'on verra même qu'il peut être d'une grande utilité de changer, comme il est dit dans le texte, le signe de la charge de l'aiguille, tout en lui laissant la même valeur absolue.

(<sup>2</sup>) Il est bon, dans ce cas, de donner à la pile de charge une assez grande capacité électrique. Je la constituais avec cinquante flacons de 4 centilitres, à col large et verni, dans lesquels plongeaient les soudures métalliques.

(<sup>3</sup>) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2<sup>e</sup> série, t. II, p. 210.

(<sup>4</sup>) M. Thomson, qui, comme on le verra plus loin, se réfère à des Daniell dans une

J'avais une batterie de 20 éléments parfaitement entretenus et remontés à neuf tous les jours d'expériences; au commencement et à la fin de toute série, je les mettais en relation avec les quadrants de l'électromètre. J'obtenais ainsi, pour l'instant considéré, la valeur exacte en Daniell d'une ordonnée déterminée de la courbe de graduation de l'instrument.

Reste à établir cette courbe de graduation. J'ai pris pour cela une collection de 120 éléments de pile zinc-platine-eau, que je pouvais fractionner par groupe de 5 éléments. Deux groupes de 5 réunis produisant toujours une déviation à peu près égale à la somme de leurs déviations individuelles, je me suis contenté généralement de joindre les piles par groupes de 10. Chaque groupe était d'abord étudié séparément; je les assemblais ensuite à 2, 3, ..., et j'inscrivais les déviations correspondantes. Ce procédé est imité de la graduation du galvanomètre au moyen de la lentille à quatre secteurs de MM. de la Provostaye et Desains, et basé, comme on le voit, sur le principe d'addition des tensions de Volta.

Voici un des tableaux ainsi dressés :

4 avril 1876. — L'aiguille est chargée avec 50 éléments zinc-platine-eau, fraîchement préparés; elle est reliée au pôle positif de cette pile; l'autre pôle communique au sol par un fil soudé aux tuyaux de conduite du gaz de l'éclairage. Les éléments d'essai sont disposés par séries de 10 que je marque des lettres A, B, C, ....

Il a été fait, avec chaque groupement, trois expériences, distinguées par les chiffres 1, 2, 3 de la colonne II :

- |   |  |
|---|--|
| 1 | le milieu de la série communiquant au sol; |
| 2 | le pôle positif   ,                   ,    |
| 3 | le pôle négatif   ,                   ,    |

---

foule de mesures délicates, fait remarquer (*loc. cit.*, p. 246) que « la force électromotrice d'un Daniell varie de 2 ou 3 pour 100 avec les dissolutions employées; elle varie aussi un peu avec la température et certaines circonstances non encore élucidées ».

Je me suis affranchi des premières variations, de beaucoup les plus importantes, en préparant à l'avance des quantités suffisantes de dissolutions bien pures pour toute la durée des expériences. La dissolution de sulfate de cuivre marquait 20 degrés, celle de sulfate de zinc 10 degrés, à la température de 15 degrés, au pèse-sels de Baumé.

TABLEAU I.

Séries de piles.	Communication au sol.	Déviati droite.	Déviati gauche.	Somme.	Valeur réelle.	Moyenne de 2 et 3.	Différence avec 1.
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
A	{ 1	43,5	43	86,5	86,5		
	{ 2	45	46	91			0,25
	{ 3	41	41,5	82,5		86,75	
B	{ 1	46	47	93	93		
	{ 2	49	49	98			0,75
	{ 3	43	43,5	86,5		92,25	
A + B	{ 1	82,5	82,5	165	179,5		
	{ 2	90	89	179			2,5
	{ 3	73	73	146		162,50	
C	{ 1	53	54	107	107		
	{ 2	57	56	113			1,5
	{ 3	48	50	98		105,5	
A + B + C	{ 1	126	128	254	286,5		
	{ 2	143	145	288			5
	{ 3	104	106	210		249	
D	{ 1	47	49	96	96		
	{ 2	50	52	102			1
	{ 3	43	45	88		95	
A + B + C + D	{ 1	160	160	320	382,5		
	{ 2	186	188	374			6,5
	{ 3	126	127	253		313,5	
E	1	38	40	78	78		
A + B + C + D + E	{ 1	182	183	365	460,5		
	{ 2	218	222	440			5,5
	{ 3	138	141	279		359,5	
F	1	38	38	76	76		
A + B + C + D + E + F	{ 1	198	202	400	536,5		
	{ 2	242	245	487			8
	{ 3	147	150	297		392	

Les piles d'essai étaient mises en relation avec les quadrants successivement dans les deux sens, d'où une déviation droite et une déviation gauche, inscrites en unités de l'échelle dans les colonnes III et IV; leur

somme, colonne V, est ainsi affranchie de l'erreur, toujours assez faible, du zéro de l'instrument.

Quant à la colonne VI, intitulée *valeur réelle*, il est aisé de voir que, pour toute série de 10, le nombre qu'elle présente est précisément celui qui correspond à la ligne 1 de la colonne V; les autres sont toujours la somme des deux qui les précèdent.

Il m'était trop facile de vérifier quelques conséquences de la formule que donne M. Mascart <sup>(1)</sup> des électromètres Thomson, pour que je ne cherchasse pas à le faire. C'est la raison d'être des colonnes VII et VIII du tableau précédent.

D'après le professeur français, V étant le potentiel fixe de l'aiguille,  $V_1$ ,  $V_2$  ceux des secteurs, le moment du couple qui tend à faire dévier l'aiguille supposée retenue a une expression de la forme

$$M = lV(V_1 - V_2) + h(V_1^2 - V_2^2),$$

où  $l$  et  $h$  sont deux constantes dépendant de l'instrument.

Or supposons que les points reliés aux secteurs soient, comme dans la graduation précédente, les pôles d'une pile ouverte de force électromotrice totale A; appelons  $M_2$  le moment du couple de déviation quand le pôle positif (l'aiguille étant chargée positivement) communique au sol;  $M_3$  ce moment quand c'est le pôle négatif, et enfin  $M_1$  quand on met au sol le milieu de la pile. On a, en appliquant la formule de M. Mascart,

$$M_2 = lVA + hA^2, \quad M_3 = lVA - hA^2,$$

$$M_1 = lVA, \quad \text{d'où} \quad M_1 = \frac{M_2 + M_3}{2},$$

c'est-à-dire que le moment dans ce dernier cas est la moyenne arithmétique des deux autres.

La colonne VIII renferme les différences entre les déviations correspondant à la disposition 1 et les moyennes arithmétiques de celles qui correspondent aux cas 2 et 3. On voit que l'égalité est absolue au début : des divergences ne commencent à se produire que quand les potentiels atteignent de grandes valeurs; mais alors la rigueur de la

---

<sup>(1)</sup> *Journal de Physique* de M. d'Almeida, t. IV, p. 324. — *Traité d'électricité statique*, t. I, p. 397.

formule aussi disparaît, car elle est établie en supposant qu'un couple antagoniste de moment égal à  $M$  maintient toujours l'aiguille dans sa position initiale symétrique par rapport aux quadrants.

L'examen des groupes de trois nombres de la colonne V montre combien différent, dès que la différence de potentiel mesurée devient un peu grande par rapport à la charge de l'aiguille, les déviations observées selon que le milieu ou l'une ou l'autre des extrémités de la pile communique au sol.

On peut à peu près annuler ces divergences en prenant très-élevé le potentiel de l'aiguille; l'équation d'équilibre pouvant s'écrire, comme le remarque M. Mascart <sup>(1)</sup>,

$$M = IV(V_1 - V_2) \left( 1 + \frac{h}{l} \frac{V_1 + V_2}{V} \right),$$

le terme  $\frac{h}{l} \frac{V_1 + V_2}{V}$  est alors négligeable devant l'unité.

C'est ainsi qu'opère M. Thomson. Je me proposais d'opérer aussi de cette façon; mais, tandis que je songeais aux moyens à employer pour réduire la sensibilité de l'électromètre, de manière à n'avoir que des déviations mesurables malgré les énormes valeurs de potentiel qui se seraient alors trouvées en présence, l'idée me vint que l'on peut éliminer cette difficulté et profiter même de ce qui semble un inconvénient, de ces charges relativement faibles, pour être renseigné sur les valeurs absolues des potentiels dont on veut apprécier la différence. Il suffit, pour cela, de renverser la charge de l'aiguille; si les potentiels des deux points étudiés sont égaux et de signe contraire, on aura une même déviation en sens inverse, ce qui n'aura lieu que dans ce cas. Si l'un des points a un potentiel zéro, par exemple, et l'autre un potentiel positif, la déviation sera plus forte, l'aiguille étant chargée négativement, que quand elle le sera positivement; et l'on obtiendra alors les nombres des lignes 2 et 3 dans la colonne V du tableau précédent, que l'on pourrait du reste étendre selon les besoins.

Il y a plus : la moyenne des deux déviations observées sera précisément proportionnelle à la différence de potentiel cherchée, et cela quelle que soit la valeur absolue de chacun des termes de cette différence.

---

(<sup>1</sup>) *Journal de Physique*, loc. cit., p. 327.

Reprenons, en effet, la formule de M. Mascart : on a,  $V$  étant positif, par exemple,

$$M_1 = lV(V_1 - V_2) + h(V_2^2 - V_1^2);$$

$V$  devenant  $-V$ , on a

$$M_2 = -lV(V_1 - V_2) + h(V_2^2 - V_1^2).$$

Dans ces formules,  $M$  a un signe selon son sens; le plus souvent  $M_2$  sera de sens contraire à  $M_1$ ; retrancher ces deux égalités membre à membre, c'est alors ajouter les valeurs absolues de  $M_1$  et  $M_2$ , et il vient, en prenant ces valeurs absolues,

$$\frac{M_1 + M_2}{2} = lV(V_1 - V_2).$$

Si  $M_2$  était de même signe que  $M_1$ , ce qui aurait lieu si le deuxième terme  $h(V_2^2 - V_1^2)$  ou  $h(V_1 - V_2)(V_1 + V_2)$  était très-grand, c'est-à-dire  $V_1 + V_2$  pour une différence donnée, il faudrait faire la demi-différence des deux déviations.

J'ai vérifié ces conséquences avec la batterie de graduation employée plus haut.

Je citerai seulement les chiffres d'une seule expérience : elle est extraite d'un tableau dressé le 9 mai 1876; la pile de charge était formée de 50 éléments zinc-platine-eau montés à neuf; tous les contacts avaient été soigneusement appropriés et l'acide sulfurique de l'électromètre renouvelé. Je ferai remarquer, en passant, que l'épaississement qu'éprouve cet acide, par suite de son exposition permanente à l'air, malgré la boîte qui entoure l'électromètre, est une cause de différences de sensibilité sur laquelle il est urgent de veiller.

Les chiffres ci-dessous se rapportent à la communication avec les quadrants de 50 éléments zinc-platine-eau.

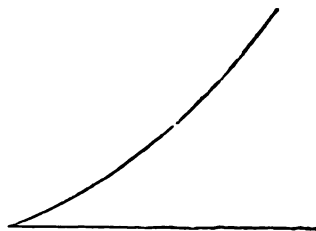
Ce tableau présente la vérification aussi satisfaisante que possible des conséquences énoncées plus haut; les nombres de la dernière colonne ne diffèrent pas les uns des autres de plus de  $\frac{1}{90}$  de leur valeur.

TABLEAU II.

Charge de l'aiguille.	Déviati droite.	Déviati gauche.	Somme.	Moyenne.
<i>Milieu de la pile au sol.</i>				
—	180	195	375	366,5
+	170	188	358	
<i>Pôle négatif au sol.</i>				
—	220	220	440	363,5
+	150	137	287	
<i>Pôle positif au sol.</i>				
+	215	225	440	365
—	150	160	290	
<i>Dixième élément du côté négatif au sol.</i>				
+	170	175	345	362,5
—	185	195	380	

Si maintenant, sur une droite horizontale, on porte des longueurs proportionnelles aux nombres 1 de la colonne V du tableau de la page 18, ou, ce qui revient au même, aux nombres de la colonne VII, et qu'en chaque point ainsi déterminé on élève une perpendiculaire sur laquelle on portera des longueurs proportionnelles aux nombres de la colonne VI, on aura la courbe de graduation de l'instrument. J'en ai dressé plusieurs avec des charges diverses et à différents intervalles; elles ont toujours coïncidé avec des erreurs ne dépassant pas le  $\frac{1}{60}$  de la valeur moyenne

Fig. 8.



de l'ordonnée correspondante. La *fig. 8* est une reproduction au  $\frac{1}{20}$  de la courbe qui a servi aux mesures.



Cela posé, voici comment j'opérais chaque jour : le 2 mai 1876, à 2 heures par exemple, les 20 Daniell donnaient une déviation totale de 160; l'ordonnée correspondant à ce chiffre dans la courbe est 162; j'avais donc, ce jour-là, pour exprimer en Daniell la différence de potentiel correspondant à une déviation A, à multiplier la longueur B de l'ordonnée correspondante par le rapport  $\frac{20}{162}$ .

Cette idée de rapporter les indications de l'électromètre à celles qu'il donne quand on le met en relation avec des piles ouvertes revient à Dellmann, et M. Thomson s'en sert constamment, soit pour étudier la sensibilité de ses appareils, soit pour estimer des forces électromotrices atmosphériques (<sup>1</sup>). Il emploie le plus souvent des éléments cuivre-zinc-eau, et se réfère à des Daniell pour s'affranchir des variations des premiers, ou pour faire des comparaisons délicates, comme, par exemple, la graduation de l'électromètre à quadrants par rapport à son électromètre absolu (<sup>2</sup>).

*Appareils d'induction.* — J'ai exécuté des mesures précises avec deux appareils d'induction. Le premier était la bobine induite d'un *Schlitten-Apparat* de du Bois-Reymond; elle vient d'un constructeur de Heidelberg, qui la catalogue comme formée de 13860 tours de fil. Ce fil a un diamètre de  $\frac{1}{4}$  de millimètre et est en cuivre; sa résistance totale, mesurée au pont de Wheatstone, est 942 ohms (<sup>3</sup>) comme dimension extérieure, 15 centimètres de long sur 7<sup>c</sup>,5 de diamètre extérieur, ce qui permet de fixer au fil une longueur approximative de 2500 mètres, d'ailleurs en rapport avec celle que l'on déduit de la résistance moyenne du cuivre. J'en ai retiré l'appareil inducteur, trembleur, fer, etc., pour ne conserver absolument que la bobine induite.

La seconde bobine m'a été gracieusement offerte par M. Ruhmkorff, et je l'en remercie. Elle se compose de deux bobines que l'on peut joindre de façon à reproduire une partie du système cloisonné des gros appareils. Le fil de chacune d'elles présente des sorties qui pourront

(<sup>1</sup>) THOMSON, *loc. cit.*, p. 201, 202, 204, 205, 206, 300, 306.

(<sup>2</sup>) THOMSON, *loc. cit.*, p. 205, 242, 243.

(<sup>3</sup>) On sait que l'ohm est l'unité de résistance faisant partie de la série déterminée d'après les principes de Weber par l'Association britannique. Sa valeur, d'après Latimer Clark (*An elementary Treatise on electrical measurement*, London, 1868), est 1<sup>m</sup>,0456.

permettre, je l'espère, d'étudier la distribution intérieure des tensions pendant le phénomène de l'induction. Le nombre total des spires, quand les deux bobines sont réunies en une seule, est de 7260; le fil a  $\frac{2}{5}$  de millimètre de diamètre; sa résistance est de 164 ohms; sa longueur approximative 1200 mètres; les dimensions extérieures de ce second appareil sont du reste les mêmes que celles du précédent.

Dans l'une ou l'autre de ces deux bobines d'induction, je pouvais introduire une bobine inductrice, dont le diamètre extérieur était égal au diamètre intérieur des premières, et qui avaient même longueur qu'elles. J'ai construit quatre de ces bobines inductrices, présentant une, deux, trois et quatre épaisseurs de spires d'un fil de cuivre de 1 millimètre de diamètre soigneusement recouvert de soie. Le nombre des spires pour chaque couche était de quatorze. Les résistances de ces bobines étaient respectivement, en unités Siemens, 0,216-0,396-0,587-0,738.

Elles ne présentaient aucune pièce de fer à l'intérieur, mais cet intérieur était creusé de façon à en recevoir à volonté; ce qui sera toujours spécialement indiqué dans les quelques cas où j'ai voulu constater l'action du fer sur les phénomènes.

*Courant inducteur.* — Le courant inducteur a toujours été fourni par un élément Daniell monté avec les solutions de sulfate de zinc et de sulfate de cuivre, dont j'ai donné les titres plus haut. L'intensité des phénomènes m'a obligé à réduire de plus en plus les dimensions de cet élément; c'était à la fin le modèle dit *moyen modèle* des fabricants, et j'ai dû souvent ne le remplir qu'au tiers et même au quart de sa hauteur. Du reste, j'ai eu soin chaque fois d'en mesurer la résistance, que l'on trouvera citée dans les différents tableaux d'expériences qui seront rapportées plus loin. Je citerai aussi chaque fois la résistance extérieure du circuit, ce qui définira complètement le courant. *Un shunt* (') lançait, dans un galvanomètre de Weber, une fraction de ce

---

(') Les télégraphistes paraissent avoir adopté ce nom, par lequel les Anglais désignent les appareils réalisant immédiatement une dérivation connue dans un galvanomètre de résistance déterminée. J'ai décrit (*Journal* de M. d'Almeida, t. V, p. 147) celui que j'ai employé, que l'on peut construire soi-même et avec lequel on donne à la dérivation telle valeur que l'on veut.

courant que je n'ai pas cherché à apprécier, mais que j'ai amenée à ne pas faire dépasser, au trait lumineux indicateur, les limites d'une échelle analogue à celle qui servait à l'électromètre, ce qui représente une déviation maximum de 5 ou 6 degrés. Un rhéocorde de Pogendorff me permettait de ramener le courant toujours à la même intensité, soit que celle-ci se fût un peu-modifiée d'elle-même, soit que j'aie introduit dans l'appareil d'induction une bobine de résistance différente. Enfin, comme, dans ces limites de déviation, toutes les proportionnalités physiques et trigonométriques peuvent être admises, je réalisais des intensités de courant inducteur moitié, tiers, etc., en touchant au rhéocorde jusqu'à ce que le trait lumineux marquât sur l'échelle des nombres moitié, tiers, etc., du nombre primitif.

La mesure galvanométrique étant faite, l'instrument était soustrait à l'action du courant, et je substituais au *shunt* une résistance rectiligne égale, de façon à bien conserver le courant mesuré.

---

## SECONDE PARTIE.

### DISCUSSION DE LA MÉTHODE. — RÉSULTATS.

---

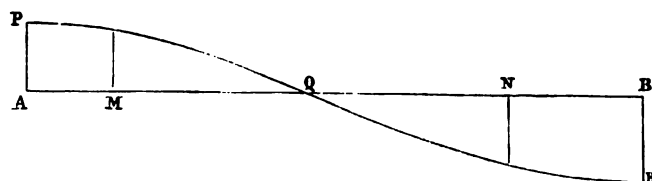
*Discussion théorique.* — La méthode repose sur les principes suivants, dont l'évidence paraît incontestable :

1° Si, pendant que le courant inducteur est fermé, on met deux points quelconques du fil induit en rapport avec les quadrants de l'électromètre, l'aiguille n'est pas déviée, c'est-à-dire que ces deux points ne présentent aucune différence de potentiel. On devait s'y attendre, puisqu'on sait que le fil fermé ne serait, pendant ce temps, le siège d'aucun mouvement électrique. La différence de potentiel commence à se produire dès la rupture métallique du courant inducteur, et on la retrouve nulle quelques instants après cette rupture. Tous les rhéotropes multipliant les effets sont basés sur ce qu'on admet que les phases, quelles qu'elles soient, par lesquelles a passé cette différence entre ces

deux valeurs zéro, se reproduisent identiquement après chaque rupture, rien n'étant changé dans aucune partie de l'appareil.

2° Considérons le fil induit AB pendant le phénomène; il présente à un temps  $\theta$  une certaine distribution de potentiel, figurée, par exemple, par la courbe PQR (*fig. 9*), distribution variant avec le temps, mais

Fig. 9.



reprenant périodiquement la forme PQR aux temps  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , distants de la durée de la rotation du disjoncteur. A ces différents instants, deux conducteurs isolés  $\alpha$  et  $\beta$ , non soumis à la cause inductrice, sont mis en relation métallique avec deux points M et N du fil, et cela pendant un temps assez court pour que la déformation de la courbe correspondant à ce temps puisse être considérée comme très-légère; après un nombre de contacts qui dépendra de la capacité relative du fil AB et des conducteurs  $\alpha$  et  $\beta$ , ces derniers auront pris et conserveront la différence de potentiel des points M et N correspondant à l'instant étudié; et, à partir de ce moment, ces contacts ne troubleront plus la distribution électrique sur AB, que dans la mesure des pertes que pourront éprouver les conducteurs  $\alpha$  et  $\beta$  entre deux contacts successifs; ces pertes peuvent être considérées comme nulles avec des contacts se succédant à moins de  $\frac{1}{10}$  de seconde d'intervalle, et quand il s'agit de potentiels ne dépassant pas une centaine de Daniell.

Si l'on se reporte aux analogies établies et si souvent invoquées par M. Thomson, entre la propagation de la chaleur et celle de l'électricité, le potentiel électrique et la température, ou plus simplement à la considération de la charge à refus des anciens électriciens, ce qui précède paraîtra incontestable.

*Discussion pratique.* — J'ai montré plus haut comment a été établie la graduation de l'électromètre, comment on peut tirer des déviations de l'instrument, par le renversement de la charge de l'aiguille, la diffé-

rence des potentiels des deux points mis en relation avec les secteurs, et une indication sur les valeurs absolues de ces potentiels. On a vu également comment je me suis assuré de la régularité du mouvement du disjoncteur et la façon dont je déterminais, pour chaque série d'expériences, la valeur absolue de sa vitesse. Il ne me reste plus que quelques mots à dire sur le mode de fonctionnement de ce disjoncteur, et sur la précision dont il était susceptible.

Les deux contacts qui mettaient en relation les points à étudier du fil induit avec les quadrants de l'électromètre étaient retouchés dès qu'ils avaient atteint par l'usure plus de  $\frac{1}{10}$  de millimètre de largeur.

La simultanéité de ces deux contacts s'établissait et se vérifiait de la façon suivante : une pile ouverte était mise directement en relation avec les quadrants de l'électromètre, et l'on notait la déviation; on l'y mettait ensuite par l'intermédiaire des roues B, B et des contacts  $f, g$ ; les couteaux  $f$ , qui pouvaient se mouvoir légèrement sur la circonférence des roues B, étaient déplacés jusqu'à ce que la déviation fût la même (<sup>1</sup>). (Voir *fig.* 2 et 3.)

Le couteau qui fermait et ouvrait le courant inducteur n'a jamais dépassé non plus  $\frac{1}{10}$  de millimètre, au moins tant que j'ai voulu surtout déterminer les variations des phénomènes avec le temps.

Comme on le verra plus bas, la vitesse ordinaire du disjoncteur a été de 12 à 15 tours par seconde. Le diamètre des roues était exactement de 1 décimètre, d'où leur circonférence de 314 millimètres. Si l'on suppose un contact d'une étendue de  $\frac{1}{10}$  de millimètre, sa durée sera par conséquent de  $\frac{1}{314 \times 15 \times 10} = \frac{1}{47100}$  de seconde, dans le cas de ma plus grande vitesse, et de  $\frac{1}{314 \times 12 \times 10} = \frac{1}{37680}$  pour l'autre; je puis donc affirmer que la durée des contacts s'est toujours maintenue égale à  $\frac{1}{40000}$  de seconde environ.

La vis micrométrique  $c$  (*fig.* 2) avait un pas de  $\frac{1}{2}$  millimètre, et portait un limbe divisé en 25 parties égales; à chacune de ces parties correspondait donc un déplacement vertical du couteau de  $\frac{1}{50}$  de milli-

(<sup>1</sup>) M. Brünner préférerait faire ce réglage à la loupe, de sorte que le procédé indiqué dans le texte était plutôt une vérification, toutes les fois que l'instrument revenait de chez lui.

mètre (<sup>1</sup>). Faire marcher cette vis d'une division du limbe revenait donc à rapprocher ou à éloigner de  $\frac{1}{40000 \times 5} = \frac{1}{200000}$  de seconde en moyenne l'instant du double contact de celui de la rupture métallique du courant inducteur.

Ainsi que je l'ai dit déjà, la valeur absolue de la vitesse du disjoncteur était fournie par un récepteur Morse, dont le mouvement d'horlogerie déroulait 850 millimètres de papier par minute; les points marqués sur ce papier correspondaient aux tours de l'arbre de la machine motrice, et le disjoncteur faisait 14 tours pendant que cet arbre en faisait 5. Soit  $n$  le nombre de points compris dans une bande de papier de  $l$  millimètres; ces  $l$  millimètres représentent un temps égal à  $\frac{60 \times l}{850}$ ; dans ce temps, l'arbre du moteur a fait  $n$  tours: donc le disjoncteur,  $\frac{14 n}{5}$ ; par suite, celui-ci en faisait dans une seconde

$$\frac{14 n}{5} \times \frac{850}{60 \times l} = \frac{119 n}{3 l}.$$

Il m'était plus utile de connaître la durée correspondant à une division du limbe de la vis micrométrique. Si  $m$  est le nombre de tours par seconde du disjoncteur, la durée du passage de  $\frac{1}{50}$  de millimètre de sa circonférence est égale à

$$\frac{1}{314 \times m \times 50} = \frac{1}{15700 \times m};$$

et, comme  $m = \frac{119 n}{3 l}$ , il suit que la durée  $\theta$  dont il s'agit est donnée par la formule

$$\theta = \frac{1}{15700} \frac{3 l}{119 n}.$$

Ainsi, le 26 avril 1876, un relevé de vitesse fait à 2 heures fournit une bande portant 27 points sur une longueur de 80 millimètres; il en résulte que le nombre de tours par seconde du disjoncteur était, à ce moment,

$$\frac{119}{3} \frac{27}{80} = 13 \frac{3}{8},$$

---

(<sup>1</sup>) Le nom de MM. Brünner est une garantie suffisante de la rigueur de ces chiffres.

et le temps  $\theta$  correspondant à une division du limbe de la vis micrométrique

$$\frac{1}{15700} \frac{3}{119} \frac{80}{27} = 0,000048.$$

Il reste un dernier point à établir. Pour éviter de trop longs frottements, le courant inducteur ne restait fermé que pendant un temps très-court, quoique toujours supérieur à  $\frac{1}{300}$  de seconde, comme je l'ai montré plus haut. On peut se demander si ce temps était suffisant. Pouillet tire de son expérience de la roue dentée <sup>(1)</sup> la conclusion suivante : « Dans  $\frac{1}{2400}$  de seconde, un courant se propage avec toute son intensité dans le circuit qui lui est offert; d'autres expériences analogues m'ont démontré que cette propagation intégrale se fait encore dans  $\frac{1}{8000}$  et même dans  $\frac{1}{7000}$  de seconde <sup>(2)</sup>. »

Bien que l'expérience classique de Pouillet ait été faite dans le but d'introduire la notion de quantité d'électricité dans l'étude du phénomène galvanique, plutôt que dans celui d'étudier la période d'établissement du courant, il est aisé d'établir, en appliquant la théorie mécanique des forces de percussion à l'état d'équilibre expérimental de l'aiguille, le théorème suivant : *Quand, dans une disposition donnée de la roue dentée, se vérifiera la proportionnalité constituant le théorème de Pouillet, l'effet de l'état variable sera négligeable devant celui de l'état permanent. Cela n'aura pas lieu quand cette proportionnalité ne se vérifiera pas.* Et c'est ainsi, comme le fait remarquer M. Pouillet lui-même <sup>(3)</sup>, que, « en vertu de la réaction qui constitue les phénomènes d'induction, on observe alors des résultats tout à fait différents; c'est même un très-utile moyen d'étudier ces phénomènes singuliers de réaction et d'examiner les renversements de courants qu'ils produisent quelquefois ».

C'est là le point de départ du travail de M. Bertin que j'ai déjà eu occasion de rappeler plus haut <sup>(4)</sup>.

La même théorie des forces de percussion, appliquée aux expériences

<sup>(1)</sup> POUILLET, *Traité de Physique et de Météorologie*, 7<sup>e</sup> édition, t. I, p. 647.

<sup>(2)</sup> POUILLET, *loc. cit.*, p. 817.

<sup>(3)</sup> POUILLET, *loc. cit.*, p. 647.

<sup>(4)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. XV.

de MM. Fizeau et Gounelle <sup>(1)</sup>, fournirait aussi plus aisément peut-être des nombres relatifs à l'état variable que des valeurs d'une vitesse de l'électricité <sup>(2)</sup>.

On pourrait aussi chercher des chiffres dans les différents travaux entrepris sur l'état variable du courant <sup>(3)</sup>; mais les deux remarques suivantes rendent toutes ces citations inutiles : 1° la durée de l'état variable ne dépend pas tant de la résistance du circuit que de sa disposition; 2° je cite ici les propres paroles de M. Gaugain : « On peut demander, et c'est une question que l'on a souvent posée, quel est le temps nécessaire pour obtenir l'état permanent, ou, en d'autres termes, quelle est la durée de l'état variable... On ne peut pas demander quel est le temps nécessaire pour atteindre d'une manière rigoureuse l'état permanent; ce temps serait toujours infini. Ce que l'on demande donc, c'est le temps nécessaire pour obtenir des tensions qui ne s'écartent pas sensiblement des tensions limites; mais il est clair que le problème posé dans ces termes vagues ne peut pas être résolu. Il faut dire avant tout ce que l'on entend par le mot *sensiblement*...; la détermination de la durée de l'état variable n'est donc un problème défini qu'autant que l'on indique le degré d'approximation que l'on veut obtenir <sup>(4)</sup>. »

Je dois encore ajouter qu'il était nécessaire, dans mes expériences, que non-seulement le courant inducteur fût arrivé à l'état permanent, mais encore que tous les phénomènes d'induction de fermeture fussent éteints dans la bobine induite, au cas probable où ceux-ci dureraient le plus longtemps.

Toute difficulté s'est trouvée écartée par le fait suivant, que je n'ai pas manqué de constater à toutes mes séries d'expériences. Les contacts des extrémités de la bobine induite avec les quadrants de l'électromètre se faisant quand le courant inducteur était encore fermé pen-

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXX, p. 437; t. XXXIX, p. 469.

<sup>(2)</sup> Voir la Notice placée par M. Gaugain à la fin de sa traduction du livre d'Ohm : *Théorie mathématique des courants*, p. 177. Note B.

<sup>(3)</sup> Voir, par exemple, le Mémoire de M. Helmholtz : *Influence de l'extra-courant sur l'établissement et la cessation du courant*. (*Pogg. Ann.*, t. LXXXIII, p. 505; 1851.) — CAZIN, *Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 418 (1869), etc. — GUILLEMIN, *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LX (1860).

<sup>(4)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LX, p. 327.



dant une longueur de plus de 1 millimètre, l'aiguille restait invariablement au zéro. Ainsi, lors de la rupture du courant inducteur, tous les phénomènes d'induction provenant de son établissement avaient complètement cessé d'être sensibles à l'électromètre depuis plus de 0<sup>e</sup>,0002, et probablement depuis beaucoup plus longtemps.

#### Résultats obtenus.

Si l'on considère les deux extrémités bien isolées du fil d'une bobine induite, elles sont au même potentiel tant que passe le courant inducteur; elles y sont revenues un temps très-court après que ce courant inducteur a été rompu. Comment a varié, pendant ce temps, cette différence de potentiel partie de zéro et revenue à zéro? Telle est la question que j'ai essayé de résoudre. Autrement dit, si l'on prend les temps pour abscisses, les différences de potentiel pour ordonnées, quelle sera la courbe ainsi déterminée?

Je vais donner les résultats d'un travail de deux années dans l'ordre qui me paraît le plus propre à en faire ressortir quelques conséquences générales.

*Commencement de la courbe.* — Le commencement de la courbe m'a paru mériter une étude spéciale. Dans le travail que j'ai déjà signalé plus haut <sup>(1)</sup>, M. Blaserna signala et mesura un retard sensible entre la rupture du courant inducteur et la manifestation galvanométrique du courant induit. Il est vrai de dire que, dans les expériences de M. Blaserna, la bobine inductrice était éloignée de la bobine induite, et qu'elle pouvait même en être séparée par des substances de natures diverses, dispositions que je n'ai pas essayé de réaliser. Profitant du moment où mon disjoncteur remis à neuf présentait des arêtes de contact absolument vives, j'obligeai, par une disposition qu'il est facile de concevoir si l'on veut se reporter à la description du disjoncteur, un courant électrique à se fermer en passant d'une des trois roues à l'autre par le moyen des contacts; le 27 avril 1876, par

---

(<sup>1</sup>) Voir aussi le Compte rendu des travaux de Physique faits à l'étranger, par M. Bertin (*Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. XXII, p. 500).

exemple, la vis micrométrique étant à 1 pour les tours et 8 au limbe, le galvanomètre indiquait le passage du courant; le limbe amené au chiffre 9, c'est-à-dire la vis marchant de  $\frac{1}{80}$  de millimètre, le courant ne passait plus. Ainsi, la vis micrométrique étant au chiffre 1-9, le double contact avec les quadrants avait lieu un temps après la rupture du courant inducteur, certainement inférieur au temps  $\theta$  déterminé plus haut, correspondant à  $\frac{1}{80}$  de millimètre.

Voici le tableau extrait de mon livre d'expériences, que je copie tel qu'il est, c'est-à-dire sans apporter aucune correction aux données de l'électromètre.

27 avril 1876. — La pile inductrice est le Daniell demi-grandeur, rempli aux deux tiers. Les vingt Daniell d'essai donnent 80 de chaque côté à l'électromètre. La bobine induite est celle à 13 860 tours; la bobine inductrice a une seule épaisseur.

Vis micrométrique.	Déviation de l'aiguille.
1-6	0.
7	0.
8	0.
9	15 à droite.
10	Entre 30 et 40 à droite.
11	» 50 et 60 »
12	90 à droite, assez fixe.

La vis marchant en sens inverse.

1-12	90 à droite.
11	65 »
10	38 » bien fixe.
9	16 »
8	0 très-net.

Le relevé de vitesse donne 16 points en 60 millimètres; d'où, en appliquant la formule établie plus haut, on a, pour la durée  $\theta$  correspondant à une division du limbe de la vis micrométrique,

$$\theta = \frac{1}{15700} \frac{3}{119} \frac{60}{16} = 0^{\circ},000006.$$

Ainsi, un temps après la rupture du courant inducteur, certainement inférieur à  $0^{\circ},000006$ , la différence de potentiel des extrémités de la bobine induite a déjà pris une valeur de 3 ou 4 Daniell.

Sur le bienveillant conseil de M. Terquem, j'ai longuement étudié ce début de la courbe : je n'ai pu y découvrir rien de remarquable ; elle n'est tangente ni à l'axe des temps, ni à celui des tensions ; elle s'élève très-rapidement, comme on le voit, par la difficulté de tenir l'aiguille de l'électromètre absolument immobile dans ces premiers points.

Les trois zéros qui sont en tête du précédent tableau montrent bien l'extinction de tout phénomène dû à l'induction de fermeture.

*Durée de l'oscillation.* — Ainsi que l'ont établi MM. Blaserna, Helmholtz, Bernstein <sup>(1)</sup> et que je l'ai retrouvé moi-même <sup>(2)</sup>, la courbe dont je viens d'esquisser les premiers points ne reste pas constamment du même côté de l'axe des temps. Partie de zéro, la différence de potentiel des deux extrémités du fil induit ne revient à zéro qu'après des oscillations autour de cette valeur, dont j'ai pu compter jusqu'à trente et au delà. J'ai fait, à plusieurs reprises, une étude spéciale de la durée de ces oscillations, parce qu'il était nécessaire, pour la rigueur des mesures de temps, que les contacts, remis soigneusement à neuf, ne présentassent pas des dimensions supérieures aux quantités dont avançait la vis micrométrique.

Dans les séries d'expériences que je vais rapporter, je me contentais donc d'observer le sens de la déviation de l'aiguille, notant quelquefois la valeur de l'impulsion, et portant surtout mon attention sur les points où se produisaient le zéro et le changement de signe. C'est ainsi seulement, du reste, qu'ont opéré MM. Bernstein et Helmholtz, et ce m'a été un motif de plus pour séparer ce paragraphe, afin de montrer ce que, outre la méthode, je crois avoir ajouté à des travaux que j'ignorais, mais que j'aurais pu connaître :

*1<sup>o</sup> Loi générale du phénomène.* — Elle va ressortir du tableau suivant.

---

<sup>(1)</sup> Voir l'*Historique*, ci-dessus, p. 204 et 205.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 3 janvier 1876, p. 84.

TABLEAU 1.

Bobine induite à 13 860 tours; bobine inductrice à deux épaisseurs; pile inductrice, Daniell demi-grandeur, rempli aux deux tiers, résistance 4<sup>ms</sup>,5; résistance au dehors du circuit 1<sup>ms</sup>,5.

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.	
1- 7	Léger mouvement.	
8	Légère impulsion.....	à droite.
16	Forte » .....	»
20	» » .....	»
2- 0	Faible » .....	»
3	» » .....	»
5	0.....	0.
7	70.....	à gauche.
12	Forte impulsion....	»
17	» » .....	»
19	Faible » (100).....	»
21	0.....	0.
23	Légère impulsion.....	à droite.
3- 4	Forte » .....	»
10	» » .....	»
12	Faible » .....	»
13	0.....	0.
14	Légère impulsion.....	à gauche.
22	Forte » .....	»
4- 3	Faible » .....	»
5	0.....	0.
7	Faible impulsion.....	à droite.
16	Forte » .....	»
22	Faible » (30).....	»
23	0.....	0.
24	Impulsion de 40.....	à gauche.
5- 7	Forte impulsion.....	»
11	» » .....	»
15	0.....	0.
16	Impulsion de 40.....	à droite.

Le relevé de vitesse fournit 21 points dans 58 millimètres, ce qui donne, pour le temps  $\theta$  correspondant à une des 25 divisions du limbe de la vis micrométrique,

$$\theta = \frac{1}{15700} \frac{3}{119} \frac{58}{21} = 0^s,0000045.$$

(On devine sans peine que les deux nombres qui se trouvent en regard dans la colonne de la vis micrométrique indiquent, celui de gauche le numéro du tour, celui de droite la division du limbe.)

Si l'on examine le tableau qui précède, on voit que la position des zéros est déterminée à moins d'une unité près des divisions du limbe de la vis micrométrique.

Le temps compris entre les deux premiers zéros est mesuré par 25 divisions de la vis; il est donc égal à  $0^s,0000045 \times 25$ , soit  $0^s,000112$ .

Les autres instants où la différence de potentiel a été nulle sont séparés les uns des autres par des temps représentés par les nombres de divisions 16, 17, 17, 18, 17. On peut donc dire que les oscillations sont isochrones, et durent un temps égal à  $0^s,0000045 \times 17 = 0^s,000076$ .

*2° Influence du nombre des épaisseurs de spires de la bobine inductrice.* — Dans les tableaux qui vont suivre, la bobine induite et le dispositif général seront les mêmes que dans le cas précédent. Il n'y aura de différence que dans la bobine inductrice, qui sera successivement de une, deux, trois et quatre épaisseurs de spires. Ainsi que je l'ai dit, le courant inducteur sera ramené, à chaque changement de bobine, à la même intensité galvanométrique au moyen du rhéocorde.

TABLEAU II.

Bobine à une épaisseur.

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.	
1- 10	0.....	0.
11	Impulsion de 10.....	à droite.
20	» forte.....	»
23	» » .....	»
2- 0	» .....	»
3	0.....	0.
4	Impulsion de 12.....	à gauche.
10	» 140.....	»
13	» .....	»
14	0.....	0.
15	Impulsion.....	à droite.
20	» .....	»
3- 0	0 (légèrement à droite).....	0.

30.

TABLEAU II (suite).

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.
1	Impulsion..... à gauche.
7	» ..... »
12	0..... 0.
13	Impulsion ..... à droite.
18	» ..... »
23	» (très-légère)..... »
24	0..... 0.
4- 0	Impulsion ..... à gauche.
6	» (80)..... »
10	0..... 0.
	etc.

TABLEAU III.

Bobine à deux épaisseurs.

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.
1- 10	0.
11	Impulsion légère..... à gauche.
12	» (25)..... »
13	» (35)..... »
14	» ..... »
15	» ..... »
2- 0	» très-forte..... »
2	» (130)..... »
3	» (80)..... »
4	0 (tendance à droite)..... 0.
5	Impulsion (40)..... à droite.
10	» ..... »
11	» (forte)..... »
12	» (très-forte)..... »
14	» faible ..... »
15	0..... 0.
16	Impulsion..... à gauche.
22	» (140)..... »
3- 2	0..... 0.
3	Impulsion de 15..... à droite.
9	» ..... »
14	0..... 0.
20	Impulsion (130)..... à gauche.
4- 0	0..... 0.
6	Impulsion..... à droite.

TABLEAU III (*suite*).

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.	
11	0.....	0.
12	Impulsion.....	à gauche.
16	» (100).....	»
21	» .....	»
22	0.....	0.
23	Impulsion.....	à droite.
	etc.	

TABLEAU IV.

Bobine à trois épaisseurs.

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.	
1-10	0.	
11	Impulsion légère.....	à gauche.
12	» (35).....	»
18	Le trait sort de l'échelle....	»
2- 3	0.....	0.
5	Impulsion.....	à droite.
11	» .....	»
13	» .....	»
14	0.....	0.
15	Impulsion.....	à gauche.
20	» très-forte.....	»
3- 0	0.....	0.
5	Impulsion forte.....	à droite.
11	0.....	0.
	etc.	

TABLEAU V.

Bobine à quatre épaisseurs.

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.	
1-10	0.	
11	Impulsion de 20.....	à gauche.
18	Le trait sort de l'échelle....	»
2- 3	0.....	0.
8	Impulsion (200).....	à droite.
13	» (35) .....	»
14	0.....	0.
15	Impulsion de 50.....	à gauche.
3- 0	0.....	0.
	etc.	

Le relevé de vitesses se rapportant à la série de ces quatre tableaux présente 27 points dans 120 millimètres; d'où, pour le temps d'une division,

$$0 = \frac{1}{15700} \frac{3}{119} \frac{120}{27} = 0,000007.$$

Si l'on examine ces tableaux, on constate immédiatement que tous les zéros se reproduisent exactement aux mêmes points. Ainsi la position des zéros de la courbe est indépendante du nombre des couches du fil de la bobine inductrice, au moins quand ce nombre ne dépasse pas 4.

Si maintenant nous calculons les valeurs de temps qui séparent ces zéros, nous les trouvons mesurées, pour le premier intervalle, par 17 divisions de la vis, d'où

$$0,000007 \times 17 = 0,000119;$$

les oscillations isochrones durent ensuite un temps mesuré par 11 divisions, d'où

$$0,000007 \times 11 = 0,000077.$$

Le tableau I, qui a été dressé plus d'un mois avant ceux qui précèdent, nous avait fourni, pour les temps correspondants,

$$0,000112 \text{ et } 0,0000765.$$

3° *Influence de la bobine induite.* — Le tableau suivant a été obtenu avec l'appareil d'induction à 7260 tours de spires, que m'a fabriqué M. Ruhmkorff. La pile inductrice est la même; la bobine inductrice est à 4 épaisseurs.

TABLEAU VI.

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.	
1-10	0.	
11	Impulsion de 40.....	à gauche.
12	» forte.....	»
13	» .....	»
14	» moindre.....	»
15	» (20).....	»
16	» (50).....	à droite.
18	» .....	»
19	Impulsion.....	à gauche.



TABLEAU VI (*suite*).

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.	
20	» (très-forte).....	»
21	» .....	»
22	Oscillations autour de.....	0.
23	Impulsion forte.....	à droite.
2- 0	Oscillations, puis.....	0.
$\frac{1}{2}$	Impulsion.....	à gauche.
1	» .....	»
2	» (forte).....	»
3	Hésitation.....	»
$3\frac{1}{2}$	0.....	0.
	etc.	

La vitesse était la même qu'aux tableaux précédents. Nous retrouvons ici les mêmes caractères généraux que plus haut, à savoir un premier intervalle plus long que ceux, égaux, qui le suivent. Mais les uns et les autres sont beaucoup plus courts que quand nous opérions avec l'autre bobine induite. Ainsi le premier est représenté par 5 à  $5\frac{1}{2}$  divisions de la vis, les autres par une moyenne de 3,2, ce qui, en temps, correspond à  $0^s,000007 \times 5 = 0^s,000035$  pour le premier, et  $0^s,000007 \times 3,2 = 0^s,000022$ .

En laissant de côté la première branche de courbe, que l'on peut envisager comme correspondant à l'impulsion initiale que donne le projectile au pendule balistique, il paraît *a priori* que la durée de chacune des oscillations qui suivent (durée que nous verrons tout à l'heure être indépendante des intensités) ne saurait être fonction que de ce qui caractérise le fil induit, sa longueur, son diamètre, sa nature, la disposition de ses diverses parties. Je me propose d'essayer de résoudre cette question, qui exige des possibilités d'arrangement et d'étude du fil induit que je n'ai pu encore réaliser. En attendant, les nombres qui précèdent présentent une relation bien remarquable, sur laquelle je n'ose pas insister, vu le trop petit nombre de cas examinés, mais que je ne puis m'empêcher de signaler.

Les durées d'une oscillation, pour les deux bobines induites, sont proportionnelles aux quotients de la longueur des deux fils par leur diamètre ou leur périmètre. Ces longueurs sont en effet, comme on l'a

vu, 2500 et 1200 mètres; les diamètres, 0<sup>mm</sup>,25 et 0<sup>mm</sup>,4; le rapport  $\frac{2500}{0,25} : \frac{1200}{0,4}$  est, par suite, 3,3; le rapport des durées est  $\frac{76}{22} = 3,4$ . Les deux fils induits étant de même substance, on doit encore trouver le même nombre pour le rapport des produits des résistances électriques ordinaires par le diamètre; et en effet, on a

$$\frac{942 \times 0,25}{164 \times 0,4} = 3,5.$$

4° *Influence de l'intensité du courant inducteur.* — La bobine induite est celle de M. Ruhmkorff du tableau VI : la bobine inductrice est à 4 épaisseurs. Au lieu d'être fourni par l'élément Daniell moyen modèle ordinaire, le courant inducteur est produit par un élément Daniell grand modèle, qui porte la déviation galvanométrique mesurant ce courant, de 80 à 250 : l'intensité se trouve ainsi largement triplée.

TABLEAU VII.

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.	
1-10	0.	
11	Impulsion de 100.....	à gauche.
12	» (250).....	»
13	» .....	»
14	» (360).....	»
15	» (130).....	»
16	» (150).....	à droite.
18	» .....	»
19	» .....	à gauche.
21	» .....	»
22	0.....	0.
2- 0	0.....	0.
2	Impulsion forte.....	à gauche.
3	» .....	»
4	» (200).....	à droite.
5	» .....	»
7	Oscillations, puis.....	0.
8	Forte impulsion.....	à gauche.
11	Impulsion.....	à droite.
	etc.	

Si l'on compare ce tableau au précédent, on voit que ni la position

du premier zéro, ni celles des zéros suivants, ne sont modifiées par une multiplication par 3 de l'intensité du courant inducteur.

5° *Effet du fer doux introduit dans la bobine inductrice.* — Tous les résultats qui précèdent se rapportent à un système d'induction absolument dépourvu de pièces de fer. Il peut paraître intéressant de savoir quelles modifications seraient apportées au phénomène par l'introduction de fer doux dans l'intérieur de la bobine. Je n'ai point traité cette question avec la même multiplication d'expériences que les autres, pour deux motifs : d'abord parce que je la crois digne d'un travail tout spécial ; ensuite, parce que le fer doux produit une telle augmentation dans l'intensité des phénomènes, que j'ai craint d'y soumettre le magnifique instrument que m'ont construit MM. Brünner. Je vais néanmoins rapporter quelques expériences qui donneront une idée de cet important côté de la question.

Avant de dresser le tableau qui va suivre (2 juin 1876), les expériences relatives à l'appareil sans morceaux de fer furent répétées. La pile inductrice était le Daniell demi-grandeur ordinaire, rempli seulement au quart ; la bobine induite était celle à 13 860 tours, la bobine inductrice à deux épaisseurs.

Le premier mouvement de l'aiguille de l'électromètre se produisait quand la vis micrométrique marquait 1-6 ; un maximum d'environ 250 avait lieu vers 1-14, et le premier zéro entre 1-17 et 1-18, soit après  $12\frac{1}{2}$  divisions du limbe ; la déviation avait alors lieu en sens inverse, un maximum de 210 vers 1-22 et zéro à 2-1, soit après  $8\frac{1}{2}$  divisions. Le relevé de vitesse donnait 15 points dans 87 millimètres ; d'où

$$\theta = \frac{1}{15700} \frac{3}{119} \frac{87}{15} = 0^{\circ},000009,$$

et, par suite, la durée de la première branche de courbe était  $0^{\circ},000112$ , et la durée commune aux branches suivantes,  $0^{\circ},000076$ , chiffres bien concordants avec ceux déjà cités.

Tout en restant dans le même état, j'introduisis dans la bobine inductrice des morceaux de fils de fer de 1 millimètre de diamètre, et de même longueur que cette bobine, successivement au nombre de 10, 20 et 40, et c'est ainsi que furent obtenus les trois tableaux suivants :

TABLEAU VIII.

Dix fils de fer dans la bobine.

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.
1- 5	0.
6	Impulsion de 20..... à gauche.
8	» 150..... »
10	Le trait sort de l'échelle..... »
12	» ..... »
14	» ..... »
16	» ..... »
18	Impulsion de 250..... »
20	» 100..... »
21	Quelques oscillations, puis... 0.
22	Impulsion de 80..... à droite.
24	» 250..... »
2- 1	» » ..... »
2	» 100..... »
3	» 80..... »
4	0..... 0.
5	Impulsion..... à gauche.
10	» ..... »
12	» ..... »
13	0..... 0.
	etc.

TABLEAU IX.

On ajoute dans la bobine 10 morceaux de fer semblables à ceux qui y sont déjà, ce qui fait en tout 20.

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.
1- 5	0.
6	Impulsion légère..... à gauche.
15	Sort du champ..... »
20	Impulsion de 150..... »
21	» 50..... »
22	0..... 0.
23	Impulsion de 40..... à droite.
2- 2	» 250..... »
4	» 80..... »
5	0..... 0.
9	Impulsion de 150..... à gauche.
12	» 100..... »
13	» 50..... »
14	0..... 0.
15	» ..... à droite.
	etc.

TABLEAU X.

On ajoute 20 morceaux de fer semblables, en tout 40.

Vis micrométrique.	Déviations de l'aiguille.	
1- 5	0.	
6	Impulsion de 50.....	à gauche.
15	Sort du champ.....	»
20	Impulsion de 300.....	»
22	» 150.....	»
23	» 50.....	»
24	0.....	0.
2- 4	Impulsion de 200.....	à droite.
6	» 180.....	»
8	» 30.....	»
9	» 60.....	à gauche.
14	» 150.....	»
16	» .....	»
17	» légère.....	»
18	0.....	0.
	etc.	

De l'examen de ces trois tableaux et de leur comparaison avec les résultats déjà obtenus, ressort immédiatement le fait suivant : la présence du fer doux augmente la durée qui sépare les deux premiers zéros, et cela d'autant plus qu'il y a plus de fer, mais paraît sans influence sur la distribution des zéros suivants. En effet, tandis que la durée de la première branche de courbe était marquée par  $12\frac{1}{2}$  divisions de la vis lorsqu'il n'y avait pas de fer, elle l'est par 16 quand il y a 10 morceaux de fil, par 17 avec 20, et par 19 avec 40; ou, en convertissant en secondes :  $0^s,000112$  sans fer,  $0^s,000144$  avec 10 fils,  $0^s,000153$  avec 20, et  $0^s,000171$  avec 40.

Quant aux intervalles qui séparent les zéros suivants, on les voit toujours correspondre à un nombre moyen de  $8\frac{1}{2}$  divisions, qu'il y ait ou non des fils dans la bobine.

#### Détermination de la valeur des différences de potentiel aux extrémités du fil induit.

C'était là, si l'on veut bien s'en souvenir, le but primitif que je m'étais proposé. Je l'ai abandonné un instant pour l'étude du phénomène

oscillatoire au point de vue du temps, d'abord à cause de l'intérêt même de cette étude, ensuite parce qu'elle m'a conduit à des perfectionnements successifs du dispositif expérimental, que je n'ai arrêtés que quand les expériences ont pris la netteté dont on a déjà pu juger par les quelques tableaux rapportés plus haut. Or j'estime, et l'on s'en convaincra quand on aura vu les résultats qui vont suivre, que toute méthode expérimentale de mesure des tensions induites à l'état de circuit ouvert, qui n'a pas mis nettement en évidence le phénomène oscillatoire, n'a pu fournir que des chiffres dépendant absolument du nombre de circonvolutions de la courbe saisies à chaque instant, chiffres devant par conséquent être rejetés.

Lorsque je commençai ces mesures de quantités, je fus assez longtemps arrêté par une particularité qui se présenta sous la forme suivante : Je me servais exclusivement de la bobine à 13860 tours, la seule que j'eusse alors à ma disposition ; or, quand je traçais les courbes représentant les données successives de l'électromètre à tous les instants, je trouvais toujours une dissymétrie en faveur d'un côté ou de l'autre de l'axe des temps, dissymétrie d'autant plus marquée, que les différences de potentiel étaient plus considérables. Après bien des recherches, je fus conduit à en chercher la cause dans l'électromètre lui-même, et à voir si une même différence de potentiel ne pouvait pas se traduire par des déviations différentes, selon la valeur absolue de l'un de ces potentiels. C'est dans le même temps que j'eus connaissance de la formule de M. Mascart, et que, tout en la vérifiant, je me dressai les Tables que j'ai en partie rapportées plus haut, et qui devaient lever la difficulté qui m'arrêtait. Cette difficulté a eu pour résultat de me permettre d'établir le fait suivant : Quand une bobine induite est formée d'un seul fil, dont un des bouts est dans la profondeur de l'enroulement, tandis que l'autre en occupe l'extérieur, le premier bout reste constamment à un potentiel à peu près nul, et le bout extérieur seul prend des potentiels successifs égaux, par conséquent, à la différence même constatée entre les deux.

C'est pour vérifier ce fait que j'ai dressé avec soin les Tables analogues à celle de la page 218, et c'est pour avoir des résultats concordants que j'ai imaginé de charger l'aiguille successivement au même potentiel positif ou négatif ; la demi-somme des déviations obtenues

représente alors, ainsi qu'il résulte de la formule de M. Mascart et que je l'ai vérifié, la vraie différence de potentiel, et de plus les chiffres obtenus chaque fois, comparés à ceux de la page 218, renseignent sur les valeurs absolues des potentiels, en ce sens que, si l'un des pôles a le potentiel zéro, les deux nombres obtenus seront chaque fois ceux des lignes 2, 3 du tableau précité.

Voici un extrait d'expériences faites sur ce sujet (2 juin 1876). La pile de charge était formée de 50 éléments zinc-cuivre-eau bouillie, constitués par des flacons à large col de 40 centimètres cubes environ chacun: les soudures reposaient, comme dans la disposition ordinaire dite à *tasses*, sur les cols soigneusement vernis de deux flacons consécutifs; les 20 éléments Daniell d'essai donnaient une déviation de 175 de chaque côté, du moins quand leur milieu était relié au sol, comme on va le voir.

*Essai préalable avec les 20 Daniell.*

Pôle positif des Daniell au sol;

Charge de l'aiguille positive; équilibre de l'aiguille : 140 à gauche;

Charge de l'aiguille négative; équilibre de l'aiguille : 210 à droite.

Moyenne : 175.

Milieu des Daniell au sol; déviation de l'aiguille à l'équilibre : 175 à droite ou à gauche, selon le signe de la charge.

Voici maintenant les résultats obtenus avec la bobine; les déviations ne sont plus ici simplement des impulsions, comme dans les tableaux du Chapitre précédent, mais des positions d'un équilibre maintenu assez longtemps stable, surtout dans les endroits peu éloignés des maxima, les seuls que je donnerai.

TABLEAU I.

Vis micrométrique.	Charge de l'aiguille.	Déviation de l'aiguille à l'équilibre.	Moyennes.
1-10	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	160 à gauche. 110 à droite.	135
14	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	250 à gauche. 158 à droite.	204
19	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	86 à droite. 110 à gauche.	98

TABLEAU I (*suite*).

Pour m'assurer que ces résultats ne tiennent pas à une dissymétrie quelconque des appareils, j'intervertis les attaches des extrémités du fil induit avec le disjoncteur.

Vis micrométrique.	Charge de l'aiguille.	Déviatiôn de l'aiguille à l'équilibre.	Moyennes.
19	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 85 \text{ à gauche.} \\ 110 \text{ à droite.} \end{array} \right.$	97,5
20	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 100 \text{ à gauche.} \\ 140 \text{ à droite.} \end{array} \right.$	120
22	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 120 \text{ à gauche.} \\ 180 \text{ à droite.} \end{array} \right.$	150
23	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 150 \text{ à gauche.} \\ 240 \text{ à droite.} \end{array} \right.$	195
2- 0	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 80 \text{ à gauche.} \\ 160 \text{ à droite.} \end{array} \right.$	120
4	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 140 \text{ à droite.} \\ 110 \text{ à gauche.} \end{array} \right.$	125
5	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 180 \text{ à droite.} \\ 120 \text{ à gauche.} \end{array} \right.$	150
10	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 72 \text{ à gauche.} \\ 100 \text{ à droite.} \end{array} \right.$	86
12	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 110 \text{ à gauche.} \\ 170 \text{ à droite.} \end{array} \right.$	140

Si l'on examine les différents couples de nombres de ce tableau, on y voit une concordance complète avec ceux des expériences numérotées 2, 3, dans le tableau de la page 218, lesquels se rapportent, comme on sait, au cas d'un pôle au sol. Il ne paraît se produire quelques différences que lorsqu'on se rapproche des points zéro, et la difficulté de maintenir l'aiguille fixe en ces endroits, où la différence de potentiel varie extrêmement vite avec le temps, explique très-bien ces divergences. Du reste, en admettant que, au moment où va se produire l'oscillation, je ne sois pas absolument certain si le bout noyé du fil ne prend pas une valeur fugitive et petite de potentiel, le tableau qui précède permet d'affirmer que cette valeur est nulle, lorsque la différence de potentiel arrive non loin de ses valeurs maxima, et à ces valeurs.

Ce fait, qui m'avait arrêté bien longtemps, ne surprit point du



tout M. Ruhmkorff, qui savait fort bien, m'a-t-il dit, que ses bobines non cloisonnées, c'est-à-dire non symétriques, présentent, pour me servir de ses propres expressions, « un pôle zéro et un pôle tension ». La même chose me fut dite par M. Edm. Becquerel, vice-président de la Société de Physique, après une communication que j'avais faite à la Société d'une partie des résultats de ce travail. Je l'ai retrouvé aussi dans toutes les études faites avec les premiers appareils de M. Ruhmkorff, dont l'enroulement était uniforme. « Quand on présente à l'extrémité superficielle de la spirale induite un conducteur qui ne fait pas partie du circuit, on peut obtenir des étincelles à distance. L'extrémité profonde de la spirale ne fournit jamais d'étincelle dans de pareilles circonstances. La tension électrique n'est donc pas la même aux deux extrémités du fil; celle du bout superficiel est beaucoup plus considérable que celle du bout profond. Cette inégalité bien constatée est due à un phénomène de condensation. Les parties centrales de l'appareil constituent un condensateur dont la lame isolante est représentée par le tube de verre placé entre les deux bobines, et dont les armures sont, d'une part la spirale inductrice et la masse métallique de l'électro-aimant <sup>(1)</sup>, d'autre part, les couches profondes de la bobine induite. On comprend ainsi comment l'électricité est condensée sur les couches centrales du fil induit, et pourquoi la tension de l'extrémité superficielle de la bobine induite est très-supérieure à celle de son extrémité profonde <sup>(2)</sup>. »

C'est afin que je pusse mettre en évidence l'influence des dispositions d'enroulement du fil induit que M. Ruhmkorff eut la gracieuseté de me faire construire la seconde bobine dont j'ai parlé plus haut.

Voici quelques résultats obtenus avec cet instrument dans l'ordre de faits qui nous occupe.

---

<sup>(1)</sup> Ces masses métalliques ne sont pas nécessaires pour produire l'effet en question, puisqu'il n'y en avait pas dans les expériences qui ont fourni le tableau I.

<sup>(2)</sup> GAVARRET, *Traité d'électricité*, t. II, p. 305 (1858).

TABLEAU II.

La bobine induite est formée de deux bobines identiques réunies en une seule par la jonction de leurs extrémités noyées dans la masse de l'enroulement. La bobine inductrice est à deux épaisseurs.

Vis micrométrique.	Charge de l'aiguille.	Déviatiou de l'aiguille à l'équilibre.	Moyennes.
1- 8	{ -	20 à gauche.	20
	{ +	20 à droite.	
10	{ -	120 à gauche.	120
	{ +	120 à droite.	
11	{ -	150 à gauche.	150
	{ +	150 à droite.	
12	{ -	96 à gauche.	98
	{ +	100 à droite.	
13	{ -	Oscillations, puis 0.	0
	{ +	»	
15	{ -	136 à droite.	138
	{ +	140 à gauche.	
16	{ -	40 à droite.	45
	{ +	50 à gauche.	

etc.

On voit que le changement de signe de la charge entraîne chaque fois le changement de sens de la déviation, sans modifier sa valeur, preuve que les deux potentiels sont égaux et de signe contraire.

TABLEAU III.

Les deux bobines constituant l'appareil d'induction sont reliées par leurs extrémités superficielles, de sorte que le système est encore symétrique, mais les extrémités libres du fil induit sont celles qui sont noyées dans la masse de l'enroulement.

Vis micrométrique.	Charge de l'aiguille.	Déviatiou de l'aiguille à l'équilibre.	Moyennes.
1-11	{ —	155 à gauche.	156
	{ +	157 à droite.	
Je me borne au premier maximum et, toutes les autres dispositions restant les mêmes, je remets le système dans l'état précédent.			
1-11	{ —	160 à gauche.	160
	{ +	160 à droite.	
Je fais communiquer au sol une des extrémités du fil induit.			
1-11	{ —	122 à gauche.	158
	{ +	196 à droite.	
etc.			

etc.

On voit, par le tableau précédent, que la symétrie de disposition de la bobine induite entraîne la symétrie dans la distribution des potentiels; on voit de plus que le premier maximum atteint une valeur toujours la même, quelle que soit la disposition.

Dans le cas d'une communication avec le sol, le pôle relié au sol est à zéro, l'instrument l'indique; mais la différence de potentiel des deux extrémités reste encore la même.

Les mêmes expériences furent répétées avec la même bobine placée dans la deuxième disposition; elles conduisirent au même résultat.

Je les répétai également avec la bobine à 13860 tours<sup>(1)</sup>: le pôle intérieur étant mis au sol, les résultats étaient absolument les mêmes, ce qui n'a rien d'étonnant; mais, lorsque j'y mettais le pôle extérieur, je constatais encore le même écart entre les déviations correspondant aux deux charges de l'aiguille. Seulement la supériorité était en sens inverse, c'est-à-dire que, si, dans le cas des extrémités libres, la déviation la plus forte correspondait à la charge positive de l'aiguille par exemple, cela avait encore lieu lorsque l'extrémité noyée communiquait au sol; mais, lorsque c'était l'autre extrémité qui était jointe à la terre, la plus forte déviation de l'aiguille était donnée par la charge négative, conséquence naturelle de la théorie de l'électromètre vue plus haut; et, dans tous les cas, la moyenne des deux déviations, qui, comme nous l'avons vu, mesure la vraie différence de potentiel, était toujours la même.

Il paraît donc n'y avoir là qu'une affaire de capacité relative des différentes parties du fil, due au fait du voisinage des diverses spires, de leur situation réciproque. Dans tous les cas, la différence de potentiel entre les extrémités du fil demeure indépendante du mode de distribution des valeurs absolues de ce potentiel, et, quand on ne voudra mesurer que ces différences, on n'aura pas besoin de s'enquérir des valeurs absolues, à moins toutefois que les données de l'instrument de mesure ne soient, comme cela avait lieu dans le cas actuel, dépendantes à la fois et de ces différences et des valeurs absolues.

Toutes les déviations qui vont suivre seront toujours corrigées de

---

(<sup>1</sup>) C'est pour répondre aux bienveillantes observations de M. Jamin que j'insistai ainsi sur ces intéressantes conséquences du mode de construction de la bobine induite.

l'erreur de l'instrument, c'est-à-dire qu'on les ramènera à ce qu'aurait fourni l'instrument, si les deux potentiels dont elles doivent mesurer la différence avaient été égaux et de signe contraire.

Cette correction sera faite tantôt par la méthode du changement de signe de la charge de l'aiguille, tantôt, cette charge n'étant pas modifiée, par les Tables de la page 218, où le nombre des lignes 1 sera mis à la place de l'un ou l'autre de ceux des lignes 2 et 3, selon les indications fournies par un changement de charge opéré au début. La charge conservée donnera, en général, les plus grandes déviations.

On comprend maintenant que, grâce à ces corrections, je n'aie eu besoin de tracer la courbe de graduation de l'électromètre que pour le cas de deux potentiels égaux et de signe contraire, auquel tous les autres se trouvent ainsi ramenés.

#### Étude de la première branche de courbe.

Je crois que les valeurs de la différence de potentiel qui forment la première boucle de la courbe que je me suis proposé d'étudier doivent avoir une intime relation avec les phénomènes de courant ou d'étincelle, sous lesquels on a coutume de manifester et d'utiliser le fait de l'induction électrodynamique. C'est à cause de cela que j'ai suivi tout spécialement cette marche première du phénomène, et que j'ai cherché à établir quelques-unes des lois qui la peuvent modifier.

J'examinerai successivement l'influence du nombre des couches du fil de la bobine inductrice, celle de l'intensité du courant inducteur; je donnerai aussi quelques chiffres qui montreront l'action puissante du fer doux sur l'intensité du phénomène.

##### 1° *Influence du nombre des couches de fil de la bobine inductrice.* —

Il a été employé successivement les quatre bobines inductrices à une, deux, trois et quatre épaisseurs, décrites plus haut : le courant inducteur était fourni par le Daniell moyen modèle, rempli à une hauteur de 8 centimètres. Sa résistance est 4<sup>ms</sup>, 5; la résistance des différents fils de jonction, y compris le disjoncteur fermé, est 0<sup>ms</sup>, 05; la bobine d'une seule épaisseur (résistance 0<sup>ms</sup>, 216) étant en expérience, on met un Siemens au rhéocorde. Ainsi le courant inducteur a pour force électromotrice un Daniell, et pour résistance totale 5<sup>ms</sup>, 760.

La déviation galvanométrique destinée à mesurer son intensité est 70 d'un côté, 75 de l'autre, en tout 145; à chaque changement de bobine inductrice, il sera touché au rhéocorde, de façon à ramener cette intensité à la même valeur.

Les 20 Daniell d'essai donnent à l'électromètre, leur milieu étant au sol, 50 de chaque côté, en tout 100.

La bobine induite est celle de 13 860 tours.

TABLEAU IV.

Vis micrométrique.	Déviations observées. (maxima).	Déviations corrigées et doublées.	Ordonnées correspondantes de la courbe de l'électromètre.	Valeurs en Daniell.
Bobine inductrice à une seule épaisseur.				
1- 5	0.	0	0	0
7	15 à droite.	30	30	6
11	50 »	92	92	18
20	75 »	140	140	28
30	0.	0	0	0
Bobine inductrice à deux épaisseurs.				
1-10	50 à droite.	94	94	19
15	130 »	226	236	47
21	160 »	280	307	61
26	130 »	226	236	47
30	0.	0	0	0
Bobine inductrice à trois épaisseurs.				
1- 8	40 à droite.	76	76	15
18	220 »	364	442	88
21	250 »	404	520	104
24	210 »	348	415	83
30	0.	0	0	0
Bobine inductrice à quatre épaisseurs.				
1- 8	50 à droite.	94	94	19
21	340 »	520	750	150
30	0.	0	0	0

J'ai appelé, dans ce tableau, *déviations corrigées* les déviations qui auraient été observées si la même différence de potentiel avait existé entre deux points de potentiels égaux et de signes contraires. Je les ai

doublées, parce que la courbe de graduation de l'électromètre, que je m'étais construite, se rapportait à la somme des déviations droite et gauche. Les 20 Daniell donnant 50 de chaque côté, c'est-à-dire une déviation double de 100, à laquelle correspond à l'électromètre une ordonnée égale à 100, les valeurs de la dernière colonne ont été déduites de celles de sa voisine par la multiplication par le rapport  $\frac{20}{100}$ .

Je n'ai donné, dans le tableau qui précède, que quelques nombres, bien fixes, et surtout les maximum.

Si l'on jette les yeux sur les nombres qui expriment en Daniell les différences de potentiel observées, on est tout de suite frappé par leur grande valeur, eu égard à la faiblesse du courant qui les a produites. On voit, en outre, que les maxima ont lieu tous à peu près au même instant après la rupture, et l'on voit de plus, que les valeurs de ces maxima croissent beaucoup plus vite que proportionnellement au nombre de couches du fil constituant la bobine inductrice. On a, en effet, les nombres successifs 28, 61, 104, 150, dont les rapports sont comme 1—2,2—3,7—5,3, tandis que les épaisseurs de fils sont entre elles comme 1-2-3-4.

Mais si l'on construit les courbes représentant aux instants successifs les différences de potentiel de la cinquième colonne, et qu'on estime l'aire comprise entre chacune d'elles et l'axe des temps, on trouve, pour les courbes correspondant aux séries que je viens de rapporter, le temps  $\theta$  d'une division du limbe de la vis étant représenté par la même longueur qui, en ordonnées, représente 5 Daniell, sensiblement les quatre nombres suivants :

$$90, \quad 182, \quad 300, \quad 393.$$

qui sont entre eux comme 1—2—3,3 et 4,3.

Si l'on réfléchit à la difficulté que présentent à la stabilité d'équilibre de l'aiguille les points un peu éloignés des maximum, cette exactitude pourra paraître suffisante pour énoncer la loi suivante :

*Si l'on désigne par  $\theta$  la durée comprise entre le début du phénomène et l'instant où se produit le premier zéro, par E la différence de potentiel fonction du temps correspondant aux différents instants de cette durée, l'intégrale  $\int_0^\theta E dt$  est proportionnelle, toutes choses restant les*

*mêmes, aux nombres de couches formées par les spires du fil de la bobine inductrice.*

Je dois ajouter que la différence que présentent les rapports précédents,  $1-2-3,3-4,3$  avec les nombres 1, 2, 3, 4 qui exprimeraient rigoureusement cette proportionnalité, différence que je crois de l'ordre des erreurs d'observation, s'est néanmoins toujours produite plutôt en plus qu'en moins; et pourtant, la bobine inductrice conservant toujours le même diamètre extérieur, les spires devenaient moins longues et s'éloignaient du fil induit, à mesure qu'elles appartenaient à une couche plus profonde, le fil inducteur ayant, on s'en souvient, 1 millimètre de diamètre, plus la couche de soie isolante.

*2° Influence de l'intensité du courant inducteur.* — J'ai déjà dit comment se mesurait l'intensité du courant inducteur et comment la petitesse des déviations du galvanomètre permettait de considérer comme rigoureuse la proportionnalité de cette intensité aux longueurs interceptées sur l'échelle par le trait lumineux.

Dans la série d'expériences que je vais rapporter, la bobine inductrice était à une seule épaisseur de fils; la bobine induite était celle de 13860 tours.

La pile Daniell fournissant le courant inducteur était d'abord remplie de liquides à une hauteur de 4 ou 5 centimètres environ; et, le rhéocorde aidant, la déviation galvanométrique était amenée à 50 de chaque côté. L'intensité a été successivement amenée à 100 et 150 de chaque côté, c'est-à-dire doublée et triplée par des additions convenables de liquides dans la pile et à l'aide du rhéocorde.

Les 20 Daniell donnent 150 de chaque côté à l'électromètre, quand leur milieu est au sol. Un intervertissement de charge de l'aiguille indiquant que c'est la charge négative qui fournit les plus grandes déviations, cette charge est laissée.

TABLEAU V.

Vis micrométrique.	Déviation observées.	Déviation corrigée et doublée.	Ordonnées correspondantes de la courbe de l'électromètre.	Valeurs en Daniell.
Courant inducteur d'intensité 1.				
1- 7	0	0	0	0
8	17 à gauche.	34	34	2
12	112 »	196	202	12
16	143 »	253	269	16
20	160 »	276	303	18
22	160 »	276	303	18
24	139 »	239	252	15
2- 5	0.	0	0	0
Courant inducteur d'intensité 2.				
1- 7	0	0	0	0
10	120 à gauche.	211	219	13
15	244 »	396	504	30
20	275 »	481	672	40
22	291 »	464	638	38
24	256 »	431	572	34
2- 5	0.	0	0	0
Courant inducteur d'intensité 3.				
1- 7	0	0	0	0
12	244 à gauche.	396	504	30
16	392 »	563	840	50
18	450 »	625	975	58
20	500 »	662	1060	63
22	500 »	662	1060	63
24	410 »	580	874	52
2- 5	0.	0	0	0

Les colonnes de ce tableau ont la même signification que celles du tableau IV; par suite d'un accroissement donné à la pile de charge, les 20 Daniell donnaient ici une déviation totale de 300; à ce chiffre correspond à la courbe de l'électromètre une ordonnée de 336. Les valeurs de la dernière colonne de droite ont donc été obtenues en multipliant les nombres correspondants de la colonne voisine par le rapport  $\frac{20}{336}$ .

Si l'on examine le tableau qui précède, on voit que les valeurs des



maxima sont encore loin de croître proportionnellement à l'intensité du courant inducteur. Ces valeurs sont en effet 18, 38 et 63, qui sont entre elles comme 1 — 2, 1 — 3, 5.

Si, prenant pour abscisses les temps, on construit, comme plus haut, la courbe dont les ordonnées seront les valeurs de la dernière colonne, on trouve sensiblement, la même longueur représentant en abscisses le temps d'une division du limbe de la vis micrométrique et en ordonnées la force électromotrice de 2 Daniell, les nombres 140, 281 et 428 pour les aires comprises entre ces courbes et l'axe des temps. Ces nombres sont entre eux comme 1, 2, 3.

Ainsi, pas plus que tout à l'heure, on n'entrevoit de relation simple entre les maxima et les intensités du courant inducteur; mais on peut énoncer la loi analogue suivante :

*Si l'on désigne par  $\theta$  le temps compris entre le début du phénomène et l'instant où se produit le premier retour au zéro, par E la différence de potentiel fonction du temps correspondant aux différents instants de cette période, l'intégrale  $\int_0^\theta E dt$  est proportionnelle, toutes choses restant les mêmes, à l'intensité du courant inducteur.*

3° *Influence du fer doux placé dans la bobine.* — J'ai étudié plus haut, avec quelque développement, l'influence du fer doux sur la distribution des zéros de la courbe des tensions. Je n'entreprendrai pas ici l'étude complète au point de vue des intensités, parce qu'elle mérite un travail spécial et que, comme on va le voir, les différences de potentiel prennent tout de suite des valeurs si considérables, qu'il serait nécessaire de modifier la sensibilité des appareils.

Voici seulement un tableau, se rapportant toujours à la première branche de courbe : il a été dressé le même jour que celui qui précède (8 juin 1876); on pourra, par conséquent, l'en rapprocher. Le courant inducteur est fourni par le Daniell moyen rempli à 4 centimètres, et marquant 50 au galvanomètre; la bobine inductrice est à une épaisseur; on y introduit 10 morceaux de fil de fer de 1 millimètre de diamètre, déjà employés.

TABLEAU VI.

Vis micro- métrique.	Déviations observées.	Déviations corrigées et doublées.	Valeurs correspondantes de la courbe de l'électromètre.	Valeurs en Daniell.	Valeurs en Daniell sans fils de fer.
1- 7	0	0	0	0	0
9	50 à gauche.	96	96	6	5
12	230 »	376	465	27,5	12
16	370 »	550	812	48	16
20	380 »	560	832	49,5	18
24	370 »	550	812	48	15
2- 5	230 »	376	465	27,5	0
8	150 »	260	278	16,5	Changement
12	40 »	76	76	4,5	de signe,
13	0.	0	0	0	etc.

Si l'on jette les yeux sur les deux colonnes à droite de ce tableau, on voit d'abord le zéro se produire, dans celle qui se rapporte au cas des fils de fer, plus tard que dans l'autre, résultat déjà connu.

Le maximum a lieu à peu près au même instant dans l'une et dans l'autre, l'allongement de la courbe produit par le fer paraissant ainsi consister surtout dans un ralentissement de la chute au zéro. La différence des valeurs de ces maxima est frappante : l'une atteint presque 50 Daniell, tandis que l'autre n'en dépasse pas 18.

Mais une différence bien plus considérable encore se manifeste, si l'on fait, dans les deux cas, l'intégrale  $\int_0^0 E dt$ , que nous avons été conduit à considérer dans les expériences précédentes. Quand il n'y a pas de fils de fer, la valeur de cette intégrale étant représentée par le nombre 140 l'est par le nombre 457, quand la bobine contient seulement 10 morceaux de fil de fer, résultat du double allongement de la courbe, à la fois dans le sens de l'axe des abscisses et dans celui de l'axe des ordonnées.

**Tracé de six boucles de la courbe figurative des différences successives de potentiel que présentent les extrémités de la bobine induite ouverte.**

Je vais terminer l'exposé de ce travail par le tableau d'une des meilleures séries d'expériences, dans lesquelles, sans modifier les condi-

tions du phénomène, je l'ai suivi aussi loin que me l'a permis l'excellent instrument que m'ont construit MM. Brünner.

Afin de ne pas surcharger les colonnes du tableau qui va suivre des observations que porte mon cahier d'expériences, je ferai remarquer que l'équilibre de l'aiguille était assez difficile à maintenir pour les points avoisinant les zéros, ou d'une manière générale pour les points où la tangente à la courbe fait un angle un peu grand avec l'axe des temps, ce qui n'a rien de surprenant. Aussi mes Notes signalent, sur beaucoup de ces points, un mouvement oscillatoire de l'aiguille, qui finissait toujours par se renfermer dans un espace de 10 ou 20 divisions au plus de la règle où se faisaient les lectures; mais, dès que l'angle de la tangente avec l'axe des temps atteint les environs de 45 degrés, l'équilibre est très-net, et les chiffres sont exacts à une division près de cette règle. Dans les points incomplètement définis, j'ai mis le chiffre que leur assignait le tracé rectifié de la courbe.

TABLEAU VII.

Vis micro- métrique.	Déviations observées.	Déviations corrigées et doublées.	Ordonnées correspondantes de la courbe de l'électromètre.	Valeurs en Daniell.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1- 0	0	0	0	0
2	0	0	0	0
4	0	0	0	0
6	léger mouvement.	»	»	»
7	30 à droite.	60	60	7
8	76 »	140	140	17
10	110 »	196	202	25
12	150 »	260	279	34,4
14	200 »	332	386	47,6
16	220 »	360	436	53,7
18	235 »	394	500	61,7
20	230 »	380	472	58,2
22	215 »	352	422	52
24	160 »	274	298	36,8
2- 1	100 »	180	183	23,2
3	40 »	76	76	9
5	0	0	0	0
7	67 à gauche.	146	146	18
9	104 »	248	262	32,3

TABLEAU VII (*suite*).

Vis micro- métrique.	Déviations observées.	Déviations corrigées et doublées.	Ordonnées correspondantes de la courbe de l'électromètre.	Valeurs en Daniell.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
11	123 »	308	348	43
12	126 »	322	372	46
14	126 »	322	372	46
15	124 »	318	364	45
17	112 »	268	291	36
19	72 »	160	162	20
21	15 »	32	32	4
23	50 à droite.	96	96	12
3- 0	100 »	180	183	23,2
2	150 »	260	279	31,4
4	175 »	300	336	41,4
6	170 »	288	318	39,2
8	143 »	248	262	32,3
10	70 »	128	128	16
12	30 »	60	60	7
14	18 à gauche.	40	40	5
17	84 »	188	186	23
20	112 »	269	293	36,3
22	113 »	271	294	36,8
24	103 »	238	251	31
4- 1	80 »	182	191	23,6
3	44 »	97	97	12
5	0 »	0	0	0
7	50 à droite.	96	96	12
10	110 »	196	202	25
14	150 »	260	279	34,4
16	145 »	250	265	32,7
18	110 »	196	202	25
22	20 »	40	40	5
24	16 à gauche.	32	32	4
5- 2	72 »	156	157	19,4
7	105 »	242	256	31,6
10	90 »	200	206	25,4
13	45 »	96	96	12
16	40 à droite.	76	76	9

Ce tableau a été dressé le 3 mai 1876; la bobine induite était celle à 13860 tours; la bobine inductrice à deux épaisseurs de spire, sans fer

à l'intérieur. Le courant inducteur était fourni par le Daniell demi-grandeur, de résistance  $4^{\text{m}},5$ ; la résistance totale du reste du circuit, disjoncteur, rhéocorde, bobine inductrice, fils de jonction, était  $1^{\text{m}},5$ . La charge de l'aiguille de l'électromètre était positive, et les 20 Daniell, reliés aux quadrants et leur milieu au sol, produisaient une déviation de 80 de chaque côté du zéro. Le temps correspondant à une division de la vis micrométrique était  $0^{\text{s}},0000045$ .

Je n'ai rien à dire sur la formation de ce tableau, qui est analogue à ceux que j'ai déjà transcrits. Les 20 Daniell donnant une déviation de 80 de chaque côté, ou de 160 doublée, ce qui correspond à une ordonnée de 162 à la courbe de l'électromètre, les nombres de la dernière colonne de droite ont été obtenus en multipliant ceux de l'avant-dernière par le rapport  $\frac{20}{162}$ .

Si, prenant pour abscisses les temps donnés par la colonne (1), on construit la courbe représentative des nombres de la colonne (2), c'est-à-dire des déviations observées de l'aiguille de l'électromètre, en prenant comme positives les déviations droites et négatives celles de gauche, on est frappé de la dissymétrie que présente cette courbe par rapport à l'axe des temps, toutes les boucles positives l'emportant de beaucoup sur les boucles négatives.

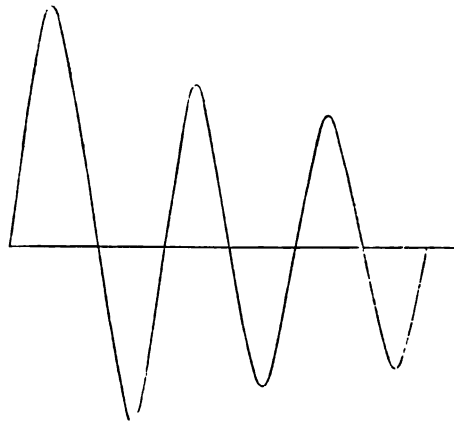
C'est cette dissymétrie que je retrouvais toujours, et qu'il me semblait impossible d'admettre, en dehors même de toute espèce d'hypothèse sur la nature des phénomènes électriques, qui m'a conduit, comme on l'a vu plus haut, à en rechercher la cause dans la distribution non symétrique du potentiel le long du fil, et l'influence de cette distribution sur les indications de l'électromètre.

La courbe dessinée (*fig. 10*) a été dressée en prenant pour abscisses les temps, et pour ordonnées les nombres de la cinquième colonne du tableau précédent; elle représente, par conséquent, les valeurs successives des différences de potentiel que présentent les deux extrémités de la bobine ouverte, quand est rompu le courant inducteur.  $\frac{1}{3}$  millimètre sur la ligne des abscisses représente un temps égal à  $0^{\text{s}},0000045$ ; la même longueur en ordonnées représente la force électromotrice de 1 élément Daniell.

On voit que la diminution des maxima successifs n'est pas très-

rapide; cette diminution doit tenir, soit aux pertes, soit plutôt aux résistances de nature inconnue que doit éprouver le mouvement électrique, par suite desquelles, suivant la conception de M. Helmholtz (<sup>1</sup>), la force vive de ce mouvement doit se convertir peu à peu en chaleur.

Fig 10.



Il résulte de là que ce genre de mouvement, que j'ai déjà eu occasion de comparer, quant à son point de départ, avec celui du pendule balistique brusquement tiré du repos par le choc du projectile, peut lui être, aussi justement peut-être, comparé encore quant à sa durée et à son mode d'extinction. Conclusion, il est probable que le nombre des oscillations est théoriquement infini, ce qui revient à dire qu'on en trouvera d'autant plus qu'on les produira plus intenses et qu'on emploiera pour les observer des instruments plus sensibles. Et, en effet, dans mes premières expériences, en prenant pour pile inductrice 1 Daniell grand modèle, j'en ai compté jusqu'à 30, et la vingtième était encore marquée par une déviation de 160 à l'échelle de l'électromètre.

L'instrument de MM. Brünner ne me permet pas d'aller au delà des six branches de la *fig. 10*, la vis micrométrique n'ayant pas un chemin plus long : ce sont les considérations que je viens de présenter qui m'ont fait sacrifier la poursuite du phénomène à l'accroissement de

---

(<sup>1</sup>) Voir l'*Historique*, plus haut, p. 202.

précision qui résulte toujours de l'emploi d'une vis micrométrique de peu d'étendue.

### RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

I. Au moyen d'un disjoncteur spécial, les extrémités d'une bobine induite ouverte ont été mises en relation avec les quadrants d'un électromètre pendant des temps qui ont pu descendre jusqu'à 4 millièmes de seconde, et dont l'instant était rapporté à celui de la rupture du courant inducteur, avec une approximation certaine du même ordre de grandeur.

II. La machine électromagnétique de M. Gramme, employée comme machine motrice, a été accompagnée d'un régulateur permettant d'affirmer que, pendant plus de quatre minutes, la vitesse du mouvement ne variait pas du centième de sa valeur moyenne.

III. Il a été fait une étude complète de l'électromètre de M. Thomson, dans le cas où les potentiels des quadrants sont comparables, comme grandeur, au potentiel de la charge de l'aiguille.

Cette étude, éclairée par une formule empruntée à M. Mascart, a permis de constater, entre autres, les deux faits suivants :

1° Pour une même différence de potentiel entre deux points reliés aux quadrants, la déviation de l'aiguille dépend de la valeur absolue de ces potentiels; si l'on fait communiquer alternativement ces deux points au sol, leur différence de potentiel demeurant la même, la moyenne des déviations obtenues est sensiblement égale à celle qu'on obtient quand les deux potentiels sont égaux et de signe contraire;

2° Quelles que soient les valeurs absolues des potentiels des deux points liés aux quadrants, si l'on donne alternativement à l'aiguille des charges égales et de signe contraire par un intervertissement des pôles de la pile de charge, la moyenne des deux déviations obtenues est sensiblement égale à la déviation qu'aurait donnée l'instrument si les deux potentiels avaient été égaux et de signe contraire.

De ce second fait il a été tiré la conséquence pratique suivante: il suffit d'établir une courbe de graduation de l'instrument au moyen de piles ouvertes à milieu relié au sol; une double mesure rapidement faite, au moyen d'un commutateur à bascule interposé entre la pile de

charge et l'aiguille, donne deux nombres dont les moyennes se rapportent à la graduation établie; de plus, les valeurs relatives de ces deux nombres peuvent fournir d'utiles renseignements sur les valeurs absolues des potentiels mesurés, et ainsi ce qui pouvait paraître un inconvénient de ces charges, relativement faibles, présente, au contraire, un nouvel avantage.

Cette courbe de graduation a été dressée en suivant, au moyen de piles ouvertes, une marche tout à fait analogue à celle de la graduation du galvanomètre par la lentille à secteurs de MM. de la Provostaye et Desains. Une batterie de 20 éléments Daniell soigneusement entretenus servait à éliminer les variations qui pouvaient se produire dans la sensibilité de l'instrument (<sup>1</sup>).

IV. Ce travail a conduit aux conclusions suivantes (<sup>2</sup>) :

1° Une différence de tension s'accuse entre les deux extrémités du fil induit, au bout d'un temps que je crois pouvoir affirmer moindre que 4 millièmes de seconde, après la rupture métallique du courant inducteur. Le retard observé par M. Blaserna dans la production du courant d'induction, lorsque les deux bobines sont séparées, serait donc insensible quand la bobine induite recouvre immédiatement la bobine inductrice.

2° Cette différence de potentiel va en croissant; elle est de sens tel que, si les deux extrémités du fil induit étaient réunies par un conducteur, elle donnerait lieu au courant induit direct des théories ordinaires de l'induction; il n'est pas douteux que ce serait elle qui produirait tout ou partie de l'étincelle, dite d'*induction*, au cas où les deux extrémités du fil induit ne seraient séparées que par une mince couche d'air, ou une colonne d'un gaz raréfié.

3° Aucun phénomène d'étincelle ou de courant n'ayant pu se produire, la différence de potentiel, après avoir atteint un certain maximum, diminue, retombe à zéro puis change de signe, atteint un nouveau maximum en sens inverse, pour revenir à zéro, et se reproduire en sens inverse, etc.; en un mot, elle oscille de part et d'autre de zéro jusqu'à ce qu'elle y retombe définitivement.

---

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, du 10 juillet 1876, p. 144.

(<sup>2</sup>) *Comptes rendus* du 12 juin 1876, p. 1388.



4° Les temps qui séparent deux zéros consécutifs sont rigoureusement égaux, à l'exception du premier, toujours plus long.

5° Ces temps diffèrent avec les bobines induites employées; mais, pour une bobine donnée, ils sont indépendants du nombre de spires qui composent la bobine inductrice et de l'intensité du courant inducteur, du moins dans les limites où j'ai opéré.

6° Si l'on met dans l'intérieur de la bobine inductrice des fils de fer doux, leur effet est d'allonger la première période seulement, les autres conservant la même valeur qu'auparavant. Ainsi la durée de cette première période a été portée, en prenant pour unité le millième de seconde que je désigne par  $\sigma$ , de  $0^{\sigma},110$  à  $0^{\sigma},144$ ,  $0^{\sigma},153$ ,  $0^{\sigma},171$ , par l'introduction de 10, 20 et 40 morceaux de fils de fer.

7° La durée des oscillations isochrones paraît donc ne dépendre que de la bobine induite elle-même. Elle a été de  $0^{\sigma},076$  pour une bobine formée d'un fil de cuivre de 2500 mètres de long et  $\frac{1}{4}$  de millimètre de diamètre; et de  $0^{\sigma},023$  pour une seconde bobine formée d'un fil de cuivre de 1200 mètres de long et  $\frac{2}{3}$  de millimètre de diamètre. Il est remarquable que ces durées sont entre elles comme les quotients de la longueur des fils par leur diamètre. Ce quotient serait ainsi une espèce de résistance à un flux électrique parcourant les surfaces, et dans laquelle le périmètre remplacerait la section de la résistance ordinaire de Ohm.

8° Lorsque la bobine induite est formée d'une seule partie, de sorte que l'une des extrémités du fil se trouve à l'intérieur de la masse enroulée et l'autre à l'extérieur, la première reste pendant toute la durée du phénomène à un potentiel à peu près nul; la différence mesurée représente ainsi tout entière le potentiel du pôle extérieur. Si la bobine est formée de deux bobines semblables, reliées soit par leur extrémité intérieure, soit par leur extrémité extérieure, les deux pôles libres ont à chaque instant des potentiels égaux et de signes contraires.

9° L'appareil d'induction restant le même, si l'on change l'intensité du courant inducteur, les valeurs du premier maximum, le seul dont je me sois occupé dans ce cas, croissent plus vite que proportionnellement aux intensités du courant inducteur; mais, si l'on considère les valeurs des intégrales  $\int_0 E dt$ , où E désigne la différence de potentiel

fonction du temps et  $\theta$  le temps compris entre le début et le premier zéro, ou, ce qui revient au même, les aires de la première boucle de la courbe générale, ces valeurs sont exactement proportionnelles aux intensités du courant inducteur.

10° L'intensité du courant inducteur restant la même, les valeurs du premier maximum croissent plus vite que proportionnellement aux nombres de couches de spires composant la bobine inductrice; mais les aires  $\int_0^\theta E dt$  leur sont encore proportionnelles.

11° L'introduction de quelques morceaux de fils de fer dans la bobine inductrice augmente dans une énorme proportion la valeur du premier maximum, et surtout celle de l'intégrale  $\int_0^\theta E dt$ .

12° Les maxima successifs vont en diminuant d'une manière relativement assez lente; il est probable que le nombre des oscillations est théoriquement infini, ce qui revient à dire qu'on en observera d'autant plus qu'on les produira plus intenses et qu'on emploiera des instruments de mesure plus sensibles. J'ai pu en compter plus de trente au début de ces expériences. J'ai déterminé avec soin, point par point, dans des circonstances bien spécifiées, les six premières boucles de la courbe générale.

---

---

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES  
DES  
**FONCTIONS ELLIPTIQUES**  
ET  
**DE LEURS PUISSANCES,**

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,  
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

---

INTRODUCTION.

---

§ I. — Objet du présent *Mémoire*.

1. Les fonctions elliptiques  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$ ,  $\nu(x)$ , ainsi que leurs puissances d'exposant entier et positif, peuvent être développées en séries ordonnées, suivant les puissances croissantes de  $x$ .

Dans ces développements, les coefficients des diverses puissances de  $x$  sont des polynômes entiers par rapport au carré d'une certaine indéterminée  $k$ .

Dans les polynômes, convenablement ordonnés, que présente un même développement, le coefficient de la puissance de  $k^2$  qui occupe une place fixe est une fonction de l'exposant correspondant de  $x$ .

Former les développements considérés revient évidemment, pour chacun d'eux, à former cette fonction : c'est ce dernier problème que nous nous proposons de résoudre.

## § II. — Ordre suivi.

## 2. Ce Mémoire contient trois Parties :

D'abord une étude des dérivées d'ordre pair des fonctions elliptiques et de leurs puissances, c'est-à-dire des fonctions  $\lambda^\pi(x)$ ,  $\mu^\pi(x)$ ,  $\nu^\pi(x)$ , dont l'exposant  $\pi$  est un nombre quelconque, entier et positif, susceptible de se réduire à l'unité ;

Ensuite une étude des développements de ces mêmes fonctions, suivant les puissances croissantes de la variable  $x$ , les coefficients de ces différentes puissances étant ordonnés, non pas par rapport aux puissances de  $k^2$ , mais d'une autre façon qui se présente d'elle-même dans nos recherches ;

Enfin une étude de ces mêmes développements, les coefficients étant ordonnés cette fois par rapport aux puissances de  $k^2$ .

## 3. Dans la première Partie :

Nous montrons que les dérivées d'ordre pair des fonctions  $\lambda^\pi(x)$ ,  $\mu^\pi(x)$ ,  $\nu^\pi(x)$  sont des polynômes entiers en  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$ ,  $\nu(x)$  respectivement.

Nous ramenons l'étude des dérivées de ces trois fonctions à celle des dérivées d'ordre pair de la puissance  $\pi^{ième}$  d'une fonction unique  $\varphi(x)$  qui satisfait à l'équation différentielle

$$\left[ \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]^2 = \mathfrak{D} + \mathfrak{Q}\varphi^2(x) + \mathfrak{G}\varphi^4(x).$$

Nous donnons le moyen de former ces nouvelles dérivées à l'aide d'un triangle dont chaque ligne horizontale renferme les coefficients de la dérivée correspondante, ordonnée suivant les puissances croissantes de  $\varphi(x)$ .

De ce mode de formation, nous déduisons et la forme de ces coefficients, qui sont des polynômes entiers spontanément ordonnés par rapport à  $\mathfrak{Q}$ , et l'expression du terme général de ces derniers polynômes en fonction de ce que nous appelons les *chemins ternaires*.

A l'aide de chemins nouveaux, dits *chemins binaires*, nous obtenons, pour ce même terme général, une expression nouvelle, analogue à la précédente, mais beaucoup plus simple.

De cette dernière expression nous tirons la fonction génératrice de notre terme général, et nous constatons que cette fonction est une fraction rationnelle dont le dénominateur s'écrit immédiatement.

Enfin, de cette fonction génératrice, nous concluons que le terme général de nos polynômes en  $\varphi$  est, en même temps, celui d'une série récurrente proprement dite; nous faisons connaître l'équation et l'ordre de cette série: nous tirons de cette équation l'expression analytique de notre terme général, et nous indiquons le procédé à suivre pour déterminer les constantes contenues dans cette dernière expression.

#### 4. Dans la seconde Partie :

Nous déterminons la forme des développements en séries des fonctions  $\lambda^\pi(x)$ ,  $\mu^\pi(x)$ ,  $\nu^\pi(x)$ , et montrons que l'on peut écrire, d'une part,

$$\lambda^\pi(x) = A_0^{(\pi)} \frac{x^\pi}{\pi!} - A_1^{(\pi)} \frac{x^{\pi+2}}{(\pi+2)!} + A_2^{(\pi)} \frac{x^{\pi+4}}{(\pi+4)!} - A_3^{(\pi)} \frac{x^{\pi+6}}{(\pi+6)!} + \dots,$$

et, de l'autre,

$$\mu^\pi(x) = B_0^{(\pi)} - B_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + B_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - B_3^{(\pi)} \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\nu^\pi(x) = C_0^{(\pi)} - C_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + C_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - C_3^{(\pi)} \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Nous expliquons comment les coefficients  $A^{(\pi)}$ ,  $B^{(\pi)}$ ,  $C^{(\pi)}$  se peuvent déduire des dérivées d'ordre pair des fonctions  $\lambda^\pi(x)$ ,  $\mu^\pi(x)$ ,  $\nu^\pi(x)$ .

Nous indiquons un procédé permettant de calculer ces coefficients à l'aide de triangles analogues à ceux de notre première Partie.

Nous déduisons de la considération de ces triangles l'expression de ces coefficients à l'aide des chemins ternaires.

Ces coefficients se présentant sous la forme de polynômes ordonnés spontanément, mais non pas par rapport aux puissances de  $k^2$ , nous exprimons, à l'aide des chemins binaires, le terme général de l'un quelconque de ces polynômes.

De cette expression, nous déduisons la fonction génératrice de ce terme général, et nous voyons qu'elle est toujours une fraction rationnelle dont le dénominateur s'écrit immédiatement.

Enfin, de cette fonction génératrice, nous concluons que notre terme

général est aussi celui d'une série récurrente proprement dite; nous donnons l'équation et l'ordre de cette série; de l'équation nous tirons l'expression analytique de notre terme général, puis nous indiquons le moyen de déterminer les constantes contenues dans cette dernière expression.

### 5. Dans la troisième Partie :

Nous posons

$$A_q^{(\pi)} = \alpha_{q,0}^{(\pi)} + \alpha_{q,1}^{(\pi)} h^2 + \alpha_{q,2}^{(\pi)} h^4 + \dots + \alpha_{q,i}^{(\pi)} h^{2i} + \dots,$$

et déterminons l'expression de  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$  en fonction de  $q$ , l'indice  $i$  étant supposé constant.

Nous posons de même

$$B_q^{(\pi)} = \beta_{q,0}^{(\pi)} + \beta_{q,1}^{(\pi)} h^2 + \beta_{q,2}^{(\pi)} h^4 + \dots + \beta_{q,i}^{(\pi)} h^{2i} + \dots,$$

et déterminons l'expression de  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$  en fonction de  $q$ , l'indice  $i$  étant supposé constant.

Arrivés à  $C_q^{(\pi)}$ , nous constatons qu'il n'y a pas lieu de le développer suivant les puissances croissantes de  $h^2$ ; nous posons donc, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes,

$$C_q^{(\pi)} = \gamma_{q,0}^{(\pi)} h^{2q} + \gamma_{q,1}^{(\pi)} h^{2q-2} + \gamma_{q,2}^{(\pi)} h^{2q-4} + \dots + \gamma_{q,i}^{(\pi)} h^{2q-2i} + \dots,$$

et nous démontrons que  $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$  est juste égal à  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ .

Enfin nous constatons que l'expression analytique des trois fonctions  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ , abstraction faite des valeurs numériques des constantes, est absolument la même pour ces trois fonctions : nous écrivons cette expression analytique, nous remarquons que chacune des fonctions  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$  est le terme général d'une série récurrente proprement dite; nous donnons l'équation ainsi que l'ordre de cette série, nous montrons de quelle manière on en peut former la fonction génératrice, et nous rappelons le procédé à suivre pour déterminer les

constantes qui se présentent, soit au numérateur de cette fonction génératrice, soit dans l'expression même des coefficients  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ .

### § III. — Méthode employée.

6. Nous ne pouvons, en quelques mots, décrire notre méthode : ce qui précède sur l'ordre suivi par nous en donne une première idée, que la lecture du Mémoire peut seule rendre complète. Nous dirons cependant que cette méthode nous paraît toute nouvelle; qu'elle procède surtout par examen immédiat, par énumération, par considération de chemins; qu'elle se rapproche bien moins des méthodes de l'Algèbre que de celles de l'Analyse combinatoire.

### § IV. — Travaux antérieurs.

7. Comme nous l'avons déjà dit, nous nous sommes proposé de trouver l'expression explicite des coefficients  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$  en fonction de  $q$ , l'indice  $i$  étant supposé constant.

8. Bien que les fonctions elliptiques aient été l'objet des recherches les plus nombreuses et les plus profondes, ce problème n'a pas, que nous sachions, reçu de solution antérieure à la nôtre.

Les seuls travaux antérieurs où l'on ait résolu, non pas le problème général que nous considérons, mais seulement un cas très-particulier soit d'un problème analogue, soit de ce problème lui-même, sont des plus récents : on les doit à F. Didon, ancien professeur à la Faculté des Sciences de Besançon; à M. C. Moreau, capitaine d'artillerie à Calais; à M. Hermite, membre de l'Institut.

9. Les résultats obtenus par F. Didon ont paru dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, au mois de mars 1872, sous la forme d'une question dont on demandait la solution.

Dans l'énoncé, F. Didon considère l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + au' + bu'},$$

qui définit une fonction impaire  $u$ , si l'on donne  $u = 0$  pour  $x = 0$ . Il suppose cette fonction développée suivant les puissances croissantes de  $x$ ; il fait observer que, dans ce développement, la  $(2n + 1)^{\text{ième}}$  puissance de  $x$  est multipliée par un polynôme en  $a$  et  $b$ , homogène et du degré  $n$ ; puis il considère, dans ce polynôme, le coefficient de  $a^{n-1}b$  et celui de  $a^{n-2}b^2$ , en donne les expressions et demande qu'on les démontre.

Cet énoncé ne convient qu'à la seule fonction  $\lambda(x)$ ; dans son développement, il regarde les polynômes qui multiplient les différentes puissances de  $x$  comme ordonnés par rapport à une quantité analogue à notre  $\varphi$ , mais non point par rapport à  $k^2$ ; il ne donne que l'expression des deux premiers coefficients; en un mot, il ne résout qu'un cas très-particulier du problème résolu dans notre seconde Partie.

Bien que nous ignorions absolument la méthode suivie par F. Didon, la façon dont il a disposé ses résultats ne nous permet point de penser qu'il ait connu l'expression générale des coefficients considérés par lui.

Quoi qu'il en soit, ses résultats sont les premiers en date et, malgré leur défaut de généralité, ils nous paraissent fort remarquables.

10. M. C. Moreau a résolu, et semble avoir été le seul à résoudre la question posée par F. Didon. Sa solution a été insérée dans les *Nouvelles Annales*, au mois de janvier 1876.

Par une méthode purement algébrique, fondée sur la considération des fonctions génératrices, M. C. Moreau parvient aux expressions données par F. Didon, et, en outre, à celle du coefficient suivant. Mais il dispose ses résultats comme F. Didon, et, par suite, ne nous semble point connaître la forme générale des coefficients qu'il considère. Sa méthode d'ailleurs conduit à des calculs si longs et si compliqués, dont la longueur et la complication croissent si rapidement à mesure qu'on avance, que nous ne pensons pas qu'on puisse, en la suivant, parvenir à cette forme générale. Il faut reconnaître toutefois que, malgré ses défauts, cette méthode est extrêmement ingénieuse.

11. M. Hermite est le premier qui, dans cette étude des coefficients, ait considéré les polynômes qui multiplient les puissances successives de  $x$  comme ordonnés par rapport aux puissances de  $k^2$ : il les a supposés ordonnés par rapport aux puissances croissantes; et, dans une



lettre insérée au *Journal de Crelle*, en février 1876, il a donné, parmi beaucoup d'autres beaux résultats, les expressions des coefficients de  $k^2$ , de  $k^4$  et de  $k^6$  dans les polynômes que présentent les développements des trois fonctions elliptiques. Ces expressions n'avaient jamais été publiées par personne. Elles sont disposées de la manière la plus conforme à la loi générale. Par malheur, notre illustre géomètre n'indique point la méthode qu'il a suivie pour y parvenir et ne fait point connaître la forme générale des coefficients des diverses puissances de  $k^2$ .

12. En résumé, si remarquables qu'ils soient, les travaux antérieurs aux nôtres ne donnent que des résultats très-particuliers : ils laissent absolument intact ce problème de la forme générale des coefficients qui est l'objet principal du présent Mémoire.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

### DÉRIVÉES D'ORDRE PAIR.

---

#### CHAPITRE I.

##### FORME DES DÉRIVÉES.

---

##### § I. — Dérivées d'ordre quelconque.

13. Les trois fonctions elliptiques  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$ ,  $\nu(x)$  satisfont respectivement aux trois équations différentielles

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 = 1 - (1 + k^2)\lambda^2 + k^2\lambda^4,$$

$$\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 = (1 - k^2) + (2k^2 - 1)\mu^2 - k^2\mu^4,$$

$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 = (k^2 - 1) + (2 - k^2)\nu^2 - \nu^4,$$

desquelles on déduit immédiatement, par dérivation, les trois nouvelles équations

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = -(1+k^2)\lambda + 2k^2\lambda^2,$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = (2k^2 - 1)\mu - 2k^2\mu^2,$$

$$\frac{d^2\nu}{dx^2} = (2 - k^2)\nu - 2\nu^2.$$

14. Ces équations nous montrent :

D'abord que les dérivées d'ordre pair des puissances entières et positives des fonctions  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  sont toutes des polynômes entiers par rapport à ces fonctions et complètement déterminés par les équations précédentes : en effet,  $\lambda^2$ , par exemple, a sa dérivée seconde entière par rapport à  $\lambda$ , et il en est de même de toutes ses dérivées d'ordre pair, puisque la dérivée seconde d'un polynôme entier en  $\lambda$  se compose de deux polynômes entiers en  $\lambda$ , multipliés l'un par  $\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2$  et l'autre par  $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$  ;

Ensuite, que les dérivées d'ordre impair de ces puissances de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  sont toutes irrationnelles par rapport à ces fonctions, et incomplètement déterminées par les équations précédentes : en effet, les dérivées d'ordre impair de  $\lambda^2$ , par exemple, sont toutes formées d'un polynôme entier en  $\lambda$  multiplié par l'irrationnelle  $\frac{d\lambda}{dx}$ , et elles ne sont complètement déterminées que si l'on donne le signe de cette irrationnelle.

15. Nous ne nous occuperons que des dérivées d'ordre pair.

## § II. -- Dérivées d'ordre pair.

16. Supposons un polynôme entier, en  $\lambda$ , par exemple, et ne renfermant que des puissances impaires de  $\lambda$ . Dans sa dérivée seconde, le polynôme multiplié par  $\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2$  ne contient que des puissances impaires de  $\lambda$ , et le polynôme multiplié par  $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$  que des puissances paires. Comme  $\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2$  est une fonction paire et  $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$  une fonction impaire,

cette dérivée seconde est un polynôme entier en  $\lambda$  ne contenant, comme le polynôme donné, que des puissances impaires de  $\lambda$ . Il en est de même pour toutes les dérivées d'ordre pair du polynôme donné, et, en particulier, pour toutes les dérivées d'ordre pair des puissances impaires de  $\lambda$ . Comme nos raisonnements s'étendent d'ailleurs immédiatement aux fonctions  $\mu$  et  $\nu$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\frac{d^{2q} \lambda^{2p+1}}{dx^{2q}} &= L_{q,0}^{(2p+1)} \lambda + L_{q,1}^{(2p+1)} \lambda^3 + L_{q,2}^{(2p+1)} \lambda^5 + \dots, \\ \frac{d^{2q} \mu^{2p+1}}{dx^{2q}} &= M_{q,0}^{(2p+1)} \mu + M_{q,1}^{(2p+1)} \mu^3 + M_{q,2}^{(2p+1)} \mu^5 + \dots, \\ \frac{d^{2q} \nu^{2p+1}}{dx^{2q}} &= N_{q,0}^{(2p+1)} \nu + N_{q,1}^{(2p+1)} \nu^3 + N_{q,2}^{(2p+1)} \nu^5 + \dots\end{aligned}$$

17. Des raisonnements tout à fait analogues aux précédents nous montreraient que toutes les dérivées d'ordre pair des puissances paires de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  sont des polynômes entiers, ne contenant que des puissances paires de ces fonctions. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\frac{d^{2q} \lambda^{2p}}{dx^{2q}} &= L_{q,0}^{(2p)} + L_{q,1}^{(2p)} \lambda^2 + L_{q,2}^{(2p)} \lambda^4 + \dots, \\ \frac{d^{2q} \mu^{2p}}{dx^{2q}} &= M_{q,0}^{(2p)} + M_{q,1}^{(2p)} \mu^2 + M_{q,2}^{(2p)} \mu^4 + \dots, \\ \frac{d^{2q} \nu^{2p}}{dx^{2q}} &= N_{q,0}^{(2p)} + N_{q,1}^{(2p)} \nu^2 + N_{q,2}^{(2p)} \nu^4 + \dots\end{aligned}$$

## CHAPITRE II.

### INTRODUCTION DE LA FONCTION $\varphi(x)$ .

#### § I. — Propriétés de la fonction $\varphi(x)$ .

18. Nous désignons par  $\varphi(x)$  une fonction de  $x$  satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \Omega + \mathcal{V}\varphi^2 + \mathcal{G}\varphi^4,$$

et, par suite, à l'équation

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \varphi + 2G\varphi^2,$$

qui se déduit de la précédente par dérivation.

19. Par des raisonnements analogues à ceux du Chapitre précédent, nous verrions que les dérivées d'ordre pair de  $\varphi^\pi(x)$  sont des polynômes entiers en  $\varphi$ , parfaitement déterminés, tandis que les dérivées d'ordre impair sont des fonctions irrationnelles de  $\varphi$ , imparfaitement déterminées.

20. Nous verrions de même que les dérivées d'ordre pair de  $\varphi^\pi(x)$  sont des fonctions de  $x$  impaires ou paires, suivant que l'exposant  $\pi$  est lui-même impair ou pair, de façon que nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d^{2q} \varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} &= F_{q,0}^{(2p+1)} \varphi + F_{q,1}^{(2p+1)} \varphi^2 + F_{q,2}^{(2p+1)} \varphi^3 + \dots, \\ \frac{d^{2q} \varphi^{2p}}{dx^{2q}} &= F_{q,0}^{(2p)} \varphi + F_{q,1}^{(2p)} \varphi^2 + F_{q,2}^{(2p)} \varphi^3 + \dots \end{aligned}$$

## § II. — Emploi de la fonction $\varphi(x)$ .

21. Les coefficients  $\omega, \varphi, g$  étant indéterminés, il est bien clair que les six équations (13) du Chapitre précédent sont contenues, comme cas particuliers, dans les deux équations (18) du Chapitre actuel. Mais les dérivées d'ordre pair des fonctions  $\lambda^\pi(x), \mu^\pi(x), \nu^\pi(x)$  ne dépendent (14) que des six premières équations, de même que les dérivées d'ordre pair de  $\varphi^\pi(x)$  ne dépendent que des deux dernières. Ces dérivées-là sont donc contenues dans ces dérivées-ci comme cas particuliers.

22. Il nous suffit, par conséquent, d'étudier les dérivées d'ordre pair de  $\varphi^\pi(x)$  : c'est ce que nous allons faire. Quant au passage de ces dérivées des puissances de  $\varphi$  à celles des puissances de  $\lambda, \mu, \nu$ , il n'y aura, pour l'effectuer, qu'à remplacer, dans tous nos résultats,

$$\varphi, \omega, \varphi, g, F, f$$

respectivement par

$$\begin{aligned}\lambda, & \quad 1, \quad -(1+k^2), \quad k^2, \quad L, \quad l, \\ \mu, & \quad 1-k^2, \quad 2k^2-1, \quad -k^2, \quad M, \quad m, \\ \nu, & \quad k^2-1, \quad 2-k^2, \quad -1, \quad N, \quad n.\end{aligned}$$

### CHAPITRE III.

#### CALCUL DES DÉRIVÉES D'ORDRE PAIR.

##### § I. — Puissances impaires de $\varphi(x)$ .

23. Nous avons posé (20)

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = F_{q,0}^{(2p+1)} \varphi + F_{q,1}^{(2p+1)} \varphi^3 + F_{q,2}^{(2p+1)} \varphi^5 + \dots$$

Il s'ensuit que le calcul de la dérivée d'ordre  $2q$  de la fonction  $\varphi^{2p+1}(x)$  revient à celui des quantités

$$F_{q,0}^{(2p+1)}, \quad F_{q,1}^{(2p+1)}, \quad F_{q,2}^{(2p+1)},$$

24. Pour calculer ces quantités, considérons la dérivée d'ordre  $2q-2$ . D'après ce qui précède, nous avons

$$\frac{d^{2q-2}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q-2}} = \sum_r F_{q-1,r}^{(2p+1)} \varphi^{2r+1}.$$

Il en résulte

$$\frac{d^{2q-1}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q-1}} = \frac{d\varphi}{dx} \sum_r (2r+1) F_{q-1,r}^{(2p+1)} \varphi^{2r},$$

et par suite

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} \sum_r (2r+1) F_{q-1,r}^{(2p+1)} \varphi^{2r} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 \sum_r (2r+1) 2r F_{q-1,r}^{(2p+1)} \varphi^{2r-1},$$

et, enfin,

$$\frac{d^{2q} \varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = \sum_r (2r+1) F_{q-1,r}^{(2p+1)} [(2r) \oslash \varphi^{2r-1} + (2r+1) \heartsuit \varphi^{2r+1} + (2r+2) \S \varphi^{2r+1}].$$

Cette dernière égalité, comparée à celle qu'on a écrite (23), nous donne la relation

$$F_{q,r}^{(2p+1)} = (2r-1)(2r) \S F_{q-1,r-1}^{(2p+1)} + (2r+1) \heartsuit F_{q-1,r}^{(2p+1)} + (2r+2)(2r+3) \oslash F_{q-1,r+1}^{(2p+1)},$$

qui lie entre elles les quatre quantités

$$F_{q,r}^{(2p+1)}, \quad F_{q-1,r-1}^{(2p+1)}, \quad F_{q-1,r}^{(2p+1)}, \quad F_{q-1,r+1}^{(2p+1)},$$

et qui, nous fournissant la première à l'aide des trois autres, nous permet de calculer les  $F_q^{(2p+1)}$  à l'aide des  $F_{q-1}^{(2p+1)}$ .

25. Mais, avant de procéder à ce calcul, nous pouvons tirer de cette relation le nombre des termes de la dérivée d'ordre  $2q$  de la fonction  $\varphi^{2p+1}(x)$ .

Cette formule nous montre, en effet, que, si  $q-1$  est inférieur à  $p$ , il s'introduit deux termes nouveaux quand on passe de la dérivée d'ordre  $2q-2$  à la dérivée d'ordre  $2q$ , mais qu'il ne s'en introduit qu'un seul dans tous les autres cas.

Par suite, le premier terme de cette dernière dérivée contient  $\varphi$  avec l'exposant  $2(p-q)+1$  ou l'exposant 1, suivant que  $q$  est inférieur à  $p$  ou qu'il lui est, soit égal, soit supérieur. Le dernier terme contient toujours  $\varphi$  avec l'exposant  $2(p+q)+1$ ; donc, lorsque  $q$  est inférieur à  $p$ , le nombre des termes de la dérivée est  $2q+1$ , et, dans tous les autres cas, il est  $p+q+1$ .

On a donc

$$\frac{d^{2q} \varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = \sum_{r'}^{p+q} F_{q,r'}^{(2p+1)} \varphi^{2r+1},$$

la limite inférieure  $r'$  étant égale à  $p-q$  si  $p$  est plus grand que  $q$ , et à zéro dans tous les autres cas.

26. Revenons au calcul des quantités  $F_{g,0}^{(2p+1)}$ ,  $F_{g,1}^{(2p+1)}$ ,  $F_{g,2}^{(2p+1)}$ , ..., et formons un tableau de ces quantités, en cette sorte

$$\begin{aligned}
 & F_{0,p}^{(2p+1)}, \\
 & F_{1,p-1}^{(2p+1)} \quad F_{1,p}^{(2p+1)} \quad F_{1,p+1}^{(2p+1)}, \\
 & F_{2,p-2}^{(2p+1)} \quad F_{2,p-1}^{(2p+1)} \quad F_{2,p}^{(2p+1)} \quad F_{2,p+1}^{(2p+1)} \quad F_{2,p+2}^{(2p+1)}, \\
 & \dots\dots\dots, \\
 & F_{q-1,0}^{(2p+1)} \quad F_{q-1,1}^{(2p+1)} \quad \dots \quad F_{q-1,p-3}^{(2p+1)} \quad F_{q-1,p-1}^{(2p+1)} \quad F_{q-1,p}^{(2p+1)} \quad F_{q-1,p+1}^{(2p+1)} \quad F_{q-1,p+2}^{(2p+1)} \quad \dots \quad F_{q-1,p+q-1}^{(2p+1)}, \\
 & F_{q,0}^{(2p+1)} \quad F_{q,1}^{(2p+1)} \quad \dots \quad F_{q,p-2}^{(2p+1)} \quad F_{q,p-1}^{(2p+1)} \quad F_{q,p}^{(2p+1)} \quad F_{q,p+1}^{(2p+1)} \quad F_{q,p+2}^{(2p+1)} \quad \dots \quad F_{q,p+q-1}^{(2p+1)} \quad F_{q,p+q}^{(2p+1)}, \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

La relation précédente (24) nous montre que, dans ce tableau, chaque terme  $F_{q,1}^{(2,p+1)}$  d'une ligne horizontale se déduit des trois termes les plus voisins de la ligne horizontale immédiatement supérieure par l'opération suivante :

On multiplie :

Le terme à <i>gauche</i> au-dessus par. ....	$(2r-1)(2r)G$
Le terme <i>verticalement</i> au-dessus par. ...	$(2r+1)^2Q$
Le terme à <i>droite</i> au-dessus par. ....	$(2r+2)(2r+3)Q$

puis on ajoute les trois produits obtenus.

27. On peut même donner au calcul une disposition telle, que le calculateur soit dispensé de se préoccuper des indices des quantités F.

Considérons, en effet, deux lignes horizontales quelconques, mais consécutives, du tableau précédent. Au haut de la colonne verticale remplie par les  $F$  dont le second indice inférieur est  $r$ , marquons le nombre impair  $2r + 1$ , et faisons de même pour toutes les colonnes verticales contenant des  $F$ ; au haut de chaque colonne vide séparant deux des colonnes pleines précédentes, marquons le nombre pair compris entre les nombres impairs de ces deux colonnes pleines, nous

obtenons le tableau suivant :

...	$2r-3$	$2r-2$	$2r-1$	$2r$	$2r+1$	$2r+2$	$2r+3$	$2r+4$	$2r+5$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	F	...	F	...	F	...	F	...	F	...
...	F	...	F	...	F	...	F	...	F	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

et la règle pourra être énoncée ainsi :

*Pour obtenir un F à l'aide des trois F supérieurs dont il dépend, on multiplie chacun de ceux-ci :*

*Par le nombre impair marqué au haut de sa colonne ;*

*Par le nombre pair ou impair, marqué au haut de la colonne vide ou pleine, qu'il faut traverser ou suivre pour aller à lui en partant du coefficient F que l'on cherche ;*

*Par la quantité  $\mathfrak{O}$ , la quantité  $\mathfrak{G}$  ou la quantité  $\mathfrak{V}$ , suivant qu'on arrive à lui en montant à droite, à gauche ou verticalement ;*

*Enfin on ajoute les trois produits obtenus.*

## § II. — Puissances paires de $\varphi(x)$ .

28. Nous avons posé (20),

$$\frac{d^{2q} \varphi^{2p}}{dx^{2q}} = F_{q,0}^{(2p)} + F_{q,1}^{(2p)} \varphi^2 + F_{q,2}^{(2p)} \varphi^4 + \dots$$

Le calcul de la dérivée d'ordre  $2q$  de la fonction  $\varphi^{2p}(x)$  revient, par conséquent, à celui des quantités

$$F_{q,0}^{(2p)}, \quad F_{q,1}^{(2p)}, \quad F_{q,2}^{(2p)}, \quad \dots$$

29. Par des raisonnements et des calculs tout à fait analogues aux précédents (24), nous trouvons

$$\frac{d^{2q} \varphi^{2p}}{dx^{2q}} = \sum_r (2r) F_{q-1,r}^{(2p)} [(2r-1) \mathfrak{O} \varphi^{2r-2} + (2r) \mathfrak{V} \varphi^{2r} + (2r+1) \mathfrak{G} \varphi^{2r+2}],$$

et, par suite,

$$F_{q,r}^{(2p)} = (2r-2)(2r-1) \mathfrak{G} F_{q-1,r-1}^{(2p)} + (2r)^2 \mathfrak{V} F_{q-1,r}^{(2p)} + (2r+1)(2r+2) \mathfrak{O} F_{q-1,r+1}^{(2p)}.$$



**Cette dernière formule lie entre elles les quatre quantités**

$$F_{g,r}^{(2p)}, \quad F_{g-1,r-1}^{(2p)}, \quad F_{g-1,r}^{(2p)}, \quad F_{g-1,r+1}^{(2p)},$$

**et permet de calculer la première à l'aide des trois autres.**

30. Cette formule nous montre d'abord que le nombre des termes de la dérivée d'ordre pair  $2q$  de la fonction  $\varphi^{2p}(x)$  est égal à  $2q + 1$  tant que  $q$  est inférieur à  $p$  et à  $p + q + 1$  dans tous les autres cas, et il s'ensuit que nous pouvons écrire

$$\frac{d^2 \varphi^{2p}}{dx^2} = \sum_r^{p+q} F_{q,r}^{(2p)} \varphi^{2r},$$

la limite inférieure  $r'$  étant égale à  $p - q$  tant que  $q$  est inférieur à  $p$ ,  
et à zéro dans tous les autres cas.

**31. Formons avec les quantités  $F_{g,0}^{(2p)}$ ,  $F_{g,1}^{(2p)}$ ,  $F_{g,2}^{(2p)}$ , ... le tableau que voici :**

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & F_{0,p}^{(2p)}, \\
 & & & & \\
 & & F_{1,p-1}^{(2p)} & F_{1,p}^{(2p)} & F_{1,p+1}^{(2p)}, \\
 & & \\
 & F_{2,p-2}^{(2p)} & F_{2,p-1}^{(2p)} & F_{2,p}^{(2p)} & F_{2,p+1}^{(2p)} & F_{2,p+2}^{(2p)}, \\
 & & \\
 & \dots\dots\dots, \\
 & \\
 F_{q-1,0}^{(2p)} & F_{q-1,1}^{(2p)} & \dots & F_{q-1,p-2}^{(2p)} & F_{q-1,p-1}^{(2p)} & F_{q-1,p}^{(2p)} & F_{q-1,p+1}^{(2p)} & F_{q-1,p+2}^{(2p)} & \dots & F_{q-1,p+l-1}^{(2p)}, \\
 & \\
 F_{q,0}^{(2p)} & F_{q,1}^{(2p)} & \dots & F_{q,p-2}^{(2p)} & F_{q,p-1}^{(2p)} & F_{q,p}^{(2p)} & F_{q,p+1}^{(2p)} & F_{q,p+2}^{(2p)} & \dots & F_{q,p+q-1}^{(2p)} & F_{q,p+q}^{(2p)}, \\
 & \\
 & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

La relation (29) nous montre que, dans ce tableau, chaque quantité  $F_{q,r}^{(i,p)}$  d'une ligne horizontale se déduit de trois quantités les plus voisines de la ligne horizontale immédiatement supérieure par l'opération suivante :

On multiplie

$$\begin{aligned} \text{La quantité à gauche au-dessus par.} & \dots\dots\dots (2r-2)(2r-1)\mathfrak{G} \\ \text{La quantité verticalement au-dessus par.} & \dots\dots\dots (2r)^2\mathfrak{Q} \\ \text{La quantité à droite au-dessus par.} & \dots\dots\dots (2r+1)(2r+2)\mathfrak{D} \end{aligned}$$

puis on ajoute les trois produits obtenus.

32. Pour calculer les quantités  $F^{(2p)}$  sans avoir à nous préoccuper de leurs indices inférieurs, prenons deux lignes horizontales quelconques, mais consécutives du tableau précédent; au haut de la colonne verticale remplie par les F dont le second indice inférieur est  $r$ , marquons le nombre pair  $2r$ , et faisons de même pour toutes les colonnes verticales contenant des F; au haut de chaque colonne verticale vide séparant deux des colonnes pleines précédentes, marquons le nombre impair compris entre les nombres pairs de ces deux colonnes pleines; nous obtenons le tableau suivant :

...	$2r-4$	$2r-3$	$2r-2$	$2r-1$	$2r$	$2r+1$	$2r+2$	$2r+3$	$2r+4$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	F	...	F	...	F	...	F	...	F	...
...	F	...	F	...	F	...	F	...	F	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

et la règle précédente (31) pourra être énoncée ainsi :

*Pour obtenir un F à l'aide des trois F supérieurs dont il dépend, on multiplie chacun de ceux-ci :*

*Par le nombre pair marqué au haut de sa colonne ;*

*Par le nombre impair ou pair marqué au haut de la colonne vide ou pleine qu'il faut traverser ou suivre pour aller à lui en partant du coefficient F que l'on cherche ;*

*Par la quantité  $\mathfrak{D}$ , la quantité  $\mathfrak{G}$  ou la quantité  $\mathfrak{Q}$ , suivant qu'on arrive à lui en montant à droite, à gauche ou verticalement ;*

*Enfin on ajoute les trois produits obtenus.*





par chacun des traits verticaux ou obliques et par chacun des points, à l'exception du point de départ, qui constituent le chemin. Il résulte d'ailleurs immédiatement de la loi de formation (27) du tableau des  $F^{(2p+1)}_{q,r}$  que tout point, sauf le point de départ, apporte le nombre impair de sa colonne; que tout trait montant soit verticalement, soit à gauche, soit à droite, apporte le nombre impair ou pair de la colonne qu'il suit ou traverse, multiplié soit par  $\heartsuit$ , soit par  $\S$ , soit par  $\oslash$ .

37. Un chemin ternaire quelconque, montant du polynôme considéré  $F^{(2p+1)}_{q,r}$  au polynôme initial  $F^{(2p+1)}_{0,p}$ , contient  $q + 1$  points et  $q$  traits tant verticaux qu'obliques. Si l'on désigne par  $v$  le nombre des traits verticaux, par  $d$  celui des traits montant vers la droite, par  $g$  celui des traits montant vers la gauche, on a évidemment, entre  $v$ ,  $d$ ,  $g$ ,  $p$ ,  $q$  et  $r$ , les deux relations

$$d + g = q - v,$$

$$d + r = g + p.$$

38. Un chemin ternaire est complètement déterminé lorsqu'on connaît les seconds indices inférieurs des  $F$  placés aux points où il passe, et l'ordre dans lequel ces points se succèdent. Les seconds indices inférieurs correspondant à deux points consécutifs sont d'ailleurs deux nombres égaux ou ne différant entre eux, dans un sens ou dans l'autre, que d'une seule unité. Il suffit donc, pour former l'un quelconque des chemins ternaires montant de  $F^{(2p+1)}_{q,r}$  à  $F^{(2p+1)}_{0,p}$ , d'écrire une suite de  $q + 1$  nombres entiers et non négatifs, dont le premier soit  $r$  et le dernier  $p$ , et tels que la différence de deux consécutifs d'entre eux soit toujours l'un des trois nombres  $-1$ ,  $0$ ,  $+1$ .

Le chemin étant déterminé, le terme qui lui correspond dans le polynôme  $F^{(2p+1)}_{q,r}$  est déterminé également, car ce terme est le produit des facteurs apportés par les éléments du chemin, et nous savons (36) quel facteur apporte chaque élément.

39. Considérons un chemin ternaire quelconque, montant de  $F^{(2p+1)}_{q,r}$  à  $F^{(2p+1)}_{0,p}$ . Appelons, en général,  $h_i$  et  $v_i$  le nombre des points et le nom-

bre des traits verticaux de ce chemin, placés sur la colonne pleine marquée  $2t + 1$ ; appelons de même  $d_i$  et  $g_i$  le nombre des traits obliques montant vers la droite et celui des traits obliques montant vers la gauche qui traversent la colonne vide marquée  $2t$ . Les lettres  $v, g, d$  conservant leurs significations précédentes (37), nous aurons

$$\begin{aligned} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \dots &= q + 1, \\ v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots &= v, \\ g_1 + g_2 + g_3 + \dots &= g, \\ d_1 + d_2 + d_3 + \dots &= d; \end{aligned}$$

et le terme de  $F_{q,r}^{(2p+1)}$  correspondant à ce chemin sera le produit

$$\frac{1}{2r+1} 1^4 3^4 5^4 7^4 \dots 1^v 3^v 5^v 7^v \dots 2^d 4^d 6^d \dots \varphi^r g^g d^d,$$

qu'on peut écrire aussi

$$\frac{1}{2r+1} 1^{4+v} 3^{4+v} 5^{4+v} 7^{4+v} \dots 2^{d_1+d} 4^{d_1+d} 6^{d_1+d} \dots \varphi^r g^g d^d,$$

le facteur  $\frac{1}{2r+1}$  provenant, dans chacun de ces deux produits, de ce que le point de départ, qu'on a compté dans  $h_r$ , n'apporte absolument rien.

40. Si donc on convient que le signe  $\sum$  s'étende à tous les chemins ternaires montant de  $F_{q,r}^{(2p+1)}$  à  $F_{0,p}^{(2p+1)}$ , on a identiquement

$$F_{q,r}^{(2p+1)} = \frac{1}{2r+1} \sum (1^{4+v} 3^{4+v} 5^{4+v} 7^{4+v} \dots 2^{d_1+d} 4^{d_1+d} 6^{d_1+d} \dots \varphi^r g^g d^d).$$

41. D'après ce qui précède, deux points ou deux traits de même direction, par cela seul qu'ils appartiennent à la même colonne verticale, donnent les mêmes facteurs dans le résultat. Ces deux points, comme ces deux traits, peuvent donc, à l'égard de ce résultat, être dits *points* ou *traits équivalents*. Par suite, parmi les chemins ternaires ayant les mêmes extrémités, tous ceux qui se composent d'éléments équivalents chacun à chacun donnent finalement des termes identiques.

Distribuons les chemins ternaires montant de  $F_{q,r}^{(2p+1)}$  à  $F_{o,p}^{(2p+1)}$  en groupes, tels que tous les chemins d'un même groupe soient ainsi composés d'éléments équivalents chacun à chacun; appelons  $\Omega$  le nombre des chemins du groupe dont fait partie le chemin type considéré ci-dessus (39); et convenons d'étendre le signe  $\sum$  non plus, comme plus haut (40), à tous les chemins ternaires, mais seulement à tous les groupes de ces chemins; nous pourrons écrire

$$F_{q,r}^{(2p+1)} = \frac{1}{2r+1} \sum \Omega (1^{A_1+r}, 3^{A_1+r}, 5^{A_1+r}, \dots, 2s_1+d, 4s_1+d, 6s_1+d, \dots, \varphi \cdot g \cdot \omega^d).$$

## § II. — Puissances paires de $\varphi(x)$ .

42. Si, dans le calcul du tableau des  $F^{(2p)}$ , on n'effectue aucune réduction, la quantité  $F_{q,r}^{(2p)}$  est un polynôme dont tous les termes contiennent un coefficient numérique et une puissance positive ou nulle de chacune des quantités  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $g$ .

Le nombre de ces termes est évidemment celui des chemins ternaires montant de  $F_{q,r}^{(2p)}$  à  $F_{o,p}^{(2p)}$ .

Chacun de ces chemins peut être représenté par une suite de points et de traits verticaux ou obliques et fournit un terme dans le polynôme  $F_{q,r}^{(2p)}$ . Ce terme est le produit des facteurs apportés par les différents éléments du chemin, et il résulte évidemment de la loi de formation (32) du tableau des  $F^{(2p)}$  que tout point, sauf le point de départ, apporte le nombre pair de sa colonne; que tout trait montant soit verticalement, soit à gauche, soit à droite, apporte le nombre pair ou impair de la colonne qu'il suit ou traverse multiplié soit par  $\varphi$ , soit par  $g$ , soit par  $\omega$ .

43. Un chemin ternaire quelconque, montant de  $F_{q,r}^{(2p)}$  à  $F_{o,p}^{(2p)}$ , contient  $q+1$  points et  $q$  traits; et si l'on appelle  $v$ ,  $g$ ,  $d$  les nombres respectifs des traits montant soit verticalement, soit à gauche, soit à droite, on a

$$\begin{aligned} d + g &= q - v, \\ d + r &= g + p; \end{aligned}$$

Le chemin est déterminé quand on connaît les seconds indices inférieurs des  $F^{(2p)}$  placés aux points où il passe. Pour former un chemin, il suffit donc d'écrire une suite de  $q + 1$  nombres entiers, positifs ou nuls, dont le premier soit  $r$  et le dernier  $p$ , et tels que deux consécutifs d'entre eux aient toujours pour différence l'un des trois nombres  $-1, 0, +1$ .

44. Soit un chemin ternaire quelconque, montant de  $F_{q,r}^{(2p)}$  à  $F_{u,p}^{(2p)}$ . Appelons, en général,  $h_i$  et  $v_i$  le nombre des points et le nombre des traits verticaux de ce chemin placés sur la colonne pleine marquée  $2i$ ; appelons de même  $d_i$  et  $g_i$  le nombre des traits obliques montant vers la droite et celui des traits obliques montant vers la gauche, qui traversent la colonne vide marquée  $2i + 1$ ; nous aurons

$$\begin{aligned} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \dots &= q + 1, \\ v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots &= v, \\ g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + \dots &= g, \\ d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots &= d; \end{aligned}$$

et le terme de  $F_{q,r}^{(2p)}$  correspondant à ce chemin sera le produit

$$\frac{1}{2^r} 0^{h_0} 2^{h_1} 4^{h_2} \dots 0^{v_0} 2^{v_1} 4^{v_2} \dots 1^{g_0} 3^{g_1} 5^{g_2} \dots 1^d 3^d 5^d \dots \varphi^r g^g d^d,$$

qu'on peut écrire aussi

$$\frac{1}{2^r} 0^{h_0+r} 2^{h_1+r} 4^{h_2+r} \dots 1^{g_0+d} 3^{g_1+d} 5^{g_2+d} \dots \varphi^r g^g d^d;$$

le facteur  $\frac{1}{2^r}$  provenant, dans chacune de ces expressions, de ce que le point de départ, qu'on a compté dans  $h_r$ , n'apporte absolument rien.

45. Si le point de départ est situé dans la première colonne verticale de gauche, le dénominateur  $2r$  devient nul et fait disparaître l'un des zéros du numérateur.

En général, si le chemin ternaire que l'on considère a un point (autre que le point de départ), dans cette première colonne verticale de gauche, il fournit un terme nul. Pour épargner au calculateur la

considération de pareils chemins, on peut énoncer ainsi la règle pour former un chemin ternaire : écrire une suite de  $q + 1$  nombres entiers et supérieurs à zéro (le point de départ pouvant seul être nul), dont le premier soit  $r$  et le dernier  $p$ , et tels que la différence de deux consécutifs d'entre eux égale toujours l'un des trois nombres  $-1, 0, +1$ .

46. Si nous supposons que le signe  $\sum$  s'étende à tous les chemins ternaires montant de  $F_{q,r}^{(2p)}$  à  $F_{o,p}^{(2p)}$ , même à ceux qui donnent des termes nuls, nous avons identiquement

$$F_{q,r}^{(2p)} = \frac{1}{2r} \sum (o^{A_0+r}, 2^{A_1+r}, 4^{A_2+r}, \dots, 1^{B_0+d}, 3^{B_1+d}, 5^{B_2+d}, \dots, \Psi^r \mathcal{G}^s \mathcal{O}^d).$$

47. Groupons nos chemins ternaires de telle sorte que tous les chemins d'un même groupe présentent des éléments équivalents chacun à chacun (41); nommons  $\Omega$  le nombre des chemins du groupe dont fait partie le chemin type considéré ci-dessus (44); étendons enfin le signe  $\sum$ , non plus comme précédemment (46) à tous les chemins, mais seulement à tous les groupes de chemins; nous pourrions écrire

$$F_{q,r}^{(2p)} = \frac{1}{2r} \sum \Omega (o^{A_0+r}, 2^{A_1+r}, 4^{A_2+r}, \dots, 1^{B_0+d}, 3^{B_1+d}, 5^{B_2+d}, \dots, \Psi^r \mathcal{G}^s \mathcal{O}^d).$$

### § III. — Calcul des chemins ternaires.

48. Les formules que nous venons de donner, d'abord pour  $F_{q,r}^{(2p+1)}$ , ensuite pour  $F_{q,r}^{(2p)}$ , permettent de calculer chacune de ces quantités directement, c'est-à-dire sans avoir besoin de calculer auparavant aucune des quantités précédentes. Celles de ces formules qui répondent aux groupes de chemins sont un peu plus simples que les autres; mais toutes exigent que l'on forme le tableau des chemins ternaires montant soit de  $F_{q,r}^{(2p+1)}$  à  $F_{o,p}^{(2p+1)}$ , soit de  $F_{q,r}^{(2p)}$  à  $F_{o,p}^{(2p)}$ .

49. Pour former ces chemins, on écrira toutes les suites possibles de  $q + 1$  nombres entiers non négatifs, dont le premier soit  $r$  et le der-



nier  $p$ , et tels que la différence de deux quelconques consécutifs d'entre eux égale toujours l'un des trois nombres  $-1, 0, +1$ .

On voit que le tableau des chemins pour le calcul de  $F_{q,r}^{(2p)}$  sera le même que pour le calcul de  $F_{q,r}^{(2p+1)}$ . Seulement, dans le cas de  $F_{q,r}^{(2p)}$ , on supprimera, puisqu'ils ne donnent (45) que des termes nuls, tous les chemins présentant, ailleurs qu'au point de départ, un ou plusieurs zéros.

50. On abrège beaucoup la formation du tableau des chemins ternaires en écrivant d'abord les deux suites de  $q+1$  nombres, correspondant, l'une au chemin qui s'écarte le plus vers la droite et l'autre à celui qui s'écarte le plus vers la gauche. Ces deux chemins sont deux chemins limites. Un nombre d'un chemin ternaire quelconque ne peut jamais être ni plus grand que le nombre de même rang du chemin limite de droite, ni plus petit que le nombre de même rang du chemin limite de gauche.

## CHAPITRE V.

### EXPRESSION DES $f^{(n)}$ A L'AIDE DES CHEMINS BINAIRES.

#### § I. — Puissances impaires de $\varphi(x)$ .

51. Nous avons vu (43) que les trois nombres  $v, g, d$ , exposants respectifs des trois quantités  $\varphi, \mathfrak{g}, \omega$  dans le terme général de  $F_{q,r}^{(2p+1)}$ , sont liés entre eux par les deux relations

$$\begin{aligned} g + d &= q - v, \\ d + r &= g + p. \end{aligned}$$

De la première, il résulte que  $F_{q,r}^{(2p+1)}$  est un polynôme homogène de degré  $q$  par rapport aux trois quantités  $\varphi, \mathfrak{g}, \omega$ :

De la seconde, que la différence des exposants  $g$  et  $d$  est constante et toujours égale à celle des nombres  $r$  et  $p$ ; et que, dans chaque terme de  $F_{g,r}^{(2p+1)}$ ,  $g$  est inférieur, égal ou supérieur à  $d$ , suivant que  $r$  est de son côté inférieur, égal ou supérieur à  $p$ , c'est-à-dire suivant que, dans le tableau des quantités  $F^{(2p+1)}$ , la quantité considérée  $F_{g,r}^{(2p+1)}$  est placée au-dessous et à gauche, verticalement au-dessous, ou bien au-dessous et à droite de la quantité initiale  $F_{0,p}^{(2p+1)}$ ;

Des deux ensemble, que les trois exposants d'un terme quelconque de  $F_{g,r}^{(2p+1)}$  sont déterminés dès qu'on donne l'un quelconque d'entre eux; et, par conséquent, qu'on obtient la même suite en ordonnant, soit par rapport aux puissances décroissantes de  $\varphi$ , soit par rapport aux puissances croissantes de  $\mathcal{G}$ , soit par rapport aux puissances croissantes de  $\omega$ .

52. Ordonnons par rapport aux puissances décroissantes de  $\varphi$ . Comme les exposants  $g$  et  $d$  ont une différence constante (dont nous représentons par  $e$  la valeur absolue), ils augmentent en même temps, chacun d'une unité, quand on passe d'un terme au suivant. Par suite, les exposants de  $\varphi$  forment une progression arithmétique dont la raison est  $-2$  et dont le premier terme est  $q - e$ . Nous pouvons donc écrire

$$F_{g,r}^{(2p+1)} = f_{g,r,0}^{(2p+1)} \varphi^{q-e} \mathcal{G}^0 \omega^0 + f_{g,r,1}^{(2p+1)} \varphi^{q-e-2} \mathcal{G}^{+1} \omega^{+1} + \dots + f_{g,r,i}^{(2p+1)} \varphi^{q-e-2i} \mathcal{G}^{+i} \omega^{+i} + \dots,$$

les exposants  $\mathcal{G}$  et  $\omega$  étant égaux, le plus petit à zéro, le plus grand à  $e$ .

53. Le problème qui nous occupe est ainsi ramené à la recherche de l'expression générale de  $f_{g,r,i}^{(2p+1)}$ .

Pour obtenir cette expression, nous remarquerons d'abord que tous les termes de  $F_{g,r}^{(2p+1)}$  qui contiennent  $\varphi$  avec l'exposant  $q - e - 2i$  sont ceux qui proviennent des chemins ternaires présentant chacun  $q - e - 2i$  traits verticaux. Si, dans ces derniers, nous supprimons tous ces traits verticaux, et, en même temps, tous les points qui les surmontent immédiatement, nous obtenons, en rapprochant les tronçons restants par un mouvement de translation verticale, des chemins nouveaux contenant chacun  $e + 2i$  traits, tous obliques, et  $e + 2i + 1$  points. Ces nou-

veaux chemins ne présentant que des traits de deux sortes, ceux qui montent vers la droite et ceux qui montent vers la gauche, nous les nommerons *chemins binaires*, les distinguant ainsi des chemins ternaires considérés jusqu'à présent.

54. Ces chemins binaires seront complètement déterminés si l'on fait connaître, dans l'ordre où ils se succèdent, les seconds indices inférieurs correspondant à leurs différents points. Pour former l'un quelconque d'entre eux, il suffit donc d'écrire une suite de  $e + 2i + 1$  nombres, entiers et non négatifs, dont le premier soit  $r$  et le dernier  $p$ , et tels que la différence de deux quelconques consécutifs d'entre eux égale toujours l'un des deux nombres  $+1, -1$ .

55. Considérons l'un quelconque de ces chemins binaires, et appelons  $h_i, g_i, d_i$  les nombres respectifs de points situés sur la colonne pleine marquée  $2t + 1$ , de traits montant vers la gauche et de traits montant vers la droite, situés sur la colonne vide marquée  $2t$ . Nous avons

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + h_3 + \dots &= e + 2i + 1, \\ g_1 + g_2 + g_3 + \dots &= g + i, \\ d_1 + d_2 + d_3 + \dots &= d + i. \end{aligned}$$

56. Cherchons de combien de chemins ternaires ce chemin binaire résulte, ou, en d'autres termes, combien de chemins ternaires on en peut déduire en y rétablissant, de toutes les manières possibles,  $q - e - 2i$  couples formés chacun d'un trait vertical surmonté d'un point.

Soit, en général,  $\omega_i$  le nombre de ces couples que nous rétablissons, en les y intercalant, sur la colonne pleine marquée  $2t + 1$ . Puisque le chemin binaire considéré (55) présente  $h_i$  points sur cette colonne, nos  $\omega_i$  couples pourront y être placés d'autant de manières différentes qu'il y a de façons de former le nombre  $\omega_i$  par l'addition de  $h_i$  nombres entiers positifs ou nuls. Or, si l'on convient de regarder la factorielle 0! comme égale à l'unité, ce dernier nombre est donné par l'expression

$$\frac{(\omega_i + h_i - 1)!}{\omega_i! (h_i - 1)!}.$$

Donc, si l'on décompose le nombre  $q - e - 2i$  en plusieurs parties  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t, \dots$ , compatibles avec le chemin binaire considéré,

c'est-à-dire telles que  $w_i$  soit forcément nulle dès qu'il arrive à  $h_i$  de l'être, mais puisse être nulle sans que  $h_i$  le soit, alors, parmi les chemins ternaires fournis par le chemin binaire considéré, le nombre de ceux qui proviennent de la présente décomposition est égal à

$$\frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0!(h_0 - 1)!} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1!(h_1 - 1)!} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2!(h_2 - 1)!} \dots$$

Donc, si l'on étend le signe  $\sum$  à toutes les décompositions de  $q - e - 2i$  compatibles avec le chemin binaire considéré, le nombre total des chemins ternaires fournis par ce chemin binaire est donné par l'expression

$$\sum \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0!(h_0 - 1)!} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1!(h_1 - 1)!} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2!(h_2 - 1)!} \dots$$

57. Si l'on se rappelle ce que fournissent (36) chaque point et chaque trait vertical ou oblique d'un chemin ternaire, on voit, pour le chemin binaire considéré :

Que les points fournissent le produit

$$\frac{1}{2r+1} 1^4 3^4 5^4 \dots,$$

le facteur  $\frac{1}{2r+1}$  provenant de ce que le point de départ, compté dans  $h_r$ , ne fournit absolument rien ;

Que les traits montant vers la gauche fournissent le produit

$$3^{c+i} 2^g 4^g 6^g \dots ;$$

Que les traits montant vers la droite fournissent le produit

$$3^{d+i} 2^d 4^d 6^d \dots ;$$

Et enfin que les couples verticaux intercalés fournissent le produit

$$3^{q-e-2i} \sum \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0!(h_0 - 1)!} 1^{w_0} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1!(h_1 - 1)!} 3^{2w_1} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2!(h_2 - 1)!} 5^{2w_2} \dots$$

58. Mais  $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$  est la somme des résultats fournis par tous les chemins binaires représentés par  $e + 2i + 1$  nombres dont le premier est  $r$

et le dernier  $p$ . Si donc nous étendons le premier  $\sum$  ci-dessous à tous ces chemins binaires, en laissant au second sa signification dès deux paragraphes précédents, nous obtenons la formule suivante :

$$g_{r,t}^{(2p+1)} = \frac{1}{2r+1} \sum \left[ 1^{h_0} 3^{h_1} 5^{h_2} \dots 2t_1 + d_1 4t_2 + d_2 6t_3 + d_3 \dots \right. \\ \left. \times \sum \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0! (h_0 - 1)!} 1^{w_0} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} 3^{w_1} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2! (h_2 - 1)!} 5^{w_2} \dots \right].$$

59. Étant donné l'un quelconque des chemins binaires considérés, on a évidemment

$$g_{t+1} + d_t = 2h_t$$

si  $t$  n'est égal ni à  $r$  ni à  $p$ ;

$$g_{t+1} + d_t = 2h_t - 1$$

si  $t$  est égal à l'un des nombres  $r$  et  $p$ ; et, enfin,

$$g_{t+1} + d_t = 2h_t - 2$$

si  $t$  est égal à la fois à  $r$  et à  $p$ , dans le cas où ceux-ci seraient égaux entre eux.

Évidemment aussi, on a

$$g_t = d_t,$$

si  $2t$  est inférieur ou supérieur aux deux nombres  $2r + 1$ ,  $2p + 1$  en même temps;

$$g_t = d_t + 1,$$

lorsque  $r$  est supérieur à  $p$  et que  $2t$  est compris entre  $2r + 1$  et  $2p + 1$ ;

$$g_t = d_t - 1,$$

lorsque  $r$  est inférieur à  $p$  et que  $2t$  est aussi compris entre  $2r + 1$  et  $2p + 1$ .

Il s'ensuit qu'il existe, entre les quantités  $g_0, g_1, g_2, \dots, d_0, d_1, d_2, \dots, h_0, h_1, h_2, \dots$ , des équations du premier degré en nombre égal à celui des quantités  $g_0, g_1, g_2, \dots, d_0, d_1, d_2, \dots$ . Par suite, ces dernières quantités sont déterminées dès que l'on connaît les quantités  $h_0, h_1, h_2, \dots$ . Par suite, deux chemins binaires, pour lesquels  $h_0, h_1, h_2, \dots$  ont les mêmes valeurs, sont équivalents.

60. Cela étant, assemblons les chemins binaires, de telle sorte que ceux d'un même groupe soient ainsi équivalents; appelons  $\Omega$  le nombre des chemins binaires du groupe dont fait partie le chemin binaire type de la formule précédente (58); le second  $\sum$  conservant toujours la même signification, et le premier s'étendant, non plus comme précédemment, à tous les chemins binaires, mais seulement à tous les groupes de ces chemins, cette formule (58) pourra s'écrire ainsi :

$$f_{q,r,i}^{(2p+1)} = \frac{1}{2r+1} \sum \Omega \left[ 1^4, 3^4, 5^4, \dots, 2s_1+d_1, 4s_2+d_2, 6s_3+d_3, \dots \right. \\ \left. \times \sum \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0! (h_0 - 1)!} 1^{2w_0} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} 3^{2w_1} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2! (h_2 - 1)!} 5^{2w_2} \dots \right].$$

## § II. — Puissances paires de $\varphi(x)$ .

61. Des raisonnements analogues à ceux qui précèdent (51) nous montrent que  $F_{q,r}^{(2p)}$  est un polynôme homogène du degré  $q$  par rapport aux trois quantités  $\varphi$ ,  $\mathfrak{G}$ ,  $\omega$ ; que, dans tous les termes de  $F_{q,r}^{(2p)}$ , la différence des exposants  $g$  et  $d$  des quantités  $\mathfrak{G}$  et  $\omega$  est constante et égale à celle des nombres  $r$  et  $p$ ; enfin qu'on peut écrire

$$F_{q,r}^{(2p)} = f_{q,r,0}^{(2p)} \varphi^{q-e} \mathfrak{G}^e \omega^0 + f_{q,r,1}^{(2p)} \varphi^{q-e-1} \mathfrak{G}^{e+1} \omega^{0+1} + \dots + f_{q,r,i}^{(2p)} \varphi^{q-e-2i} \mathfrak{G}^{e+i} \omega^{0+i} + \dots,$$

la lettre  $e$  désignant la valeur absolue de la différence des nombres  $r$  et  $p$ ; et les exposants  $e$  et  $n$  étant égaux, le plus grand à  $e$  et le plus petit à zéro.

62. Les termes de  $F_{q,r}^{(2p)}$  qui contiennent  $\varphi$  avec l'exposant  $q - e - 2i$  proviennent des chemins ternaires contenant chacun  $q - e - 2i$  traits verticaux; et ceux-ci, par la suppression de ces traits verticaux ainsi que des points qui les surmontent immédiatement, donnent naissance à des chemins binaires que l'on formera en écrivant, de toutes les manières possibles, une suite de  $e + 2i + 1$  nombres entiers et non négatifs, dont le premier soit  $r$  et le dernier  $p$ , et tels que la différence de deux quelconques consécutifs d'entre eux soit toujours égale à l'un des nombres  $-1$ ,  $+1$ .

63. Considérons l'un quelconque de ces chemins binaires, et appelons  $h_i$ ,  $g_i$ ,  $d_i$  les nombres respectifs de points situés sur la colonne pleine marquée  $2i$ , de traits montant vers la gauche et de traits montant vers la droite situés sur la colonne vide marquée  $2i + 1$ . Nous avons

$$\begin{aligned} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \dots &= e + 2i + 1, \\ g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + \dots &= e + i, \\ d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots &= i. \end{aligned}$$

64. Pour obtenir le nombre des chemins ternaires que donne ce chemin binaire lorsqu'on y rétablit, de toutes les manières possibles, les couples supprimés, appelons  $\omega_i$  le nombre de ces couples que nous rétablissons sur la colonne pleine marquée  $2i$ . Puisque le chemin binaire considéré présente  $h_i$  points sur cette colonne, nos  $\omega_i$  couples pourront y être placés d'un nombre de façons différentes, exprimé par la formule

$$\frac{(\omega_i + h_i - 1)!}{\omega_i! (h_i - 1)!},$$

dans laquelle on convient de regarder toujours la factorielle  $0!$  comme égale à l'unité. Et, par conséquent, si l'on décompose le nombre  $q - e - 2i$  en plusieurs parties  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots$ , compatibles avec le chemin binaire considéré, c'est-à-dire telles que  $\omega_i$  soit forcément nulle, dès qu'il arrive à  $h_i$  de l'être, mais puisse être nulle sans que  $h_i$  le soit, parmi les chemins ternaires fournis par le chemin binaire considéré, le nombre de ceux qui proviennent de la présente décomposition sera égal à

$$\frac{(\omega_0 + h_0 - 1)!}{\omega_0! (h_0 - 1)!} \frac{(\omega_1 + h_1 - 1)!}{\omega_1! (h_1 - 1)!} \frac{(\omega_2 + h_2 - 1)!}{\omega_2! (h_2 - 1)!} \dots$$

Donc, si l'on étend le signe  $\sum$  à toutes les décompositions de  $q - e - 2i$  compatibles avec le chemin binaire considéré, le nombre total des chemins ternaires fournis par ce chemin binaire est donné par l'expression

$$\sum \frac{(\omega_0 + h_0 - 1)!}{\omega_0! (h_0 - 1)!} \frac{(\omega_1 + h_1 - 1)!}{\omega_1! (h_1 - 1)!} \frac{(\omega_2 + h_2 - 1)!}{\omega_2! (h_2 - 1)!} \dots$$

65. Pour le chemin binaire considéré, les points fournissent (42) le produit

$$\frac{1}{2^r} 0^{h_0} 2^{h_1} 4^{h_2} \dots,$$

le facteur  $\frac{1}{2^r}$  provenant de ce que le point de départ, qui est compté dans  $h_r$ , ne fournit absolument rien.

Les traits montant vers la gauche fournissent le produit

$$G^{e+i} 1^{s_0} 3^{s_1} 5^{s_2} \dots;$$

les traits montant vers la droite fournissent le produit

$$D^{D+i} 1^{d_0} 3^{d_1} 5^{d_2} \dots,$$

et enfin les couples verticaux intercalés fournissent le produit

$$G^{q-e-2i} \sum \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0! (h_0 - 1)!} 0^{2w_0} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} 2^{2w_1} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2! (h_2 - 1)!} 4^{2w_2} \dots$$

On a donc, en étendant le premier  $\sum$  ci-dessous à tous ces chemins binaires et laissant au second sa signification habituelle,

$$f_{q,r,i}^{(2p)} = \frac{1}{2^r} \sum \left[ 0^{h_0} 2^{h_1} 4^{h_2} \dots 1^{s_0+d_0} 3^{s_1+d_1} 5^{s_2+d_2} \dots \right. \\ \left. \times \sum \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0! (h_0 - 1)!} 0^{2w_0} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} 2^{2w_1} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2! (h_2 - 1)!} 4^{2w_2} \dots \right].$$

66. Si  $r$  devient nul, le facteur  $\frac{1}{2^r}$  détruit un facteur zéro du numérateur. Pour n'avoir point à s'occuper de tous ces facteurs zéros, il suffit de rejeter tous les chemins binaires donnés par les suites de nombres contenant un zéro ailleurs qu'au point de départ; de supprimer le nombre  $w_0$  dans la décomposition de  $q - e - 2i$ , c'est-à-dire de décomposer seulement ce nombre en parties  $w_1, w_2, w_3, \dots$ ; de regarder enfin  $\frac{1}{2^r}$  comme égal à l'unité lorsque  $r$  devient nul. On obtient ainsi la formule plus simple

$$f_{q,r,i}^{(2p)} = \frac{1}{2^r} \sum \left[ 2^{h_1} 4^{h_2} \dots 1^{s_0+d_0} 3^{s_1+d_1} 5^{s_2+d_2} \dots \right. \\ \left. \times \sum \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} 2^{2w_1} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2! (h_2 - 1)!} 4^{2w_2} \dots \right].$$



67. En groupant maintenant ces chemins binaires délivrés des zéros comme on l'a fait précédemment (60), on obtient la formule suivante :

$$f_{q,r,i}^{(2p)} = \frac{1}{2^r} \sum \Omega \left[ 2^{h_1} 4^{h_2} \dots 1^{h_{s_1+d_1}} 3^{h_{s_1+d_1}} 5^{h_{s_1+d_1}} \dots \right. \\ \left. \times \sum \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} 2^{w_1} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2! (h_2 - 1)!} 4^{w_2} \dots \right].$$

### § III. — Chemins binaires.

68. Les formules qui donnent  $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$  et  $f_{q,r,i}^{(2p)}$  reposent l'une et l'autre sur la formation des chemins binaires de  $e + 2i + 1$  points, dont le premier correspond à l'indice  $r$  et le dernier à l'indice  $p$ . Il existe toutefois, entre les deux calculs, cette différence considérable qu'il faut, pour obtenir  $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ , prendre tous ces chemins, tandis que, pour obtenir  $f_{q,r,i}^{(2p)}$ , on doit négliger tous ceux d'entre eux qui présentent le nombre zéro ailleurs qu'au point de départ.

69. De même que pour les chemins ternaires (50), on abrège singulièrement la formation du tableau des chemins binaires en cherchant d'abord les deux chemins binaires limites, c'est-à-dire les deux chemins binaires de  $e + 2i + 1$  nombres qui partant de  $r$  arrivent à  $p$  en s'écartant le plus possible, l'un vers la droite, l'autre vers la gauche.

70. La substitution des chemins binaires aux chemins ternaires offre ce très-grand avantage que les chemins binaires nécessaires pour calculer soit  $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ , soit  $f_{q,r,i}^{(2p)}$  ne dépendent absolument pas de  $q$ ; par suite, ces chemins, une fois obtenus, nous donnent le moyen de calculer non pas seulement  $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$  et  $f_{q,r,i}^{(2p)}$ , mais encore tous les  $f^{(\pi)}$  qui ne diffèrent de ceux-ci que par la valeur de  $q$ .



## CHAPITRE VI.

FONCTION GÉNÉRATRICE DES  $f^{(*)}$ .§ I. — Puissances impaires de  $\varphi(x)$ .

71. Considérons le chemin binaire, ou plutôt le groupe des chemins binaires répondant à un système déterminé de valeurs des quantités  $h_0, h_1, h_2, \dots$ , et étudions l'expression correspondante

$$\sum \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0! (h_0 - 1)!} 1^{2w_0} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} 3^{2w_1} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2! (h_2 - 1)!} 5^{2w_2} \dots$$

On retrouvera évidemment cette même expression si l'on forme les suites

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0! (h_0 - 1)!} (1^2 z)^{w_0}, \\ \sum_0^\infty \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} (3^2 z)^{w_1}, \\ \sum_0^\infty \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2! (h_2 - 1)!} (5^2 z)^{w_2}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

qu'on les multiplie toutes entre elles, qu'on prenne dans le produit l'ensemble des termes en  $z^{q-e-2i}$  et qu'on remplace dans ces termes  $z$  par l'unité.

Or la suite

$$\sum_0^\infty \frac{(w_t + h_t - 1)!}{w_t! (h_t - 1)!} [(2t+1)^2 z]^{w_t}$$

est justement celle qu'on obtient en développant, suivant les puissances croissantes de  $z$ , la fraction rationnelle

$$\frac{1}{[1 - (2t+1)^2 z]^{h_t}};$$

donc nous obtiendrons notre expression complète en développant, suivant les puissances croissantes de  $z$ , la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1 - 1^2 z)^{h_1} (1 - 3^2 z)^{h_2} (1 - 5^2 z)^{h_3} (1 - 7^2 z)^{h_4} \dots},$$

en prenant, dans ce développement, le terme en  $z^{q-c-2t}$ , et remplaçant, dans ce terme,  $z$  par l'unité.

72. Il suit immédiatement de là que, si nous étendons le  $\sum$  ci-dessous à tous les groupes de chemins binaires servant au calcul de  $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ , il suffira, pour obtenir ce coefficient, de développer l'expression

$$\frac{1}{2r+1} \sum \Omega \frac{1^{h_1} 3^{h_2} 5^{h_3} \dots 2s_1+d_1, 4s_2+d_2, 6s_3+d_3, \dots}{(1 - 1^2 z)^{h_1} (1 - 3^2 z)^{h_2} (1 - 5^2 z)^{h_3} (1 - 7^2 z)^{h_4} \dots},$$

suivant les puissances croissantes de  $z$ ; de prendre dans ce développement le terme en  $z^{q-c-2t}$  et d'y remplacer  $z$  par l'unité.

73. Cette dernière expression peut s'écrire

$$\sum \frac{u}{(1 - 1^2 z)^{h_1} (1 - 3^2 z)^{h_2} (1 - 5^2 z)^{h_3} \dots},$$

$u$  étant un numérateur qui est relatif au groupe considéré de chemins binaires, qui dépend de  $r$ , de  $p$  et de  $i$ , mais nullement de  $q$  ni de  $z$ .

74. Désignons par  $H_t$  la plus grande valeur que puisse prendre  $h_t$  dans tous les chemins binaires servant au calcul de  $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ . Ce nombre  $H_t$  est parfaitement déterminé lorsque l'on donne  $r$ ,  $p$  et  $i$ . Si, en effet, on désigne par  $\overline{rp}$  le plus petit et par  $\overline{RP}$  le plus grand des deux nombres  $r$  et  $p$ , on obtient très-facilement les résultats suivants :

Si  $t$  est inférieur à  $\overline{rp} - i$ ,  $H_t$  est nul ;

Si  $t$  est égal ou supérieur à  $\overline{rp} - i$ , mais inférieur à  $\overline{rp}$ ,  $H_t$  est égal à  $i + 1 + t - \overline{rp}$  ;

Si  $t$  n'est ni inférieur à  $\overline{rp}$ , ni supérieur à  $\overline{RP}$ ,  $H_t$  est égal à  $i + 1$  ;

Si  $t$  est supérieur à  $\overline{RP}$ , mais non à  $\overline{RP} + i$ ,  $H_t$  est égal à  $i + 1 - t + \overline{RP}$  ;

Enfin, si  $t$  est supérieur à  $\overline{RP} + i$ ,  $H_t$  est nul.

75. Cela étant, on peut prendre, pour dénominateur commun de toutes les fractions comprises dans le  $\sum$  précédent (73), le produit

$$(1 - 1^2 z)^{H_0} (1 - 3^2 z)^{H_1} (1 - 5^2 z)^{H_2} \dots [1 - (2t + 1)^2 z]^{H_t} \dots$$

Il s'ensuit que la somme de toutes ces fractions peut s'écrire

$$\frac{U}{(1 - 1^2 z)^{H_0} (1 - 3^2 z)^{H_1} (1 - 5^2 z)^{H_2} \dots},$$

le dénominateur étant d'un degré  $\eta$  égal à

$$H_0 + H_1 + H_2 + \dots,$$

et le numérateur étant d'un degré inférieur à  $\eta$ .

Il s'ensuit aussi que cette dernière fraction est la fonction génératrice des coefficients

$$f_{s+2i, r, i}^{(2p+1)}, \quad f_{s+2i+1, r, i}^{(2p+1)}, \quad f_{s+2i+2, r, i}^{(2p+1)}, \quad \dots,$$

c'est-à-dire du coefficient général  $f_{q, r, i}^{(2p+1)}$  considéré comme fonction de  $q$ , les indices  $r$  et  $i$  étant supposés constants.

## § II. — Puissances paires de $\varphi(x)$ .

76. Considérons tous les chemins binaires répondant à un système déterminé de valeurs des quantités  $h_0, h_1, h_2, \dots$ . L'expression correspondante

$$\sum \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} 2^{w_1} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2! (h_2 - 1)!} 4^{w_2} \dots$$

n'est autre chose que le coefficient de  $z^{q-s-2t}$  dans le produit des suites

$$\begin{aligned} & \sum_{w_1=0}^{\infty} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} (2^2 z)^{w_1}, \\ & \sum_{w_2=0}^{\infty} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2! (h_2 - 1)!} (4^2 z)^{w_2}, \\ & \sum_{w_3=0}^{\infty} \frac{(w_3 + h_3 - 1)!}{w_3! (h_3 - 1)!} (6^2 z)^{w_3}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Mais ces suites sont justement les développements, suivant les puissances croissantes de  $z$ , des fractions rationnelles

$$\frac{1}{(1-2^2 z)^{h_1}}, \quad \frac{1}{(1-4^2 z)^{h_2}}, \quad \frac{1}{(1-6^2 z)^{h_3}}, \quad \dots$$

Donc l'expression considérée n'est autre chose que le coefficient de  $z^{q-e-2i}$  dans le développement, suivant les puissances croissantes de  $z$ , de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-2^2 z)^{h_1} (1-4^2 z)^{h_2} (1-6^2 z)^{h_3} \dots}$$

77. Il suit immédiatement de là que, si nous étendons le  $\sum$  ci-dessous à tous les groupes de chemins binaires servant au calcul de  $f_{q,r,i}^{(2p)}$ , il suffira, pour obtenir ce nombre, de prendre le coefficient de  $z^{q-e-2i}$  dans le développement, suivant les puissances croissantes de  $z$ , de la fraction

$$\frac{1}{2r} \sum \Omega \frac{2^{h_1} 4^{h_2} 6^{h_3} \dots 1^{e_1+d_1} 3^{e_2+d_2} 5^{e_3+d_3} \dots}{(1-2^2 z)^{h_1} (1-4^2 z)^{h_2} (1-6^2 z)^{h_3} \dots}$$

78. Cette dernière expression peut s'écrire

$$\sum \frac{u}{(1-2^2 z)^{h_1} (1-4^2 z)^{h_2} (1-6^2 z)^{h_3} \dots},$$

$u$  étant un numérateur qui est relatif au groupe considéré de chemins binaires, qui dépend de  $r$ , de  $p$  et de  $i$ , mais nullement de  $q$  ni de  $z$ .

79. Désignons par  $H_1, H_2, H_3, \dots$  les plus grandes valeurs que puissent prendre respectivement  $h_1, h_2, h_3, \dots$  dans le calcul de  $f_{q,r,i}^{(2p)}$ . Il est facile de voir que ces valeurs sont les mêmes que dans le cas (74) des puissances impaires.

80. Prenons pour dénominateur commun de toutes les fractions du  $\sum$  précédent (78) le produit

$$(1-2^2 z)^{H_1} (1-4^2 z)^{H_2} (1-6^2 z)^{H_3} \dots,$$

et faisons la somme de ces fractions. La fraction totale

$$\frac{U}{(1-2^2 z)^{H_1} (1-4^2 z)^{H_2} (1-6^2 z)^{H_3} \dots},$$

dont le numérateur est un polynôme en  $z$  d'un degré inférieur au degré du dénominateur, sera la fonction génératrice des coefficients

$$f_{s+2l, r, i}^{(2p)}, \quad f_{s+2l+1, r, i}^{(2p)}, \quad f_{s+2l+2, r, i}^{(2p)}, \quad \dots,$$

c'est-à-dire du coefficient général  $f_{q, r, i}^{(2p)}$  regardé comme une fonction de  $q$ , les indices  $r$  et  $i$  étant supposés constants.



## CHAPITRE VII.

### EXPRESSION ANALYTIQUE DES $f^{(n)}$ .



#### § I. — Puissances impaires de $\varphi(x)$ .

81. Comme nous l'avons vu (75), le coefficient  $f_{q, r, i}^{(2p+1)}$  admet pour fonction génératrice la fraction rationnelle

$$\frac{U}{(1-1^2 z)^{H_1} (1-3^2 z)^{H_2} (1-5^2 z)^{H_3} \dots},$$

dont le numérateur est un polynôme entier en  $z$  de degré inférieur au dénominateur.

Or, depuis les travaux de Moivre, on sait qu'une pareille fraction engendre une série récurrente proprement dite, dont la loi se résume dans l'équation qu'on obtient en égalant le dénominateur à zéro, après y avoir remplacé  $z$  par  $\frac{1}{z}$ .

Donc les coefficients considérés sont les termes d'une série récur-

rente proprement dite, dont la loi est résumée par l'équation

$$(z - 1^2)^{H_0} (z - 3^2)^{H_1} (z - 5^2)^{H_2} (z - 7^2)^{H_3} \dots = 0.$$

82. Si nous appelons  $\eta$  le degré de cette équation, c'est-à-dire la somme

$$H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + \dots,$$

nous pouvons dire que les coefficients considérés forment une série récurrente proprement dite, d'ordre  $\eta$ . En d'autres termes, chacun de ces coefficients est une fonction linéaire déterminée des  $\eta$  coefficients précédents.

83. Toutes les fois que l'équation qui résume la loi d'une série récurrente proprement dite est exactement résoluble, on peut, en appliquant les règles de Lagrange, obtenir l'expression analytique du terme général de la série. Ici cette équation, non-seulement est résoluble, mais se présente spontanément résolue : nous pouvons donc écrire immédiatement la formule suivante :

$$f_{q,r,t}^{(2p+1)} = \sum \xi_t(q) (2t+1)^q,$$

$\xi(q)$  étant un polynôme entier en  $q$  du degré  $H_t - 1$ , et la caractéristique  $\sum$  s'étendant à toutes les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $H_t$  n'est pas nul.

84. Cette expression de  $f_{q,r,t}^{(2p+1)}$  ne contient d'autres indéterminées que les coefficients numériques des polynômes  $\xi_t(q)$ . Ces coefficients, dans le polynôme  $\xi_t(q)$ , répondant à une valeur donnée de  $t$ , sont au nombre de  $H_t$ ; donc, dans toute l'expression, leur nombre est égal au degré  $\eta$ .

Pour les déterminer, on calculera directement, d'une manière quelconque, les  $\eta$  premiers des coefficients considérés, ou, plus généralement,  $\eta$  quelconques d'entre eux; on égalera les  $\eta$  valeurs trouvées aux  $\eta$  valeurs correspondantes fournies par la formule précédente; puis on résoudra le système des  $\eta$  équations du premier degré ainsi obtenu.

§ II. — Puissances paires de  $\varphi(x)$ .

85. La fonction génératrice du coefficient  $f_{q,r,i}^{(2p)}$  est (80) la fonction rationnelle

$$\frac{U}{(1-2^2z)^{H_1}(1-4^2z)^{H_2}(1-6^2z)^{H_3}\dots}.$$

On en déduit, en raisonnant comme dans ce qui précède, les résultats que voici :

Les coefficients  $f_{q,r,i}^{(2p)}$ , considérés comme fonctions de  $q$ , forment une série récurrente proprement dite.

La loi de cette série est résumée par l'équation

$$(z-2^2)^{H_1}(z-4^2)^{H_2}(z-6^2)^{H_3}\dots = 0.$$

Si l'on désigne par  $\eta$  la somme

$$H_1 + H_2 + H_3 + \dots,$$

cette série récurrente est de l'ordre  $\eta$ , de façon que chaque coefficient est une fonction linéaire déterminée des  $\eta$  coefficients précédents.

On peut poser

$$f_{q,r,i}^{(2p)} = \sum \xi_i(q) (2t)^q,$$

$\xi_i(q)$  étant un polynôme entier en  $q$ , de degré  $H_i - 1$ , et la caractéristique  $\sum$  s'étendant à toutes les valeurs de  $t$  supérieures à zéro pour lesquelles  $H_i$  n'est pas nul.

Enfin les  $\eta$  indéterminées que présente le second membre de cette dernière formule peuvent être calculées à l'aide du système de  $\eta$  équations du premier degré, qu'on obtient en égalant  $\eta$  valeurs des  $f^{(2p)}$  obtenues directement aux  $\eta$  valeurs correspondantes fournies par notre formule.





## DEUXIÈME PARTIE.

### PREMIERS DÉVELOPPEMENTS.

#### CHAPITRE I.

##### FORME DES DÉVELOPPEMENTS.

##### § I. — Développement de $\lambda^\pi(x)$ .

86. La fonction elliptique  $\lambda(x)$  s'annule quand  $x$  devient égal à zéro; et, pour cette même valeur de  $x$ , sa dérivée première  $\frac{d\lambda}{dx}$  se réduit à l'unité.

Il résulte de là, et de ce que nous avons dit (14) sur les dérivées de  $\lambda(x)$ , que, pour  $x$  égal à zéro, toutes les dérivées d'ordre pair de  $\lambda(x)$  s'annulent, tandis que les dérivées d'ordre impair ne s'annulent point.

Par suite,  $\lambda(x)$  est une fonction impaire de  $x$  et nous pouvons écrire

$$\lambda(x) = A_0^{(1)} \frac{x}{1!} - A_1^{(1)} \frac{x^3}{3!} + A_2^{(1)} \frac{x^5}{5!} - A_3^{(1)} \frac{x^7}{7!} + \dots$$

87. On voit ainsi que  $\lambda(x)$  est égal à  $x$  multiplié par une fonction paire de  $x$ . Il s'ensuit que  $\lambda^\pi(x)$  est le produit de  $x^\pi$  par une fonction paire de  $x$ , et, par suite, que l'on a

$$\lambda^\pi(x) = A_0^{(\pi)} \frac{x^\pi}{\pi!} - A_1^{(\pi)} \frac{x^{\pi+2}}{(\pi+2)!} + A_2^{(\pi)} \frac{x^{\pi+4}}{(\pi+4)!} - A_3^{(\pi)} \frac{x^{\pi+6}}{(\pi+6)!} + \dots$$

La fonction  $\lambda^\pi(x)$  est donc une fonction paire ou impaire de  $x$ , suivant que l'exposant  $\pi$  est lui-même pair ou impair.

##### § II. — Développement de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$ .

88. Les deux fonctions elliptiques  $\mu(x)$  et  $\nu(x)$  deviennent égales chacune à l'unité lorsque  $x$  devient égal à zéro; et, pour cette même valeur de  $x$ , les dérivées premières  $\frac{d\mu}{dx}$ ,  $\frac{d\nu}{dx}$  s'annulent l'une et l'autre.

Il suit de là, et de ce que nous avons dit (14) sur les dérivées des fonctions elliptiques, que toutes les dérivées d'ordre impair de  $\mu(x)$  et de  $\nu(x)$  s'annulent en même temps que  $x$ , tandis que les dérivées d'ordre pair ne s'annulent point. Les fonctions  $\mu(x)$  et  $\nu(x)$  sont donc toutes deux des fonctions paires de  $x$ ; nous pouvons donc écrire

$$\mu(x) = B_0^{(1)} - B_1^{(1)} \frac{x^2}{2!} + B_2^{(1)} \frac{x^4}{4!} - B_3^{(1)} \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\nu(x) = C_0^{(1)} - C_1^{(1)} \frac{x^2}{2!} + C_2^{(1)} \frac{x^4}{4!} - C_3^{(1)} \frac{x^6}{6!} + \dots$$

89. Les puissances  $\mu^\pi(x)$ ,  $\nu^\pi(x)$  sont aussi, par conséquent, des fonctions paires de  $x$ ; donc nous avons

$$\mu^\pi(x) = B_0^{(\pi)} - B_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + B_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - B_3^{(\pi)} \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\nu^\pi(x) = C_0^{(\pi)} - C_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + C_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - C_3^{(\pi)} \frac{x^6}{6!} + \dots$$



## CHAPITRE II.

### EMPLOI DES DÉRIVÉES D'ORDRE PAIR.

#### § I. — Développement de $\lambda^\pi(x)$ .

90. Le calcul du développement de  $\lambda^\pi(x)$  n'est autre chose que celui des coefficients  $A^{(\pi)}$ . L'emploi de nos dérivées d'ordre pair permet d'effectuer ce calcul, car, comme nous allons le montrer, les coefficients  $A^{(\pi)}$  s'expriment d'une manière extrêmement simple à l'aide des quantités  $L^{(\pi)}$ .

91. Considérons d'abord  $A_q^{(2p+1)}$ . Ce coefficient est égal à  $(-1)^q$  multiplié par le résultat de la substitution de zéro à  $x$  dans la dérivée d'ordre impair  $2(p+q)+1$  de la fonction  $\lambda^{2p+1}(x)$ . Or cette dérivée, pour cette valeur de  $x$ , devient justement égale au coefficient de la première

puissance de  $\lambda$  dans la dérivée immédiatement précédente, dont l'ordre est pair et égal à  $2(p+q)$ . Ce dernier coefficient est  $L_{p+q,0}^{(2p+1)}$ ; donc

$$A_q^{(2p+1)} = (-1)^q L_{p+q,0}^{(2p+1)}.$$

92. Considérons maintenant  $A_q^{(2p)}$ . Ce coefficient est égal à  $(-1)^q$  multiplié par le résultat de la substitution de zéro à  $x$  dans la dérivée d'ordre pair  $2(p+q)$  de la fonction  $\lambda^{2p}(x)$ . Ce résultat n'est autre que le premier terme de cette dérivée, ordonnée suivant les puissances croissantes de  $\lambda$ . Ce premier terme est  $L_{p+q,0}^{(2p)}$ . Donc

$$A_q^{(2p)} = (-1)^q L_{p+q,0}^{(2p)}.$$

## § II. — Développements de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$ .

93. Calculer les développements de  $\mu^\pi(x)$  et de  $\nu^\pi(x)$ , c'est calculer les coefficients  $B^{(\pi)}$  et  $C^{(\pi)}$ . L'emploi de nos dérivées d'ordre pair suffit pour effectuer ce calcul; car, comme nous allons le voir, ces coefficients  $B^{(\pi)}$ ,  $C^{(\pi)}$  s'expriment d'une manière très-simple à l'aide des quantités  $M^{(\pi)}$ ,  $N^{(\pi)}$ .

94. Les coefficients  $B_q^{(\pi)}$ ,  $C_q^{(\pi)}$  ne sont autre chose que les produits par  $(-1)^q$  des résultats de la substitution de zéro à  $x$  dans les dérivées d'ordre pair  $2q$  des fonctions  $\mu^\pi(x)$ ,  $\nu^\pi(x)$ . Or, pour cette valeur de  $x$ , les fonctions  $\mu$  et  $\nu$  se réduisent chacune à l'unité. Par suite, les dérivées considérées se réduisent l'une et l'autre à la somme de leurs coefficients, et nous avons

$$B_q^{(\pi)} = (-1)^q \sum_r M_{q,r}^{(\pi)},$$

$$C_q^{(\pi)} = (-1)^q \sum_r N_{q,r}^{(\pi)},$$

le signe  $\sum$ , dans chacune de ces formules, s'étendant à toutes les valeurs de  $r$  compatibles avec la valeur donnée de  $\pi$  et la valeur donnée de  $q$ .

## CHAPITRE III.

## CALCUL DES COEFFICIENTS DES DÉVELOPPEMENTS.

§ I. — Développement de  $\lambda^\pi(x)$ .

95. D'après ce qui précède, pour obtenir les coefficients  $A_1^{(\pi)}$ ,  $A_2^{(\pi)}$ ,  $A_3^{(\pi)}$ , ... du développement de  $\lambda^\pi(x)$ , il suffit d'opérer ainsi :

Former le tableau des  $F^{(\pi)}$  conformément aux règles données dans notre première Partie ;

Prendre les  $F_{q,0}^{(\pi)}$  qui en constituent la première colonne verticale à gauche ;

Remplacer, dans ces derniers termes, les quantités  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\zeta$  respectivement par 1,  $-(1+k^2)$ ,  $k^2$  ;

Enfin donner aux résultats obtenus le signe + ou le signe — alternativement.

96. Pour bien attribuer aux résultats les signes qui leur conviennent, il est bon de remarquer que le premier terme  $F_{q,0}^{(\pi)}$  qui ne s'annule point a toujours le signe +.

On peut voir d'ailleurs facilement qu'on n'a plus du tout à se préoccuper des signes des résultats, et qu'on obtient exactement et immédiatement les coefficients de  $\lambda^\pi(x)$ , si, remplaçant toujours dans les  $F_{q,0}^{(\pi)}$  les quantités  $\omega$  et  $\zeta$  par 1 et par  $k^2$ , on substitue à  $\varphi$ , non plus  $-(1+k^2)$ , mais simplement  $1+k^2$ .

§ II. — Développements de  $\mu^\pi(x)$  et de  $\nu^\pi(x)$ .

97. D'après ce qui précède, pour obtenir les coefficients  $B^{(\pi)}$ ,  $C^{(\pi)}$  des développements des fonctions  $\mu^\pi(x)$ ,  $\nu^\pi(x)$ , il suffit d'opérer ainsi :

Former le tableau des  $F^{(\pi)}$  d'après les règles données ;

Dans les termes de ce tableau, remplacer les quantités  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\zeta$  res-

pectivement par  $1 - k^2$ ,  $2k^2 - 1$ ,  $-k^2$ , ce qui donne le tableau des  $M^{(\pi)}$ ; puis par  $k^2 - 1$ ,  $2 - k^2$ ,  $-1$ , ce qui fournit celui des  $N^{(\pi)}$ ;

Enfin faire la somme des  $M^{(\pi)}$  et celle des  $N^{(\pi)}$  de chaque ligne horizontale, en ayant soin de multiplier par  $(-1)^q$  la somme des termes de la ligne d'indice  $q$ .

Ces sommes ainsi multipliées forment les unes la suite des  $B^{(\pi)}$ , les autres celle des  $C^{(\pi)}$ .

### § III. — Abréviations.

98. Nos moyens de calculer les quantités  $F^{(\pi)}$ ,  $L^{(\pi)}$ ,  $M^{(\pi)}$ ,  $N^{(\pi)}$  sont tout à fait analogues à ceux qu'on emploie pour former le triangle de Pascal. Vu la difficulté bien connue des présentes recherches, on peut regarder ces moyens comme simples. Voici quelques remarques permettant d'abrégier les calculs.

99. Si l'on veut calculer les développements des trois fonctions  $\lambda^\pi(x)$ ,  $\mu^\pi(x)$ ,  $\nu^\pi(x)$ , il suffit de former le seul tableau des  $F^{(\pi)}$ , puisque ce tableau fait connaître, par sa colonne verticale de gauche, les coefficients de  $\lambda^\pi(x)$ , et, par ses lignes horizontales, ceux de  $\mu^\pi(x)$  et de  $\nu^\pi(x)$ .

100. Si l'on ne demande que le développement de  $\lambda^\pi(x)$ , et qu'on s'arrête au terme  $F_{q,0}^{(\pi)}$ , on peut se dispenser, en formant le tableau des  $F^{(\pi)}$ , de calculer tous les  $F^{(\pi)}$  qui se trouveraient au-dessous de la droite indéfinie menée par les deux termes  $F_{q,0}^{(\pi)}$ ,  $F_{q-1,1}^{(\pi)}$ .

101. Si l'on ne cherche que les développements de  $\mu^\pi(x)$  et de  $\nu^\pi(x)$ , et que l'on ne veuille pas aller, dans le tableau des  $F^{(\pi)}$ , au delà de la ligne horizontale d'ordre  $q$ , il est inutile de calculer les différents termes de cette dernière ligne : on peut obtenir leur somme, d'une manière fort simple, à l'aide des termes de la ligne précédente.

Reprenons, en effet, les formules

$$\frac{d^{2q} \varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = \sum_r (2r+1) F_{q-1,r}^{(2p+1)} [(2r) \mathfrak{D}\varphi^{2r-1} + (2r+1) \mathfrak{V}\varphi^{2r+1} + (2r+2) \mathfrak{J}\varphi^{2r+3}],$$

$$\frac{d^{2q} \varphi^{2p}}{dx^{2q}} = \sum_r (2r) F_{q-1,r}^{(2p)} [(2r-1) \mathfrak{D}\varphi^{2r-2} + (2r) \mathfrak{V}\varphi^{2r} + (2r+1) \mathfrak{J}\varphi^{2r+2}],$$

que nous avons établies précédemment (24 et 29). Pour  $\varphi$  égal à l'unité, elles deviennent

$$\begin{aligned}\sum_r F_{q,r}^{(2p+1)} &= \sum_r (2r+1) F_{q-1,r}^{(2p+1)} [(2r) \mathfrak{O} + (2r+1) \mathfrak{V} + (2r+2) \mathfrak{G}], \\ \sum_r F_{q,r}^{(2p)} &= \sum_r (2r) F_{q-1,r}^{(2p)} [(2r-1) \mathfrak{O} + (2r) \mathfrak{V} + (2r+1) \mathfrak{G}].\end{aligned}$$

Or, dans les trois fonctions elliptiques  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$ ,  $\nu(x)$ , nous avons identiquement

$$\mathfrak{O} + \mathfrak{V} + \mathfrak{G} = 0;$$

par suite

$$(2r) \mathfrak{O} + (2r+1) \mathfrak{V} + (2r+2) \mathfrak{G} = \mathfrak{G} - \mathfrak{O},$$

et de même

$$(2r-1) \mathfrak{O} + (2r) \mathfrak{V} + (2r+1) \mathfrak{G} = \mathfrak{G} - \mathfrak{O};$$

donc nos dernières formules peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}\sum_r F_{q,r}^{(2p+1)} &= (\mathfrak{G} - \mathfrak{O}) \sum_r (2r+1) F_{q-1,r}^{(2p+1)}, \\ \sum_r F_{q,r}^{(2p)} &= (\mathfrak{G} - \mathfrak{O}) \sum_r (2r) F_{q-1,r}^{(2p)}.\end{aligned}$$

Comme la différence  $\mathfrak{G} - \mathfrak{O}$  est d'ailleurs égale à  $-1$  pour la fonction  $\mu(x)$  et à  $-k^2$  pour la fonction  $\nu(x)$ , on voit que la somme des  $F$  de la dernière ligne s'obtient très-facilement à l'aide des  $F$  de la ligne précédente.

## CHAPITRE IV.

### EXPRESSION DES COEFFICIENTS A L'AIDE DES CHEMINS TERNAIRES.

#### § I. — Coefficients de $\lambda^\pi(x)$ .

102. Supposons d'abord l'exposant  $\pi$  impair et égal à  $2p+1$ . Nous savons qu'on a (91)

$$A_q^{(2p+1)} = (-1)^q L_{p+q,0}^{(2p+1)},$$

et aussi (41), en étendant le signe  $\sum$  à tous les groupes de chemins ternaires montant de  $L_{p+q,0}^{(2p+1)}$  à  $L_{0,p}^{(2p+1)}$ ,

$$L_{p+q,0}^{(2p+1)} = \sum \Omega [1^{h_0+r}, 3^{h_1+r}, 5^{h_2+r}, \dots, 2s_1+d, 4s_2+d, 6s_3+d, \dots, (-1)^r (1+k^2)^r k^{2g}].$$

Or, des relations (37),

$$d + g = q - v,$$

$$d + r = g + p,$$

nous déduisons, dans le cas actuel,

$$v = q - 2g.$$

Donc, à l'intérieur du  $\sum$  précédent, on peut remplacer  $(-1)^v$  par  $(-1)^q$ ; et comme  $(-1)^q$  est le même pour tous les groupes de chemins considérés, on peut mettre ce facteur en dehors du signe  $\sum$ . Quand on passe de  $L$  à  $A$ , il faut multiplier par un nouveau facteur  $(-1)^q$ , qui, avec le précédent, donne  $(-1)^{2q}$ , c'est-à-dire  $+1$ ; donc on a

$$A_q^{(2p+1)} = \sum \Omega [1^{h_0+r}, 3^{h_1+r}, 5^{h_2+r}, \dots, 2s_1+d, 4s_2+d, 6s_3+d, \dots, (1+k^2)^r k^{2g}].$$

103. Supposons maintenant  $\pi$  égal au nombre pair  $2p$ . Nous avons (92)

$$A_q^{(2p)} = (-1)^q L_{p+q,0}^{(2p)},$$

et aussi (47)

$$L_{p+q,0}^{(2p)} = \sum \Omega [2^{h_1+r}, 4^{h_2+r}, \dots, 1s_0+d, 3s_1+d, 5s_2+d, \dots, (-1)^r (1+k^2)^r k^{2g}],$$

le signe  $\sum$  s'étendant à tous les groupes qu'on peut former avec les chemins ternaires montant de  $L_{p+q,0}^{(2p)}$  à  $L_{0,p}^{(2p)}$ , et ne contenant jamais le nombre zéro ailleurs qu'au point de départ.

Ici encore on a

$$v = q - 2g,$$

et l'on peut écrire

$$A_q^{(2p)} = \sum \Omega [2^{h_1+r_1} 4^{h_2+r_2} \dots 1^{s_0+d_0} 3^{s_1+d_1} 5^{s_2+d_2} \dots (1+k^2)^r k^{2s}].$$

§ II. — Coefficients de  $\mu^\pi(x)$  et de  $\nu^\pi(x)$ .

104. Supposons  $\pi$  égal au nombre impair  $2p+1$ . Nous avons (54),

$$B_q^{(2p+1)} = (-1)^q \sum_r M_{q,r}^{(2p+1)},$$

$$C_q^{(2p+1)} = (-1)^q \sum_r N_{q,r}^{(2p+1)}.$$

De plus, nous avons (41)

$$M_{q,r}^{(2p+1)} = \frac{1}{2^{r+1}} \sum \Omega [1^{h_0+r_0} 3^{h_1+r_1} 5^{h_2+r_2} \dots 2^{s_1+d_1} 4^{s_2+d_2} 6^{s_3+d_3} \dots (2h^2-1)^r (-1)^s h^{2s} (1-h^2)^d],$$

$$N_{q,r}^{(2p+1)} = \frac{1}{2^{r+1}} \sum \Omega [1^{h_0+r_0} 3^{h_1+r_1} 5^{h_2+r_2} \dots 2^{s_1+d_1} 4^{s_2+d_2} 6^{s_3+d_3} \dots (2-h^2)^r (-1)^s (h^2-1)^d].$$

Donc

$$B_q^{(2p+1)} = (-1)^q \sum \left\{ \frac{1}{2^{r+1}} \sum \Omega [1^{h_0+r_0} 3^{h_1+r_1} 5^{h_2+r_2} \dots 2^{s_1+d_1} 4^{s_2+d_2} 6^{s_3+d_3} \dots (2h^2-1)^r (-1)^s h^{2s} (1-h^2)^d] \right\}$$

$$C_q^{(2p+1)} = (-1)^q \sum \left\{ \frac{1}{2^{r+1}} \sum \Omega [1^{h_0+r_0} 3^{h_1+r_1} 5^{h_2+r_2} \dots 2^{s_1+d_1} 4^{s_2+d_2} 6^{s_3+d_3} \dots (2-h^2)^r (-1)^s (h^2-1)^d] \right\}.$$

105. Lorsque  $\pi$  est égal au nombre pair  $2p$ , nous avons de même

$$B_q^{(2p)} = (-1)^q \sum \left\{ \frac{1}{2^r} \sum \Omega [2^{h_1+r_1} 4^{h_2+r_2} 6^{h_3+r_3} \dots 1^{s_0+d_0} 3^{s_1+d_1} 5^{s_2+d_2} \dots (2h^2-1)^r (-1)^s h^{2s} (1-h^2)^d] \right\}$$

$$C_q^{(2p)} = (-1)^q \sum \left\{ \frac{1}{2^r} \sum \Omega [2^{h_1+r_1} 4^{h_2+r_2} 6^{h_3+r_3} \dots 1^{s_0+d_0} 3^{s_1+d_1} 6^{s_2+d_2} \dots (2-h^2)^r (-1)^s (h^2-1)^d] \right\}.$$





## CHAPITRE V.

## EXPRESSION DES COEFFICIENTS A L'AIDE DES CHEMINS BINAIRES.

 § I. — Coefficients de  $\lambda^x(x)$ .

106. Considérons d'abord le cas où  $\pi$  est égal au nombre impair  $2p + 1$ . Il suit immédiatement de ce qui précède que nous pouvons poser

$$A_q^{(2p+1)} = a_{q,0}^{(2p+1)} (1 + h^2)^q + a_{q,1}^{(2p+1)} (1 + h^2)^{q-2} h^2 + \dots + a_{q,i}^{(2p+1)} (1 + h^2)^{q-2i} h^{2i} + \dots,$$

et qu'alors

$$a_{q,i}^{(2p+1)} = (-1)^i l_{p+q,i}^{(2p+1)}.$$

Tout revient à calculer  $a_{q,i}^{(2p+1)}$  ou bien  $l_{p+q,i}^{(2p+1)}$ . Cette dernière expression se déduisant immédiatement de celle de  $f_{p+q,i}^{(2p+1)}$ , nous trouvons (60)

$$a_{q,i}^{(2p+1)} = \sum \Omega \left[ 1^{h_0} 3^{h_1} 5^{h_2} \dots 2s_{i+d_1} 4^{s_{i+d_1}} 6^{s_{i+d_2}} \dots \right. \\ \left. \times \sum \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0! (h_0 - 1)!} 1^{2w_0} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} 3^{2w_1} \dots \right].$$

107. Dans le cas où  $\pi$  est égal au nombre pair  $2p$ , nous pouvons poser de même

$$A_q^{(2p)} = a_{q,0}^{(2p)} (1 + h^2)^q + a_{q,1}^{(2p)} (1 + h^2)^{q-2} h^2 + \dots + a_{q,i}^{(2p)} (1 + h^2)^{q-2i} h^{2i} + \dots,$$

et nous trouvons (67)

$$a_{q,i}^{(2p)} = \sum \Omega \left[ 2^{h_1} 4^{h_2} 6^{h_3} \dots 1s_{i+d_0} 3s_{i+d_1} 5s_{i+d_2} \dots \right. \\ \left. \times \sum \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} 2^{2w_1} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2! (h_2 - 1)!} 4^{2w_2} \dots \right].$$

§ II. — Coefficients de  $\mu^{\pi}(x)$  et de  $\nu^{\pi}(x)$ .

108. Supposons  $\pi$  impair et égal à  $2p + 1$ . Alors nous avons

$$\begin{aligned} M_{q,r}^{(2p+1)} = (-1)^c k^{2c} (1 - k^2)^p & \left[ m_{q,r,0}^{(2p+1)} (2k^2 - 1)^{q-c} - m_{q,r,1}^{(2p+1)} (2k^2 - 1)^{q-c-2} k^2 (1 - k^2) + \dots \right. \\ & \left. + (-1)^i m_{q,r,i}^{(2p+1)} (2k^2 - 1)^{q-c-2i} k^{2i} (1 - k^2)^i + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{q,r}^{(2p+1)} = (-1)^c (k^2 - 1)^p & \left[ n_{q,r,0}^{(2p+1)} (2 - k^2)^{q-c} - n_{q,r,1}^{(2p+1)} (2 - k^2)^{q-c-2} (k^2 - 1) + \dots \right. \\ & \left. + (-1)^i n_{q,r,i}^{(2p+1)} (2 - k^2)^{q-c-2i} (k^2 - 1)^i + \dots \right]. \end{aligned}$$

Dans la première formule, remplaçons  $1 - k^2$  par  $k^2 - 1$ , et, dans la seconde,  $k^2 - 1$  par  $1 - k^2$ . Il n'y aura plus en évidence, entre les crochets, que le seul signe  $+$ , et en dehors le facteur  $(-1)^c$  sera remplacé par  $(-1)^{c+p}$ , c'est-à-dire par  $(-1)^c$ .

Remplaçons de même, dans la première formule,  $2k^2 - 1$  par  $1 - 2k^2$ , et, dans la seconde,  $2 - k^2$  par  $k^2 - 2$ . Nous introduisons ainsi partout le facteur  $(-1)^{q-c}$  qui, multiplié par  $(-1)^c$ , donne  $(-1)^q$ .

Enfin, en passant de M et N à B et C, nous devons multiplier encore par  $(-1)^q$ , de telle sorte que chaque expression, prise dans son entier, sera multipliée par  $(-1)^{2q}$ , c'est-à-dire par  $+1$ .

Nous aurons donc, en désignant par  $b_{q,r,i}^{(2p+1)}$  et  $c_{q,r,i}^{(2p+1)}$  les coefficients respectifs de  $(1 - 2k^2)^{q-c-2i} k^{2c+2i} (k^2 - 1)^{p+i}$  et de  $(k^2 - 2)^{q-c-2i} (1 - k^2)^{p+i}$  dans les développements de  $B_q^{(2p+1)}$  et  $C_q^{(2p+1)}$ ,

$$b_{q,r,i}^{(2p+1)} = m_{q,r,i}^{(2p+1)},$$

$$c_{q,r,i}^{(2p+1)} = n_{q,r,i}^{(2p+1)},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} b_{q,r,i}^{(2p+1)} = c_{q,r,i}^{(2p+1)} = \frac{1}{2^{r-1}} \sum \Omega & \left[ 1^{h_0} 3^{h_1} 5^{h_2} \dots 2^{e_1+d_1} 4^{e_2+d_2} 6^{e_3+d_3} \dots \right. \\ & \left. \times \sum \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0! (h_0 - 1)!} 1^{2w_0} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1! (h_1 - 1)!} 3^{2w_1} \dots \right]. \end{aligned}$$

109. Nous trouvons de même, pour  $\pi$  égal au nombre pair  $2p$ ,

$$b_{q,r,i}^{(2p)} = c_{q,r,i}^{(2p)} = \frac{1}{2^r} \sum \Omega \left[ 2^4, 4^4, 6^4, \dots, 1^4, 3^4, 5^4, \dots \sum \frac{(v_1 + h_1 - 1)!}{(v_1! (h_1 - 1)!)} 2^{2v_1} \frac{(v_2 + h_2 - 1)!}{(v_2! (h_2 - 1)!)} 4^{2v_2} \dots \right].$$

110. Cette égalité des deux coefficients  $b_{q,r,i}^{(\pi)}$ ,  $c_{q,r,i}^{(\pi)}$  montre que les développements de  $\mu^\pi(x)$  et  $\nu^\pi(x)$  se déduisent l'un de l'autre avec la plus grande facilité.

## CHAPITRE VI.

FONCTIONS GÉNÉRATRICES DES COEFFICIENTS  $a^{(\pi)}$ ,  $b^{(\pi)}$ ,  $c^{(\pi)}$ .

### § I. — Coefficients de $\lambda^\pi(x)$ .

111. Il suit de ce qui précède que les suites formées par les coefficients  $a_{q,i}^{(2p+1)}$  et  $a_{q,i}^{(2p)}$ , lorsque  $q$  prend des valeurs entières consécutives, tandis que  $p$  et  $i$  restent constants, ont pour fonctions génératrices respectives

$$\frac{U^{(2p+1)}}{(1 - 1^2 z)^{H_0} (1 - 3^2 z)^{H_1} (1 - 5^2 z)^{H_2} \dots},$$

$$\frac{U^{(2p)}}{(1 - 2^2 z)^{H_1} (1 - 4^2 z)^{H_2} (1 - 6^2 z)^{H_3} \dots},$$

les numérateurs de ces deux fractions étant, par rapport à  $z$ , de degrés inférieurs aux degrés respectifs des dénominateurs.

112. Ici  $\overline{rp}$  est égal à zéro et  $\overline{RP}$  à  $p$  : donc nous avons

$$H_0 = H_1 = H_2 = \dots = H_p = i + 1,$$

$$H_{p+1} = i,$$

$$H_{p+2} = i - 1,$$

$$\dots \dots \dots H_{p+i} = 1;$$

donc nos deux fonctions génératrices peuvent s'écrire

$$\frac{\prod_{t=0}^p [1 - (2t+1)^2 z]^{i+1} \times \prod_{t=p+1}^{p+i} [1 - (2t+1)^2 z]^{p+i+1-t}}{U^{(2p+1)}},$$

$$\cdot \frac{\prod_{t=1}^p [1 - (2t)^2 z]^{i+1} \times \prod_{t=p+1}^{p+i} [1 - (2t)^2 z]^{p+i+1-t}}{U^{(2p)}}.$$

§ II. — Coefficients de  $\mu^x(x)$  et de  $\nu^x(x)$ .

113. Les coefficients égaux  $b_{q,r,i}^{(2p+1)}$ ,  $c_{q,r,i}^{(2p+1)}$  d'une part, les coefficients égaux  $b_{q,r,i}^{(2p)}$ ,  $c_{q,r,i}^{(2p)}$  de l'autre, où  $q$  prend des valeurs entières consécutives, tandis que  $p$ ,  $r$  et  $i$  restent constants, ont pour fonctions génératrices, les premiers, la fraction

$$\frac{U^{(2p+1)}}{(1-z^2)^{H_0}(1-3^2z)^{H_1}(1-5^2z)^{H_2}\dots},$$

les seconds, la fraction

$$\frac{U^{(2p)}}{(1-2^2z)^{H_1}(1-4^2z)^{H_2}(1-6^2z)^{H_3}\dots}.$$

114. Dans ces deux fractions, les exposants consécutifs de chaque dénominateur forment une suite d'entiers consécutifs croissant jusqu'à  $i$  inclusivement, lesquels sont suivis d'entiers tous égaux à  $i+1$ , lesquels sont suivis enfin d'entiers consécutifs décroissants, dont le premier est égal à  $i$  et le dernier à l'unité. Le premier de tous ces exposants est égal à l'unité si  $\overline{rp}$  est supérieur ou au moins égal à  $i$ ; il est égal à  $i+1-\overline{rp}$  si l'indice  $i$  est supérieur à  $\overline{rp}$ . En d'autres termes, la première valeur qu'il faille donner à  $t$  est celle du premier entier, nul ou positif, qui rend  $i+1+t-\overline{rp}$  supérieur à zéro, dans le cas où  $\pi$  est impair, et, dans le cas où  $\pi$  est pair, celle du plus petit entier supérieur à zéro, qui rend supérieure à zéro la même quantité  $i+1+t-\overline{rp}$ .

Appelons  $\tau$  cette première valeur de  $t$  (qui peut n'être pas la même dans les deux expressions); les fractions précédentes pourront s'écrire

$$\frac{U(2p+1)}{\prod_{i=0}^{\overline{rp}-1} [1 - (2t+1)^2 z]^{i+1-t-\overline{rp}} \times \prod_{i=0}^{\overline{rp}} [1 - (2t+1)^2 z]^{i+1} \times \prod_{i=0}^{\overline{rp}+1} [1 - (2t+1)^2 z]^{i+1-t+\overline{rp}}},$$

$$\frac{U(2p)}{\prod_{i=0}^{\overline{rp}-1} [1 - (2t)^2 z]^{i+1-t-\overline{rp}} \times \prod_{i=0}^{\overline{rp}} [1 - (2t)^2 z]^{i+1} \times \prod_{i=0}^{\overline{rp}+1} [1 - (2t)^2 z]^{i+1-t+\overline{rp}}}.$$

115. Il va sans dire que, si  $\overline{rp}$  était nul, la plus petite valeur de  $t$ , suivant que  $\pi$  serait impair ou pair, devrait être zéro ou l'unité.

## CHAPITRE VII.

### EXPRESSION ANALYTIQUE DES COEFFICIENTS $a$ , $b$ , $c$ .

#### § I. — Coefficients de $\lambda^\pi(x)$ .

116. Nous avons trouvé, dans le Chapitre précédent, la fonction génératrice des coefficients  $a_{q,i}^{(\pi)}$ . En nous reportant au Chapitre VII de la première Partie, nous voyons immédiatement que les coefficients  $a_{0,i}^{(\pi)}$ ,  $a_{1,i}^{(\pi)}$ ,  $a_{2,i}^{(\pi)}$ , ... forment une série récurrente proprement dite, dont la loi est résumée, suivant que  $\pi$  est impair ou pair, par la première ou la seconde des équations suivantes :

$$\prod_{i=0}^p [z - (2t+1)^2]^{i+1} \times \prod_{i=p+1}^{p+1} [z - (2t+1)^2]^{p+i+1-t} = 0,$$

$$\prod_{i=1}^p [z - (2t)^2]^{i+1} \times \prod_{i=p+1}^{p+1} [z - (2t)^2]^{p+i+1-t} = 0.$$

117. Pour la première de ces équations, le degré est

$$(i + 1)(p + 1) + \frac{1}{2}i(i + 1);$$

pour la seconde, il est

$$(i + 1)p + \frac{1}{2}i(i + 1).$$

Tels sont aussi les ordres des deux séries récurrentes, formées par les coefficients  $\alpha^{(2p+1)}$  et  $\alpha^{(2p)}$ .

118. D'après le Chapitre VII de la première Partie, nous pouvons écrire les deux formules suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_{q,i}^{(2p+1)} &= \sum_{t=0}^p \Xi_t(q) (2t+1)^i + \sum_{t=p+1}^{p+i} \xi_t(q) (2t+1)^i, \\ \alpha_{q,i}^{(2p)} &= \sum_{t=1}^p \Xi_t(q) (2t)^i + \sum_{t=p+1}^{p+i} \xi_t(q) (2t)^i, \end{aligned}$$

dans lesquelles  $\Xi_t(q)$  est un polynôme entier en  $q$ , toujours du degré  $i$  et  $\xi_t(q)$  un polynôme entier en  $q$  du degré  $p + i - t$ .

119. Chacune des formules précédentes contient des indéterminées en nombre égal à l'ordre de la série récurrente dont elle exprime le terme général. On déterminera ces indéterminées par le moyen indiqué déjà (84 et 85).

120. L'équation (116), qui définit la première de nos deux séries récurrentes, admet  $i + 1$  fois l'unité pour racine; si nous supprimons à son premier membre le facteur  $(z - 1)^{i+1}$ , le degré de cette équation, comme l'ordre de la série récurrente qui lui correspond, diminue de  $i + 1$  unités. On peut voir facilement que la nouvelle série récurrente obtenue est formée par les différences d'ordre  $i + 1$  des coefficients  $\alpha_{0,i}^{(2p+1)}, \alpha_{1,i}^{(2p+1)}, \alpha_{2,i}^{(2p+1)}, \dots$ . On en pourrait déduire immédiatement l'expression générale de ces différences.

§ II. — Coefficients de  $\mu^\pi(x)$  et de  $\nu^\pi(x)$ .

121. Les fonctions génératrices des coefficients  $b_{q,r,i}^{(\pi p+1)}$ ,  $c_{q,r,i}^{(\pi p+1)}$ ,  $b_{q,r,i}^{(\pi p)}$ ,  $c_{q,r,i}^{(\pi p)}$ , dans lesquels  $q$  seul varie, nous font voir que ces coefficients forment une série récurrente proprement dite, dont la loi est représentée, lorsque  $\pi$  est impair, par l'équation

$$\prod_{\tau}^{\overline{rp}-1} [z - (2t+1)^2]^{i+1+t-\overline{rp}} \times \prod_{\tau}^{\overline{rp}} [z - (2t+1)^2]^{i+1} \times \prod_{\tau}^{\overline{rp}+i} [z - (2t+1)^2]^{i+1-t+\overline{rp}} = 0,$$

et, lorsque  $\pi$  est pair, par l'équation

$$\prod_{\tau}^{\overline{rp}-1} [z - (2t)^2]^{i+1+t-\overline{rp}} \times \prod_{\tau}^{\overline{rp}} [z - (2t)^2]^{i+1} \times \prod_{\tau}^{\overline{rp}+i} [z - (2t)^2]^{i+1-t+\overline{rp}} = 0,$$

$\tau$  ayant la signification indiquée précédemment (114) et n'étant pas forcément le même dans les deux équations.

122. Chacune de ces équations a un nombre de racines égal à

$$\frac{1}{2}(2i+1+\tau-\overline{rp})(\overline{rp}-\tau) + (i+1)(\overline{rp}-\overline{rp}+1) + \frac{1}{2}i(i+1).$$

Tel est aussi l'ordre de la série récurrente.

123. Nous pouvons donc poser, en général,

$$b_{q,r,i}^{(\pi p+1)} = c_{q,r,i}^{(\pi p+1)} = \sum_{\tau}^{\overline{rp}-1} \chi_{\tau}(q)(2t+1)^{2q} + \sum_{\tau}^{\overline{rp}} \Xi_{\tau}(q)(2t+1)^{2q} + \sum_{\tau}^{\overline{rp}+i} \xi_{\tau}(q)(2t+1)^{2q},$$

$$b_{q,r,i}^{(\pi p)} = c_{q,r,i}^{(\pi p)} = \sum_{\tau}^{\overline{rp}-1} \chi_{\tau}(q)(2t)^{2q} + \sum_{\tau}^{\overline{rp}} \Xi_{\tau}(q)(2t)^{2q} + \sum_{\tau}^{\overline{rp}+i} \xi_{\tau}(q)(2t)^{2q},$$

et, dans ces formules,  $\chi_{\tau}(q)$ ,  $\Xi_{\tau}(q)$ ,  $\xi_{\tau}(q)$  représentent des polynômes entiers en  $q$ , dont les degrés sont respectivement

$$i+t-\overline{rp}, \quad i, \quad i-t+\overline{rp}.$$

124. Chacune de ces deux dernières formules présente un nombre d'indéterminées égal à l'ordre de la série récurrente qui lui correspond. On calculera ces indéterminées par le procédé habituel.

125. Dans tout ce que nous venons de dire sur les coefficients de  $\mu^\pi(x)$  et de  $\nu^\pi(x)$ , nous avons supposé  $\overline{rp}$  supérieur à zéro. Si  $\overline{rp}$  était nul, le premier  $\prod$  des équations et le premier  $\sum$  des formules générales disparaîtraient. La première de toutes les valeurs de  $t$  serait zéro si  $\pi$  était impair, l'unité si  $\pi$  était pair.

## TROISIÈME PARTIE.

### DÉVELOPPEMENTS DÉFINITIFS.

#### CHAPITRE I.

##### DÉVELOPPEMENT DE $\lambda^\pi(x)$ .

##### § I. — Forme de $A_q^{(\pi)}$ .

126. Quelle que soit la valeur paire ou impaire de l'exposant  $\pi$ , nous avons (106 et 107)

$$A_q^{(\pi)} = a_{q,0}^{(\pi)} (1 + h^2)^q + a_{q,1}^{(\pi)} (1 + h^2)^{q-2} h^2 + \dots + a_{q,i}^{(\pi)} (1 + h^2)^{q-2i} h^{2i} + \dots$$

Il résulte évidemment de cette formule que  $A_q^{(\pi)}$  est un polynôme entier en  $h^2$ , et, par suite, que nous pouvons poser

$$A_q^{(\pi)} = \alpha_{q,0}^{(\pi)} + \alpha_{q,1}^{(\pi)} h^2 + \alpha_{q,2}^{(\pi)} h^4 + \dots + \alpha_{q,i}^{(\pi)} h^{2i} + \dots$$



127. Nous nous proposons de calculer  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$  en fonction de  $q$ , l'indice  $i$  étant supposé constant.

## § II. — Forme de $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ .

128. En comparant le développement de  $A_q^{(\pi)}$  en fonction des quantités  $\alpha^{(\pi)}$  au développement de la même expression en fonction des quantités  $a^{(\pi)}$ , nous trouvons

$$\alpha_{q,i}^{(\pi)} = a_{q,i}^{(\pi)} + Y_{q-2i+2}^1 a_{q,i-1}^{(\pi)} + Y_{q-2i+4}^2 a_{q,i-2}^{(\pi)} + Y_{q-2i+6}^3 a_{q,i-3}^{(\pi)} + \dots,$$

les symboles  $Y_{q-2i+2}^1$ ,  $Y_{q-2i+4}^2$ ,  $Y_{q-2i+6}^3$ , ... représentant respectivement les nombres de combinaisons simples de  $q - 2i + 2$ ,  $q - 2i + 4$ ,  $q - 2i + 6$ , ... objets, pris 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ....

129. Cette formule nous permet d'établir que  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$  est absolument de la même forme que  $a_{q,i}^{(\pi)}$ , c'est-à-dire est la somme algébrique des puissances  $q^{ièmes}$  des nombres

$$1^2, 3^2, 5^2, \dots, (2p + 2i + 1)^2,$$

ou des nombres

$$2^2, 4^2, 6^2, \dots, (2p + 2i)^2,$$

suivant que  $\pi$  est pair ou impair, multipliées respectivement par des polynômes entiers en  $q$ , dont nous avons indiqué les degrés.

D'abord il est visible que  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$  contiendra les puissances  $q^{ièmes}$  de ces mêmes nombres et celles de ces nombres seulement. Reste à voir si les degrés des polynômes en  $q$  correspondants sont dans  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$  les mêmes que dans  $a_{q,i}^{(\pi)}$ .

Il en est ainsi dans le premier terme du développement de  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ , puisque ce premier terme est justement  $a_{q,i}^{(\pi)}$ .

Dans le second terme, les polynômes fournis par  $a_{q,i}^{(\pi)}$  ont tous leurs

degrés moindres d'une unité. Mais ils sont tous multipliés par  $Y'_{q-2i+2}$ , qui est du premier degré en  $q$ . Donc, dans ce second terme, les polynômes en  $q$  ont mêmes degrés que dans le premier.

Il en est encore de même des polynômes du troisième terme, puisque ceux-ci résultent des polynômes fournis par  $a_{q,i-2}^{(\pi)}$ , dont les degrés sont moindres de deux unités, multipliés tous par  $Y'_{q-2i+4}$ , c'est-à-dire par un polynôme du second degré en  $q$ .

Et ainsi de suite.

130. En résumé, le coefficient  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$  se présente exactement sous la même forme que le coefficient  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ .

## CHAPITRE II.

### DÉVELOPPEMENT DE $\mu^\pi(x)$ .

#### § I. — Forme de $B_q^{(\pi)}$ .

131. Des formules (94), jointes aux formules (108) et à la définition de  $b_{q,r,i}^{(\pi)}$ , nous déduisons l'expression suivante :

$$B_q^{(\pi)} = \sum_{\circ}^{p+q} k^{2c}(k^2-1)^c \left[ b_{q,r,0}^{(\pi)} (1-2k^2)^{q-c} + b_{q,r,1}^{(\pi)} (1-2k^2)^{q-c-2} k^2 (k^2-1) + b_{q,r,2}^{(\pi)} (1-2k^2)^{q-c-4} k^4 (k^2-1)^2 + \dots \right]$$

132. Il est évident ainsi que  $B_q^{(\pi)}$  est un polynôme entier en  $k^2$ . Nous pouvons donc poser

$$B_q^{(\pi)} = \beta_{q,0}^{(\pi)} + \beta_{q,1}^{(\pi)} k^2 + \beta_{q,2}^{(\pi)} k^4 + \dots + \beta_{q,i}^{(\pi)} k^{2i} + \dots$$

133. Nous nous proposons de déterminer l'expression analytique de  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$  en fonction de la variable  $q$ , l'indice  $i$  étant supposé constant.

§ II. — Forme de  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ .

134. Pour obtenir cette expression de  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ , nous allons chercher le coefficient de  $k^{2i}$  correspondant, dans le  $\sum$  précédent (131), à chaque valeur de  $r$ ; puis nous ajouterons tous ces coefficients.

Il suffira évidemment de considérer les valeurs de  $r$  depuis  $r=0$  jusqu'à  $r=p+i$ , car les valeurs supérieures à celle-ci ne donneraient aucun terme en  $k^{2i}$ . Cette remarque permet d'abrégier le calcul de  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ . En effet, elle remplace la limite  $p+q$  par la limite  $p+i$ , et  $i$ , qui ne peut dépasser  $q$ , lui est en général inférieur.

135. Supposons d'abord  $r$  supérieur à  $p$ . Nous avons à trouver le coefficient de  $k^{2i}$  dans le développement

$$2(r-p) \left[ b_{q,r,0}^{(\pi)} (1-2k^2)^{r-0} + b_{q,r,1}^{(\pi)} (1-2k^2)^{r-1} k^2 (k^2-1) + b_{q,r,2}^{(\pi)} (1-2k^2)^{r-2} k^4 (k^2-1)^2 + \dots \right].$$

Il est visible que ce coefficient est égal à  $b_{q,r,p+i-r}^{(\pi)}$ ; plus  $b_{q,r,p+i-r-1}^{(\pi)}$ , multiplié par un polynôme du premier degré en  $q$ ; plus  $b_{q,r,p+i-r-2}^{(\pi)}$ , multiplié par un polynôme du second degré en  $q$ , et ainsi de suite.

En raisonnant comme nous l'avons fait plus haut (129), nous voyons que le coefficient ainsi formé est exactement de la même forme que son premier terme, c'est-à-dire que  $b_{q,r,p+i-r}^{(\pi)}$ .

136. Supposons, en second lieu,  $r$  égal à  $p$ . Il s'agit pour nous de calculer le coefficient de  $k^{2i}$  dans le développement, ordonné suivant les puissances de  $k$ , de l'expression

$$b_{q,p,0}^{(\pi)} (1-2k^2)^q + b_{q,p,1}^{(\pi)} (1-2k^2)^{q-1} k^2 (k^2-1) + b_{q,p,2}^{(\pi)} (1-2k^2)^{q-2} k^4 (k^2-1)^2 + \dots$$

Ce coefficient est évidemment égal au nombre  $b_{q,p,i}^{(\pi)}$ ; plus le nombre  $b_{q,p,i-1}^{(\pi)}$ , multiplié par un polynôme du premier degré en  $q$ ; plus le

nombre  $b_{q,p,i-2}^{(\pi)}$ , multiplié par un polynôme du second degré en  $q$ , et ainsi de suite.

Et l'on verrait facilement encore que le résultat final est exactement de la même forme que  $b_{q,p,i}^{(\pi)}$ .

137. Supposons enfin  $r$  inférieur à  $p$ . Il nous faut chercher le coefficient de  $k^{2i}$  dans l'expression

$$(k^2 - 1)^{p-r} [b_{q,r,0}^{(\pi)} (1 - 2k^2)^{q-r} + b_{q,r,1}^{(\pi)} (1 - 2k^2)^{q-r-2} k^2 (k^2 - 1) + b_{q,r,2}^{(\pi)} (1 - 2k^2)^{q-r-4} k^4 (k^2 - 1)^2 + \dots]$$

Ce coefficient est évidemment égal au nombre  $b_{q,r,i}^{(\pi)}$ ; plus le nombre  $b_{q,r,i-1}^{(\pi)}$ , multiplié par un polynôme du premier degré en  $q$ ; plus le nombre  $b_{q,r,i-2}^{(\pi)}$ , multiplié par un polynôme du second degré en  $q$ , et ainsi de suite.

Et l'on prouverait encore que ce coefficient est exactement de la même forme que  $b_{q,r,i}^{(\pi)}$ .

138. Il suit de tout cela que  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$  est de la même forme que l'expression

$$\sum_{r=0}^p b_{q,r,i}^{(\pi)} + \sum_{r=p+1}^{p+i} b_{q,r,p+i-r}^{(\pi)},$$

abstraction faite des simplifications qui se pourraient présenter dans cette dernière expression.

139. Dans cette somme (138), remplaçons chaque  $b^{(\pi)}$  par son expression analytique. Nous obtenons évidemment  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$  sous la forme d'un polynôme dont chaque terme contient la puissance  $q^{\text{ième}}$  du carré d'un nombre entier, multipliée par un polynôme en  $q$ .

Pour déterminer la forme finale de  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ , nous avons donc à résoudre ces deux questions : d'abord déterminer les nombres entiers dont les carrés y sont élevés à la puissance  $q^{\text{ième}}$ ; ensuite déterminer le degré du polynôme entier en  $q$ , qui multiplie chacun de ces carrés.

140. Les nombres entiers dont les carrés sont élevés à la puissance  $q^{\text{ième}}$  ont la forme  $2t + 1$  ou  $2t$ , suivant que  $\pi$  est impair ou pair.

Dans  $b_{q,r,j}^{(\pi)}$ ,  $j$  étant quelconque, la plus grande valeur (121) de  $t$  est, dans tous les cas,  $\overline{RP} + j$ ; la plus petite est  $\tau$ , cette limite  $\tau$  étant définie comme précédemment (114). De là ces conséquences :

La plus haute valeur de  $t$ , dans tous les  $b^{(\pi)}$  de la formule précédente (138), est égale à  $p + i$ ; et chacun de ces  $b^{(\pi)}$  donne un terme présentant cette valeur maxima de  $t$ ;

Celui des coefficients  $b^{(\pi)}$  qui donne la plus petite valeur de  $t$  est le coefficient  $b_{q,s,i}^{(\pi)}$ . Cette plus petite valeur de  $t$  est le plus petit nombre entier, non négatif si  $\pi$  est impair, supérieur à zéro si  $\pi$  est pair, qui rende supérieure à zéro l'expression  $i + 1 + t$ . En d'autres termes, c'est zéro si  $\pi$  est impair, et l'unité si  $\pi$  est pair.

Donc le coefficient  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$  présentera, si  $\pi$  est impair, la suite des puissances

$$1^{2q}, \quad 3^{2q}, \quad 5^{2q}, \quad \dots, \quad [2(p + i) + 1]^{2q};$$

et, si  $\pi$  est pair, la suite

$$2^{2q}, \quad 4^{2q}, \quad 6^{2q}, \quad \dots, \quad [2(p + i)]^{2q}.$$

Nous pouvons remarquer que le terme  $b_{q,s,i}^{(\pi)}$  présente à lui seul, exactement et complètement, suivant que  $\pi$  est impair ou pair, l'une ou l'autre de ces deux suites.

141. Cherchons le degré du polynôme entier en  $q$  qui multiplie chacune de ces puissances  $2q^{\text{ièmes}}$ , c'est-à-dire les valeurs des degrés correspondant aux valeurs successives de  $t$ .

Considérons un  $b_{q,r,j}^{(\pi)}$  quelconque de la formule précédente (138); les valeurs successives de  $t$ , prises dans l'ordre décroissant, y sont

$$p + i, \quad p + i - 1, \quad p + i - 2, \quad \dots, \quad \tau.$$

Les valeurs des degrés correspondant à ces valeurs décroissantes de  $t$  forment une suite de nombres entiers consécutifs croissants, dont le premier est zéro, suivis d'entiers tous égaux à la valeur maxima  $j$ ,

lesquels terminent la suite ou sont suivis eux-mêmes d'entiers consécutifs décroissants.

La plus haute valeur de  $t$  est la même dans tous les  $b^{(\pi)}$  de la formule que nous étudions; le nombre des valeurs de  $t$  ne dépasse, dans aucun des  $b^{(\pi)}$  considérés, ce qu'il est dans  $b_{q,s,i}^{(\pi)}$ ; le maximum  $j$  ne dépasse jamais non plus la valeur qu'il atteint dans ce même coefficient  $b_{q,s,i}^{(\pi)}$ .

Donc, dans la formule considérée (138), le degré du polynôme, entier en  $q$ , correspondant à une valeur déterminée de  $t$ , est le même que dans  $b_{q,s,i}^{(\pi)}$ .

142. En résumé, le coefficient cherché  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$  est exactement de la même forme que  $b_{q,s,i}^{(\pi)}$ .

### CHAPITRE III.

#### DÉVELOPPEMENT DE $v^{\pi}(x)$ .

##### § I. — Forme de $C_q^{(\pi)}$ .

143. Des formules (94), jointes aux formules (108) et à la définition de  $c_{q,r,s}^{(\pi)}$ , nous déduisons l'égalité

$$C_q^{(\pi)} = \sum_{i=0}^{q-1} (1-h^2)^i \left[ c_{q,r,s}^{(\pi)} (h^2-2)^{q-i} + c_{q,r,s}^{(\pi)} (h^2-2)^{q-i-1} (1-h^2) + c_{q,r,s}^{(\pi)} (h^2-2)^{q-i-2} (1-h^2)^2 + \dots \right],$$

qui nous montre que  $C_q^{(\pi)}$  est un polynôme entier en  $h^2$ .

144. Nous ne pouvons, dans le cas actuel, ordonner comme dans le cas précédent (132), par rapport aux puissances croissantes de  $h^2$ , parce que le coefficient de  $h^{2i}$ , par exemple, au lieu de dépendre seulement d'un nombre de termes constant avec l'exposant  $i$  et indépendant

de  $q$ , est fonction d'un nombre de termes qui varie avec  $q$ , lors même que l'exposant  $i$  demeure invariable.

145. Nous ordonnons donc par rapport aux puissances décroissantes de  $k^2$ .

Pour cela, nous reprenons la formule (143), qui nous donne  $C_q^{(\pi)}$ , et, dans l'expression qui suit le  $\Sigma$ , nous divisons le polynôme entre crochets par  $(k^2)^{q-e}$ , et la partie extérieure par  $(k^2)^e$  mis sous la forme  $(k^2)^c (k^2)^p$ . Tout le second membre de l'égalité se trouve ainsi divisé par  $(k^2)^q$ ; et, en rétablissant le facteur  $k^{2q}$  en avant du  $\Sigma$ , nous pouvons écrire

$$= k^{2q} \sum_{e=0}^{p+q} \left(\frac{1}{k^2}\right)^c \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)^p \times \left[ c_{q,r,e}^{(\pi)} \left(1 - \frac{2}{k^2}\right)^{q-e} + c_{q,r,1}^{(\pi)} \left(1 - \frac{2}{k^2}\right)^{q-e-1} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{k^2} - 1\right) + c_{q,r,2}^{(\pi)} \left(1 - \frac{2}{k^2}\right)^{q-e-2} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)^2 + \dots \right].$$

Dans cette nouvelle formule, le  $\Sigma$  est un polynôme entier au  $\frac{1}{k^2}$ , que nous pouvons écrire

$$\gamma_{q,0}^{(\pi)} + \gamma_{q,1}^{(\pi)} \frac{1}{k^2} + \gamma_{q,2}^{(\pi)} \frac{1}{k^4} + \dots + \gamma_{q,i}^{(\pi)} \frac{1}{k^{2i}} + \dots$$

Il s'ensuit que nous avons

$$C_q^{(\pi)} = \gamma_{q,0}^{(\pi)} k^{2q} + \gamma_{q,1}^{(\pi)} k^{2q-2} + \gamma_{q,2}^{(\pi)} k^{2q-4} + \dots + \gamma_{q,i}^{(\pi)} k^{2q-2i} + \dots,$$

et nous nous proposons de déterminer la forme analytique de  $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$  en fonction de  $q$ , l'indice  $i$  étant supposé invariable.

## § II. — Forme de $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ .

146. Si nous nous rappelons que  $c_{q,r,i}^{(\pi)}$  et  $b_{q,r,i}^{(\pi)}$  sont égaux entre eux, nous voyons immédiatement que le  $\Sigma$  de la formule précédente (145) n'est autre chose que l'expression même de  $B_q^{(\pi)}$ , dans laquelle on aurait

remplacé  $k^2$  par  $\frac{1}{k^2}$ . Donc ce  $\sum$ , ordonné par rapport aux puissances croissantes de  $\frac{1}{k^2}$ , doit présenter les mêmes coefficients que  $B_q^{(\pi)}$  ordonné par rapport aux puissances croissantes de  $k^2$ . Donc  $\gamma_{q,i}^{(\pi)} = \beta_{q,i}^{(\pi)}$ .

Or le coefficient  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$  est exactement de la même forme que  $b_{q,o,i}^{(\pi)}$ , et ce dernier coefficient est égal à  $c_{q,o,i}^{(\pi)}$ . Donc le coefficient  $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$  est de la même forme que  $c_{q,o,i}^{(\pi)}$ .

## CHAPITRE IV.

### RÉSUMÉ.

#### § I. — Forme des coefficients $\alpha^{(\pi)}$ , $\beta^{(\pi)}$ , $\gamma^{(\pi)}$ .

147. D'après ce qui précède, les coefficients  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$  ont respectivement la même forme que les coefficients  $a_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $b_{q,o,i}^{(\pi)}$ ,  $c_{q,o,i}^{(\pi)}$ .

148. Donc les coefficients  $(^1) \alpha_{q,i}^{(2p+1)}$ ,  $\beta_{q,i}^{(2p+1)}$ ,  $\gamma_{q,i}^{(2p+1)}$  sont tous les trois de la première, et  $\alpha_{q,i}^{(2p)}$ ,  $\beta_{q,i}^{(2p)}$ ,  $\gamma_{q,i}^{(2p)}$  tous les trois de la seconde des deux formes suivantes :

$$\sum_0^p \Xi_t(q) (2t+1)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i} \xi_t(q) (2t+1)^{2q},$$

$$\sum_1^p \Xi_t(q) (2t)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i} \xi_t(q) (2t)^{2q},$$

---

(<sup>1</sup>) Afin de prendre date, nous avons consigné ces derniers résultats dans une courte Note que notre illustre maître, M. Hermite, a bien voulu présenter à l'Académie des Sciences. Voir *Comptes rendus*, séance du 10 juillet 1876.



dans lesquelles  $\Xi_i(q)$  est un polynôme entier en  $q$  toujours du degré  $i$ , et  $\xi_i(q)$  un polynôme entier en  $q$  du degré  $p + i - t$ .

## § II. — Séries récurrentes et fonctions génératrices.

149. Donc les coefficients  $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ ,  $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ , où  $q$  est variable et  $i$  constant, sont chacun les termes d'une série récurrente proprement dite.

Si  $\pi$  est impair et égal à  $2p + 1$ , cette série est définie par l'équation

$$\prod_{t=0}^p [z - (2t+1)^2]^{i+1} \times \prod_{t=p+1}^{p+i} [z - (2t+1)^2]^{p+i+1-t} = 0,$$

dont le degré est  $(p+1)(i+1) + \frac{1}{2}i(i+1)$ .

Si  $\pi$  est pair et égal à  $2p$ , cette série est définie par l'équation

$$\prod_{t=1}^p [z - (2t)^2]^{i+1} \times \prod_{t=p+1}^{p+i} [z - (2t)^2]^{p+i+1-t} = 0,$$

dont le degré est  $p(i+1) + \frac{1}{2}i(i+1)$ .

150. La fonction génératrice de cette série récurrente est, dans le cas où  $\pi$  est impair,

$$\frac{U^{(2p+1)}}{\prod_{t=0}^p [1 - (2t+1)^2 z]^{i+1} \times \prod_{t=p+1}^{p+i} [1 - (2t+1)^2 z]^{p+i+1-t}},$$

et, dans le cas où  $\pi$  est pair,

$$\frac{U^{(2p)}}{\prod_{t=1}^p [1 - (2t)^2 z]^{i+1} \times \prod_{t=p+1}^{p+i} [1 - (2t)^2 z]^{p+i+1-t}};$$

et, dans chacune de ces fractions, le numérateur est un polynôme entier en  $z$ , de degré inférieur au degré du dénominateur.

151. Les différences d'ordre  $i + 1$  des coefficients  $\alpha_{q,i}^{(2p+1)}$ ,  $\beta_{q,i}^{(2p+1)}$ ,  $\gamma_{q,i}^{(2p+1)}$  sont aussi chacune le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation s'obtient en supprimant, dans celle des équations précédentes qui correspond aux valeurs impaires de  $\pi$  (149), le facteur  $(z - 1)^{i+1}$  relatif à celle des racines de cette équation qui est égale à l'unité.

On pourrait écrire immédiatement, soit l'équation, soit la fonction génératrice de cette nouvelle série.

### § III. — Détermination des constantes.

152. Il se présente, soit dans l'expression des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , soit dans le numérateur des fonctions génératrices, un certain nombre de constantes indéterminées. On calcule les valeurs de ces constantes qui répondent à des valeurs données de l'exposant  $\pi$  et de l'indice  $i$  de la façon indiquée plusieurs fois déjà.

153. En procédant ainsi pour les coefficients

$$\alpha_{q,i}^{(\pi)}, \quad \beta_{q,i}^{(\pi)}, \quad \gamma_{q,i}^{(\pi)},$$

on arrive, non plus seulement à la forme, mais à l'expression même de ces coefficients, de sorte que le problème que nous nous étions proposé de résoudre nous paraît résolu.



---

APPLICATION  
DE LA  
THÉORIE DES COMPLEXES LINÉAIRES

A L'ÉTUDE  
DES SURFACES ET DES COURBES GAUCHES,

PAR M. ÉMILE PICARD,  
ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

1. On sait que Plücker a appelé *complexe de droites* l'ensemble des droites de l'espace dont les coordonnées vérifient une relation donnée. Il a examiné particulièrement, dans sa *Nouvelle Géométrie*, les complexes linéaires ou du premier ordre et les complexes du second ordre. L'objet de ce travail est l'application de la théorie des complexes linéaires à l'étude de certaines courbes et de certaines surfaces.

La première Partie est consacrée à l'étude des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Des considérations géométriques me donnent leurs équations générales débarrassées de tout signe d'intégration. Ces courbes possèdent un certain nombre de points remarquables, où le contact de la tangente avec la courbe est du second ordre. Je recherche la forme de la courbe dans le voisinage de ces points. Passant ensuite aux courbes unicursales, je donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe plane unicursale puisse être considérée comme la projection d'une courbe gauche unicursale, dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire ayant son axe perpendiculaire au plan de la courbe plane.

Dans la seconde Partie, j'étudie les surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire. Cette étude repose sur une

propriété des équations de Riccati. La recherche des lignes asymptotiques d'une surface réglée dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire peut être ramenée à une quadrature. Je fais ensuite des applications à certaines surfaces, en particulier aux surfaces réglées du troisième ordre et à celles du quatrième ordre, ayant pour courbe double une cubique gauche.

Je termine en recherchant les surfaces dont les normales appartiennent à un complexe linéaire, et en indiquant l'analogie qui existe entre l'étude des surfaces réglées et celle des surfaces ayant un système de lignes de courbure circulaires.

### PREMIÈRE PARTIE.

#### 2. Soient

$$(1) \quad x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations d'une droite.

On obtient un complexe linéaire en assujettissant les paramètres variables  $a, b, p, q$  à la condition

$$(2) \quad La + Mb + N - Qp + Pq - R(aq - bp) = 0,$$

dans laquelle  $L, M, N, P, Q$  et  $R$  désignent des constantes.

Un point  $(x, y, z)$  étant donné, on sait que toutes les droites du complexe passant par ce point sont dans un plan que l'on appelle le *plan polaire du point*. L'équation du plan polaire du point  $(x, y, z)$  est

$$(3) \quad \begin{cases} (L + Qz - Ry)(X - x) + (M + Rx - Pz)(Y - y) \\ \quad + (N + Py - Qx)(Z - z) = 0; \end{cases}$$

supposons maintenant que, dans les équations (1),  $a, b, p, q$  représentent des fonctions d'un paramètre variable  $\alpha$ ; ces équations détermineront les génératrices d'une surface réglée, et ces génératrices feront partie du complexe, si les fonctions  $a, b, p, q$  vérifient la relation (2), quelle que soit la valeur du paramètre  $\alpha$ . Nous avons ainsi une surface réglée dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire. Le plan tangent en un point de cette surface ne sera pas, en

général, le plan correspondant à ce point dans le complexe. Sur chaque génératrice il y a deux points seulement jouissant de cette propriété. Considérons, en effet, un plan variable passant par cette génératrice. Le pôle de ce plan et son point de contact forment sur cette droite deux systèmes de points homographiques. Les deux points doubles de cette homographie sont les points de contact de leur plan polaire avec la surface.

Cherchons l'équation du second degré qui donne ces deux points. Nous exprimerons que le plan polaire du point  $(x, y, z)$ , donné par l'équation (3), est tangent en ce point à la surface, en écrivant qu'il contient la tangente à la courbe de la surface obtenue en laissant  $z$  constant et en faisant varier  $\alpha$ ;  $x$  et  $y$  sont alors deux fonctions de  $\alpha$ , et l'on a

$$dx = (a'z + p')d\alpha, \quad dy = (b'z + q')d\alpha, \quad dz = 0,$$

$a'$ ,  $b'$ ,  $p'$  et  $q'$  étant les dérivées de  $a$ ,  $b$ ,  $p$  et  $q$  par rapport à  $\alpha$ .

Remplaçons, dans l'équation (3),  $X - x$ ,  $Y - y$ ,  $Z - z$  respectivement par ces valeurs de  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ; nous obtenons l'équation

$$(4) \quad (L + Qz - Ry)(a'z + p') + (M + Rx - Pz)(b'z + q') = 0.$$

Si, dans l'équation (4), on substitue à  $x$  et  $y$  leurs valeurs (1), on aura l'équation du second degré en  $z$ , donnant sur la génératrice déterminée par  $\alpha$  les deux points où le plan tangent à la surface coïncide avec le plan polaire.

3. Le lieu des points ainsi obtenus forme sur la surface une courbe telle, que ses tangentes appartiennent au complexe linéaire dont font partie les génératrices de la surface; car la tangente en un point quelconque de la courbe est une droite du plan tangent passant par le foyer de ce plan. Les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire jouissent de cette propriété remarquable : les points de contact de tous les plans osculateurs qu'on peut leur mener par un point quelconque sont dans un même plan passant par ce point. M. Appell a, en effet, montré dans son travail sur les cubiques gauches que, *quand toutes les tangentes d'une courbe appartiennent à un complexe linéaire, le plan polaire de chacun des points de cette courbe lui est en ce point*

*osculateur*. Il suit de ce théorème que les points de contact des plans osculateurs menés par un point quelconque sont dans le plan correspondant à ce point, car les foyers de tous les plans passant par un point sont situés dans le plan qui lui correspond.

Soit un plan quelconque  $P$ . Si  $A$  est un point où  $P$  rencontre la courbe considérée, le plan polaire de  $A$ , ou, ce qui est la même chose, le plan tangent en  $A$  à la surface devra passer par le foyer  $F$  du plan : donc la droite  $FA$  est tangente en  $A$  à la section faite par  $P$  dans la surface. Réciproquement, soit  $A$  le point de contact d'une tangente menée à cette courbe par le foyer  $F$ . Le plan mené par  $AF$  et la génératrice de la surface passant en  $A$  est tangent en ce point à la surface. D'autre part, le pôle de ce plan est le point  $A$ , puisque  $AF$  et la génératrice passant en  $A$  sont deux droites du complexe;  $A$  est donc un point de la courbe que nous étudions. Ainsi les points où celle-ci rencontre le plan  $P$  sont les points de contact des tangentes menées par le foyer  $F$  du plan à la section qu'il fait dans la surface. Dans le cas où la surface et, par suite, la courbe sont algébriques, cette considération permet de déterminer le degré de la courbe : on voit qu'il est égal à la classe d'une section plane quelconque de la surface.

La courbe est une ligne asymptotique de la surface. Le plan osculateur à la courbe en un quelconque de ses points est, en effet, le plan polaire et, par suite, le plan tangent à la surface en ce point.

4. Inversement, toute courbe dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire admet le mode précédent de génération. Considérons, en effet, un point quelconque  $A$  d'une telle courbe. Menons ce plan osculateur à la courbe en ce point. Ce plan coupe la courbe au moins en un second point  $B$  (je laisse de côté la cubique gauche, pour laquelle la propriété se vérifie aisément). Les droites  $AB$  sont les génératrices d'une surface réglée. Si nous cherchons sur cette surface la courbe que nous venons de signaler (2), nous trouvons la courbe proposée. En effet, puisqu'il y a sur chaque génératrice de la surface deux points seulement pour lesquels le plan tangent et le plan polaire coïncident, ces deux points sont nécessairement les deux points de la courbe considérée.

Toutes les courbes dont les tangentes appartiennent au complexe

défini par les six constantes  $L, M, N, P, Q$  et  $R$  satisfont à l'équation différentielle

$$(5) \quad (L + Qz - Ry) dx + (M + Rx - Pz) dy + (N + Py - Qx) dz = 0.$$

On obtient cette équation en remplaçant, dans l'équation du plan polaire, les quantités  $(X - x), (Y - y)$  et  $(Z - z)$  par  $dx, dy$  et  $dz$ .

La réciproque que nous venons d'établir permet d'intégrer en termes finis l'équation (5), c'est-à-dire de trouver des expressions de  $x, y, z$  en fonction d'un paramètre  $\alpha$ , débarrassées de tout signe d'intégration et satisfaisant à l'équation précédente. Ces expressions sont données par les équations (1) et (4);  $a, b, p, q$  sont des fonctions d'un paramètre variable  $\alpha$ , qui sont uniquement assujetties à vérifier la condition (2). On voit que les expressions de  $x, y, z$  contiendront deux fonctions arbitraires, car l'une des fonctions pourra être prise pour paramètre variable.

Les considérations suivantes conduisent à des formules ne renfermant qu'une fonction arbitraire. Prenons l'axe des  $z$  pour axe du complexe, et soit  $aq - bp = k$  l'équation de ce complexe. L'équation du second degré, donnant sur chaque génératrice les points où le plan tangent et le plan polaire coïncident, est, en remplaçant  $x$  et  $y$  par leurs valeurs,

$$(bz + q)(a'z + p') - (b'z + q')(az + p) = 0.$$

Supposons que nous ayons une surface telle que  $ab' - ba' = 0$ , c'est-à-dire que  $\frac{a}{b} = C$ ,  $C$  étant une constante. L'équation précédente sera du premier degré. La surface est alors une surface réglée à plan directeur; le plan représenté par l'équation  $bx - ay = 0$  est, en effet, parallèle à toutes les génératrices de la surface.

Considérons maintenant une courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Menons par l'axe de ce complexe un plan  $P$ . Soit  $m$  un point quelconque de la courbe. Le plan osculateur à celle-ci en  $m$  et le plan mené par ce point parallèlement au point  $P$  se coupent suivant une droite  $mn$ . Le lieu de cette droite est une surface réglée, dont les génératrices font évidemment partie du complexe linéaire : c'est une surface réglée à plan directeur. Si l'on cherche sur cette sur-

face la courbe pour tous les points de laquelle le plan tangent à la surface et le plan polaire coïncident, on trouve la courbe dont nous sommes partis. Elle n'a évidemment qu'un seul point sur chaque génératrice.

Un complexe étant donné, prenons son axe pour axe des  $z$ . Considérons les surfaces réglées dont les génératrices font partie de ce complexe et sont toutes parallèles à un plan passant par l'axe du complexe, plan que je puis supposer être le plan des  $zx$ . Une telle surface est donnée par les équations

$$(6) \quad x = az + p, \quad y = q,$$

et l'on a  $aq = K$ ,  $K$  étant une constante.

L'équation du premier degré donnant sur chaque génératrice le point où le plan polaire et le plan tangent coïncident est ici

$$(7) \quad q(a'z + p') - q'(az + p) = 0.$$

Les équations (6) et (7) définissent une courbe dont les tangentes appartiennent au complexe linéaire.

Ces équations donnent

$$x = \frac{pq' + p'q}{2q'}, \quad y = q, \quad z = \frac{q(p'q - pq')}{2Kq'};$$

$p$  et  $q$  sont deux fonctions arbitraires d'un paramètre  $\alpha$ .

5. Le plan osculateur en un point d'une courbe gauche  $a$ , en général, avec cette courbe un contact du second ordre. Pour certains points de la courbe, le contact peut être du troisième ordre. En ces points le plan osculateur a quatre points confondus communs avec la courbe. Les coordonnées  $x, y, z$  d'un point quelconque de la courbe étant exprimées au moyen d'un paramètre, les valeurs de ce paramètre correspondant aux points où le plan osculateur est stationnaire sont données par l'équation

$$(8) \quad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0.$$

Or supposons maintenant que les tangentes de la courbe appar-



tiennent à un complexe ayant pour axe l'axe des  $z$ , c'est-à-dire que

$$x dy - y dx = K dz,$$

on aura

$$d^2 z = \frac{1}{K} (x d^2 y - y d^2 x), \quad d^3 z = \frac{1}{K} (x d^3 y - y d^3 x + dx d^2 y - dy d^2 x).$$

Substituons ces valeurs de  $dz$ ,  $d^2 z$  et  $d^3 z$  dans l'équation (8); elle devient

$$\begin{vmatrix} dx & dy & x dy - y dx \\ d^2 x & d^2 y & x d^2 y - y d^2 x \\ d^3 x & d^3 y & x d^3 y - y d^3 x + dx d^2 y - dy d^2 x \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} dx & dy & x dy - y dx \\ d^2 x & d^2 y & x d^2 y - y d^2 x \\ d^3 x & d^3 y & x d^3 y - y d^3 x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ d^2 x & d^2 y & 0 \\ d^3 x & d^3 y & dx d^2 y - dy d^2 x \end{vmatrix} = (dx d^2 y - dy d^2 x)^2 = 0.$$

Nous voyons que l'équation qui donne les points cherchés a pour premier membre un carré parfait.

La tangente en un point d'une courbe gauche où le plan osculateur est stationnaire n'a pas, en général, avec la courbe un contact d'un ordre plus élevé qu'en un point quelconque, c'est-à-dire que ce contact est du premier ordre. Nous allons montrer qu'aux points donnés par l'équation (8), dans le cas où les tangentes de la courbe font partie d'un complexe linéaire, le contact de la tangente avec la courbe est du second ordre. La tangente en un point  $(x, y, z)$  d'une courbe a avec celle-ci un contact du second ordre, si

$$(9) \quad \frac{dx}{d^2 x} = \frac{dy}{d^2 y} = \frac{dz}{d^2 z}.$$

On exprime ainsi que les projections de la courbe sur deux quelconques des plans de coordonnées ont en ce point avec leur tangente un contact du second ordre. Or, pour les points correspondant aux racines de l'équation (8), on a

$$dx d^2 y - dy d^2 x = 0.$$

Mais

$$x dy - y dx = K dz, \quad \text{et, par suite,} \quad x d^2 y - y d^2 x = K d^2 z;$$

donc

$$dz d^2y - dy d^2z = 0.$$

Les conditions (9) sont vérifiées.

6. Prenons un point d'une courbe gauche où le plan osculateur soit stationnaire, mais où la tangente n'ait pas avec la courbe un contact du second ordre. Projetons orthogonalement la courbe sur un plan perpendiculaire à la tangente en ce point, que nous désignerons par A, et proposons-nous de voir ce que sera sur cette projection le point  $\alpha$ , projection de A. Au point A le plan osculateur ne traverse pas la courbe; par conséquent, si nous désignons par  $\alpha\omega$  la trace du plan osculateur sur le plan de projection, la courbe projection sera tout entière du même côté de  $\alpha\omega$ , dans le voisinage de  $\alpha$ . Ce point est un point double pour la projection, car tout plan passant par la tangente a en A un point double de rencontre avec la courbe. D'autre part, la tangente en ce point est unique : c'est la trace  $\alpha\omega$  du plan osculateur. Le point  $\alpha$  est un point de rebroussement de seconde espèce.

Pour le démontrer en toute rigueur, prenons le point  $\alpha$  pour origine, la droite  $\alpha A$  pour axe des  $z$ ,  $\alpha\omega$  pour axe des  $y$ , et une seconde droite quelconque dans le plan de projection pour axe des  $x$ .

Les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  d'un point de la courbe sont des fonctions d'un paramètre  $h$ , que l'on peut supposer tellement choisi, que pour  $h = 0$  on ait le point A. Dans le voisinage de A,  $x$ ,  $y$  et  $z$  peuvent être développés en séries suivant les puissances de  $h$ ; on aura

$$(10) \quad \begin{cases} x = A h^4 + A_1 h^5 + \dots, \\ y = B h^2 + B_1 h^3 + \dots, \\ z = C + C_1 h + \dots \end{cases}$$

On doit avoir en effet  $h^4$  en facteur, dans l'expression de  $x$ , puisque le plan des  $zy$  a au point A quatre points confondus communs avec la courbe.

La seconde des équations (10) permet de développer  $h$  suivant les puissances croissantes de  $y^{\frac{1}{2}}$ ,

$$h = \alpha y^{\frac{1}{2}} + \dots$$

En substituant dans la première équation, on obtient pour  $x$  le développement suivant :

$$x = My^2 + Ny^{\frac{1}{2}} + \dots;$$

c'est la forme du développement, relative au point de rebroussement de seconde espèce.

Passons au cas d'un point où la tangente a avec la courbe un contact du second ordre. Tout plan passant par la tangente a avec la courbe un point triple de rencontre au point de contact. Projetons la courbe comme précédemment, et choisissons les mêmes axes de coordonnées. Les formes des développements de  $x$  et de  $y$  seront

$$x = Ah' + A_1 h^2 + \dots, \quad y = Bh' + B_1 h^2 + \dots$$

L'origine est un point triple pour la courbe plane représentée par ces deux équations. La seconde équation permet de développer  $h$  suivant les puissances de  $y^{\frac{1}{2}}$ .

On a

$$h = \alpha y^{\frac{1}{2}} + \dots;$$

donc

$$x = My^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Il ne passe à l'origine qu'une seule branche réelle, car, sur les trois déterminations de  $y^{\frac{1}{2}}$ , il n'y en a qu'une seule de réelle. Dans les deux cas que nous venons de traiter, la projection permet de se représenter nettement la forme de la courbe dans le voisinage du point A.

7. Nous allons considérer une classe particulière de courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire, les courbes unicursales.

Revenons aux formules du n° 4,

$$(11) \quad x = \frac{p'q + pq'}{q'}, \quad y = q, \quad z = \frac{q(p'q - pq')}{Kq'}.$$

On obtient des courbes unicursales dont les tangentes font partie du complexe linéaire défini par l'axe des  $z$  et la constante  $K$ , en mettant

à la place de  $p$  et de  $q$  des fonctions rationnelles du paramètre  $\alpha$ . On peut voir qu'on les obtient toutes de cette manière.

Soient, en effet,

$$x = \varphi(\alpha), \quad y = \varphi_1(\alpha), \quad z = \varphi_2(\alpha)$$

les équations d'une courbe unicursale appartenant au complexe. Nous supposons que  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des fonctions rationnelles de  $\alpha$ .

Prenons  $q = \varphi_1(\alpha)$ , et voyons si l'on peut déterminer  $p$  de manière que

$$(12) \quad pq' + p'q = q' \varphi(\alpha), \quad q(p'q - pq') = Kq' \varphi_2(\alpha).$$

Retranchons ces équations membre à membre, nous avons

$$2pq' = q' \varphi(\alpha) - \frac{Kq'}{q} \varphi_2(\alpha) \quad \text{ou} \quad p = \frac{\varphi(\alpha)}{2} - \frac{K\varphi_2(\alpha)}{2\varphi_1(\alpha)}.$$

La fonction rationnelle  $p$  de  $\alpha$ , ainsi déterminée, satisfait aux équations (12), si l'on a égard à ce que

$$K\varphi'_2(\alpha) = \varphi_1(\alpha)\varphi'(\alpha) - \varphi(\alpha)\varphi'_1(\alpha).$$

Calculons, en effet,  $pq' + p'q$ ; nous aurons

$$\begin{aligned} pq' + p'q &= \varphi'_1(\alpha) \left[ \frac{\varphi(\alpha)}{2} - \frac{K\varphi_2(\alpha)}{2\varphi_1(\alpha)} \right] + \varphi_1(\alpha) \left[ \frac{\varphi'(\alpha)}{2} - \frac{K\varphi'_2(\alpha)\varphi_1(\alpha) - \varphi_2(\alpha)\varphi'_1(\alpha)}{2\varphi_1^2(\alpha)} \right] \\ &= \frac{\varphi'_1(\alpha)\varphi(\alpha)}{2} + \frac{\varphi_1(\alpha)\varphi'(\alpha)}{2} - \frac{K\varphi'_2(\alpha)}{2} = \varphi(\alpha)\varphi'_1(\alpha). \end{aligned}$$

La première des équations (11) est donc vérifiée; il en sera, par suite, de même de la seconde.

Soient

$$(13) \quad p = \frac{a_n \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots}{A \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + \dots}, \quad q = \frac{b_n \alpha^n + b_1 \alpha^{n-1} + \dots}{A \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + \dots},$$

et supposons que les coefficients des différentes puissances de  $\alpha$  soient quelconques; la courbe représentée par les équations (11) n'aura aucun point multiple. En effet, cette courbe aura un point double si, pour deux valeurs du paramètre  $\alpha$ , les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  reprennent la même valeur. Or

$$x = \left( \frac{p'}{q'} \right) q + p, \quad z = \frac{q}{K} \left( \frac{p'}{q'} \right) - \frac{pq}{K};$$

$q$  devant reprendre la même valeur, on voit qu'il en sera de même de  $p$  et de  $\frac{p'}{q'}$ . Si donc on considère  $p$  et  $q$  comme les coordonnées d'un point quelconque d'une courbe unicursale plane, qui serait représentée par les équations (13), cette courbe aurait, au point correspondant, un point double, et, les deux valeurs de  $\frac{p'}{q'}$  étant égales, ce point ne serait pas un point double ordinaire; or la courbe (13) ne peut avoir que des points doubles ordinaires, si, comme nous l'avons supposé, les coefficients des puissances de  $\alpha$  sont absolument arbitraires.

8. Démontrons maintenant que la projection de toute courbe unicursale de degré  $m$ , dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire, sur un plan perpendiculaire à l'axe de ce complexe, a  $m$  points d'inflexion à l'infini.

Prenons l'axe du complexe pour axe des  $z$ .

Soient

$$x = \frac{a_1 \alpha^m + b_1 \alpha^{m-1} + \dots}{A \alpha^m + B \alpha^{m-1} + \dots}, \quad y = \frac{a_2 \alpha^m + b_2 \alpha^{m-1} + \dots}{A \alpha^m + B \alpha^{m-1} + \dots}, \quad z = \frac{a_3 \alpha^m + b_3 \alpha^{m-1} + \dots}{A \alpha^m + B \alpha^{m-1} + \dots}$$

les équations de la courbe. Toutes les tangentes de cette courbe appartenant à un complexe linéaire ayant  $Oz$  pour axe, on ne devra pas trouver de termes logarithmiques en intégrant  $x dy - y dx$ .

Posons

$$x = \frac{P}{R}, \quad y = \frac{Q}{R},$$

on a

$$x dy - y dx = \frac{PQ' - P'Q}{R^2} d\alpha,$$

soit

$$R = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \dots (\alpha - \alpha_m).$$

Décomposons la fraction rationnelle  $\frac{PQ' - P'Q}{R^2}$  en fractions simples

$$\frac{PQ' - P'Q}{R^2} = \frac{K}{(\alpha - \alpha_1)^2} + \frac{K_1}{(\alpha - \alpha_1)} + \dots$$

Toutes les quantités  $K$ , doivent être nulles.

Or on peut écrire cette identité de la manière suivante :

$$\frac{PQ' - P'Q}{\left(\frac{R}{\alpha - \alpha_1}\right)^2} = K + K_1(\alpha - \alpha_1) + \dots$$

Différentions et faisons  $\alpha = \alpha_1$ ; il ne restera dans le second membre que  $K_1$ . Le premier membre différentié devient

$$\left[ (PQ'' - P''Q) \frac{R}{\alpha - \alpha_1} - 2(PQ' - P'Q) \frac{R'(\alpha - \alpha_1) - R}{(\alpha - \alpha_1)^2} \right] \frac{1}{\left(\frac{R}{\alpha - \alpha_1}\right)^3};$$

faisons  $\alpha = \alpha_1$ , et égalons à zéro; nous aurons

$$(PQ'' - P''Q)R' + (P'Q - PQ')R'' = 0, \quad \text{pour } \alpha = \alpha_1.$$

De même cette quantité doit s'annuler pour  $\alpha = \alpha_2, \dots, \alpha_m$ .

D'autre part, les points d'inflexion de la courbe unicursale représentée par les équations

$$x = \frac{P}{R}, \quad y = \frac{Q}{R}$$

sont donnés par l'équation du degré  $3(m - 2)$

$$R(P'Q'' - P''Q') + R'(P''Q - PQ'') + R''(PQ' - P'Q) = 0.$$

Nous venons de voir que toutes les racines du polynôme  $R$  annulent le polynôme  $R'(P''Q - PQ'') + R''(PQ' - P'Q)$ .

L'équation, donnant les valeurs de  $\alpha$  correspondant aux points d'inflexion, admet donc pour racines  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ . Par conséquent, la courbe a  $m$  points d'inflexion à l'infini.

La réciproque de ce théorème est vraie : *Si une courbe unicursale d'ordre  $m$ , située dans un plan perpendiculaire à l'axe d'un complexe, a  $m$  points d'inflexion à l'infini, elle peut être considérée comme la projection d'une courbe gauche d'ordre  $m$ , dont les tangentes font partie de ce complexe.*

En effet, si  $R'(P''Q - PQ'') + R''(PQ' - P'Q)$  s'annule pour  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , les termes  $\frac{1}{\alpha - \alpha_1}, \frac{1}{\alpha - \alpha_2}, \dots$  auront des coefficients nuls

dans le développement de  $\frac{PQ' - P'Q}{R^2}$ . On aura donc

$$K dz = \frac{PQ' - P'Q}{R^2} d\alpha = \sum \frac{A_i d\alpha}{(\alpha - \alpha_i)^2}.$$

Par suite,  $z$  aura la même forme que  $x$  et  $y$  : la courbe plane considérée sera la projection d'une courbe d'ordre  $m$ .

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, dont un cas particulier, relatif aux courbes du troisième ordre, a été donné par M. Appell :

*Pour qu'une courbe plane unicursale d'ordre  $m$  puisse être considérée comme la projection d'une courbe de degré  $m$ , dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire ayant son axe perpendiculaire au plan de la courbe plane, il faut et il suffit que celle-ci ait  $m$  points d'inflexion à l'infini.*

Outre ces  $m$  points à l'infini, la courbe en a  $2(m - 3)$  autres : ce sont les projections des points de la courbe gauche, où elle a avec sa tangente un contact du second ordre. Nous pouvons donc dire qu'une courbe unicursale d'ordre  $m$ , sans singularité, dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire, possède  $2(m - 3)$  points où la tangente a avec elle un contact du second ordre.

## SECONDE PARTIE.

9. Avant de nous occuper des surfaces réglées dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire, nous allons faire connaître une propriété des équations de Riccati, c'est-à-dire des équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} + X_1 y' + X_2 y + X_3 = 0,$$

où les  $X$  sont des fonctions quelconques de la variable  $x$ .

C'est, comme on sait, une équation dont l'intégration est ramenée à des quadratures, quand on en connaît une solution.

Si l'on prend quatre solutions quelconques  $y_1, y_2, y_3, y_4$  de cette équation différentielle, le rapport anharmonique  $\frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_4} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_4}$  de ces quatre fonctions de  $x$  est une constante.

Nous aurons, en effet,

$$\frac{dy_1}{dx} + X_1 y_1^2 + X_2 y_1 + X_3 = 0,$$

$$\frac{dy_2}{dx} + X_1 y_2^2 + X_2 y_2 + X_3 = 0,$$

$$\frac{dy_3}{dx} + X_1 y_3^2 + X_2 y_3 + X_3 = 0,$$

$$\frac{dy_4}{dx} + X_1 y_4^2 + X_2 y_4 + X_3 = 0;$$

par conséquent,

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx} & y_1^2 & y_1 & 1 \\ \frac{dy_2}{dx} & y_2^2 & y_2 & 1 \\ \frac{dy_3}{dx} & y_3^2 & y_3 & 1 \\ \frac{dy_4}{dx} & y_4^2 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Développons ce déterminant; nous aurons

$$\begin{aligned} & \frac{dy_1}{dx} (y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4) + \frac{dy_2}{dx} (y_3 - y_4)(y_3 - y_1)(y_4 - y_1) \\ & + \frac{dy_3}{dx} (y_4 - y_1)(y_4 - y_2)(y_1 - y_2) \\ & + \frac{dy_4}{dx} (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & (y_1 - y_2)(y_3 - y_4) \cdot d[(y_1 - y_4)(y_3 - y_2)] \\ & - (y_1 - y_4)(y_3 - y_2) \cdot d[(y_1 - y_2)(y_3 - y_4)] = 0, \end{aligned}$$



c'est-à-dire

$$\frac{(y_1 - y_2)(y_3 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_3 - y_2)} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_4} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_4} = \text{const.}$$

Le théorème est donc démontré. On aurait pu démontrer autrement ce théorème, en exprimant les trois solutions  $y_2, y_3, y_4$  au moyen de  $y_1$  et d'une exponentielle. Il n'y a alors qu'à faire une simple vérification.

La réciproque est vraie : *Toute équation différentielle du premier ordre telle, que le rapport anharmonique de quatre quelconques de ses solutions soit constant, est une équation de Riccati.*

Désignons, en effet, par  $y_1, y_2, y_3$  trois solutions, et soit  $y$  une solution quelconque. On aura

$$\frac{y - y_1}{y - y_3} : \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_3} = K,$$

$K$  ne dépendant pas de  $x$ , ou

$$\frac{y - y_1}{y - y_3} = K \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_3} = K\Omega.$$

En différentiant, nous avons

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx}\right)(y - y_3) - \left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy_3}{dx}\right)(y - y_1) = K \frac{d\Omega}{dx} (y - y_3)^2 = (y - y_1)(y - y_3) \frac{d\Omega}{\Omega}.$$

En égalant la première expression à la troisième, nous voyons de suite que  $y$  satisfait à une équation de Riccati. Ainsi la constance du rapport anharmonique de quatre solutions quelconques est caractéristique de ce genre d'équations différentielles.

Cela posé, considérons une surface réglée quelconque. Une telle surface peut être définie par les équations

$$x = x_1 + l\alpha, \quad y = y_1 + l\beta, \quad z = z_1 + l\gamma,$$

$x_1, y_1$  et  $z_1$  sont des fonctions données d'un paramètre  $t$ ;  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  désignent les cosinus des angles que fait avec les axes la génératrice passant par le point  $(x_1, y_1, z_1)$ ; ce sont aussi des fonctions de  $t$ . A une valeur du paramètre  $l$  correspond, sur la génératrice, un point dont la distance au point  $(x_1, y_1, z_1)$  est égale à  $l$ . Toute ligne de la surface est

déterminée par une relation entre  $l$  et  $t$ . La relation différentielle donnant les lignes asymptotiques a la forme

$$\frac{dl}{dt} + X_1 l + X_2 l + X_3 = 0,$$

comme l'a montré pour la première fois M. Bonnet. De ce fait résulte une propriété des lignes asymptotiques de la surface. Prenons quatre solutions quelconques  $l_1, l_2, l_3$  et  $l_4$ . D'après le théorème précédent, le rapport anharmonique de ces quatre fonctions de  $t$  est indépendant de  $t$ . Nous en déduisons qu'une *génératrice quelconque rencontre quatre lignes asymptotiques données sur la surface en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Dans le cas où l'on connaît sur une surface réglée trois lignes asymptotiques, toutes les autres sont connues immédiatement, sans qu'il y ait aucune intégration à effectuer. Conservons les variables que nous avons choisies plus haut. Nous avons, en désignant par  $l_1, l_2, l_3$  les trois intégrales connues, c'est-à-dire les valeurs de  $l$  donnant les trois lignes asymptotiques, l'intégrale générale

$$\frac{l - l_1}{l - l_4} : \frac{l_2 - l_1}{l_2 - l_4} = \text{const.},$$

qui exprime la constance du rapport anharmonique.

10. Supposons maintenant que nous connaissions deux lignes asymptotiques d'une surface réglée. On aura, dans ce cas, deux solutions de l'équation différentielle de Riccati. La connaissance de ces deux solutions permet de ramener à une quadrature la recherche de l'intégrale générale. On peut, dans ce cas, opérer de la manière suivante la séparation des variables :

Désignons par  $\mu$  le paramètre dont dépend la position d'une génératrice.

Soient  $x = M_1, y = M_2, z = M_3, t = M_4$  les valeurs fixant le point de la première ligne asymptotique sur la génératrice correspondant à la valeur  $\mu$  du paramètre; les  $M$  sont des fonctions de ce paramètre.

Soient de même  $x = N_1, y = N_2, z = N_3, t = N_4$  les valeurs des coordonnées du point de la seconde ligne asymptotique sur la même génératrice; les  $N$  sont des fonctions de  $\mu$ .

La position d'un point quelconque sur la génératrice peut être fixée par les équations

$$x = M_1 + \nu N_1, \quad y = M_2 + \nu N_2, \quad z = M_3 + \nu N_3, \quad t = M_4 + \nu N_4.$$

En faisant varier  $\mu$  et  $\nu$ , on aura tous les points de la surface. La relation différentielle entre  $\mu$  et  $\nu$ , donnant les lignes asymptotiques de cette surface, est, comme on le reconnaît sans peine,

$$\begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dM_1}{d\mu} + \nu \frac{dN_1}{d\mu} & \frac{d^2 M_1}{d\mu^2} + \nu \frac{d^2 N_1}{d\mu^2} + 2 \frac{d\nu}{d\mu} \frac{dN_1}{d\mu} \\ M_2 & N_2 & \frac{dM_2}{d\mu} + \nu \frac{dN_2}{d\mu} & \frac{d^2 M_2}{d\mu^2} + \nu \frac{d^2 N_2}{d\mu^2} + 2 \frac{d\nu}{d\mu} \frac{dN_2}{d\mu} \\ M_3 & N_3 & \frac{dM_3}{d\mu} + \nu \frac{dN_3}{d\mu} & \frac{d^2 M_3}{d\mu^2} + \nu \frac{d^2 N_3}{d\mu^2} + 2 \frac{d\nu}{d\mu} \frac{dN_3}{d\mu} \\ M_4 & N_4 & \frac{dM_4}{d\mu} + \nu \frac{dN_4}{d\mu} & \frac{d^2 M_4}{d\mu^2} + \nu \frac{d^2 N_4}{d\mu^2} + 2 \frac{d\nu}{d\mu} \frac{dN_4}{d\mu} \end{vmatrix} = 0;$$

c'est une équation de Riccati.

Les hypothèses faites sur les lignes M et N vont nous permettre de la simplifier. On a, en effet,

$$\begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dM_1}{d\mu} & \frac{d^2 M_1}{d\mu^2} \\ M_2 & N_2 & \frac{dM_2}{d\mu} & \frac{d^2 M_2}{d\mu^2} \\ M_3 & N_3 & \frac{dM_3}{d\mu} & \frac{d^2 M_3}{d\mu^2} \\ M_4 & N_4 & \frac{dM_4}{d\mu} & \frac{d^2 M_4}{d\mu^2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dN_1}{d\mu} & \frac{d^2 N_1}{d\mu^2} \\ M_2 & N_2 & \frac{dN_2}{d\mu} & \frac{d^2 N_2}{d\mu^2} \\ M_3 & N_3 & \frac{dN_3}{d\mu} & \frac{d^2 N_3}{d\mu^2} \\ M_4 & N_4 & \frac{dN_4}{d\mu} & \frac{d^2 N_4}{d\mu^2} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation différentielle peut alors s'écrire

$$\nu \left\{ \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dN_1}{d\mu} & \frac{d^2 M_1}{d\mu^2} \\ M_2 & N_2 & \frac{dN_2}{d\mu} & \frac{d^2 M_2}{d\mu^2} \\ M_3 & N_3 & \frac{dN_3}{d\mu} & \frac{d^2 M_3}{d\mu^2} \\ M_4 & N_4 & \frac{dN_4}{d\mu} & \frac{d^2 M_4}{d\mu^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dM_1}{d\mu} & \frac{d^2 N_1}{d\mu^2} \\ M_2 & N_2 & \frac{dM_2}{d\mu} & \frac{d^2 N_2}{d\mu^2} \\ M_3 & N_3 & \frac{dM_3}{d\mu} & \frac{d^2 N_3}{d\mu^2} \\ M_4 & N_4 & \frac{dM_4}{d\mu} & \frac{d^2 N_4}{d\mu^2} \end{vmatrix} \right\} + 2 \frac{d\nu}{d\mu} \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dM_1}{d\mu} & \frac{dN_1}{d\mu} \\ M_2 & N_2 & \frac{dM_2}{d\mu} & \frac{dN_2}{d\mu} \\ M_3 & N_3 & \frac{dM_3}{d\mu} & \frac{dN_3}{d\mu} \\ M_4 & N_4 & \frac{dM_4}{d\mu} & \frac{dN_4}{d\mu} \end{vmatrix} = 0;$$

Nous la mettrons sous la forme

$$(14) \quad d\mu \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{d(M_1 + N_1)}{d\mu} & \frac{d^2(M_1 + N_1)}{d\mu^2} \\ M_2 & N_2 & \frac{d(M_2 + N_2)}{d\mu} & \frac{d^2(M_2 + N_2)}{d\mu^2} \\ M_3 & N_3 & \frac{d(M_3 + N_3)}{d\mu} & \frac{d^2(M_3 + N_3)}{d\mu^2} \\ M_4 & N_4 & \frac{d(M_4 + N_4)}{d\mu} & \frac{d^2(M_4 + N_4)}{d\mu^2} \end{vmatrix} + 2 \frac{d\nu}{\nu} \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & \frac{dM_1}{d\mu} & \frac{dN_1}{d\mu} \\ M_2 & N_2 & \frac{dM_2}{d\mu} & \frac{dN_2}{d\mu} \\ M_3 & N_3 & \frac{dM_3}{d\mu} & \frac{dN_3}{d\mu} \\ M_4 & N_4 & \frac{dM_4}{d\mu} & \frac{dN_4}{d\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

La recherche des lignes asymptotiques est donc ramenée à une seule quadrature.

Considérons une surface réglée dont les génératrices fassent partie d'un complexe linéaire. Nous avons montré (2) comment on pouvait obtenir immédiatement une ligne asymptotique de cette surface; mais, et c'est là le point important, cette ligne asymptotique rencontrant chaque génératrice en deux points, nous devons la compter pour deux. Par conséquent, la recherche des lignes asymptotiques de toute surface réglée, dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire, dépend d'une quadrature.

Il peut arriver que les génératrices d'une surface réglée appartiennent à une infinité de complexes linéaires. Une ligne asymptotique correspond alors sur la surface à chacun de ces complexes. On a, dans ce cas, toutes les lignes asymptotiques. Les tangentes d'une quelconque de ces courbes appartiennent à un complexe linéaire. On sait que toutes les droites qui font partie d'une congruence rencontrent deux mêmes droites. Sur les surfaces réglées dont nous parlons se trouvent donc deux droites singulières rencontrant toutes les génératrices. La possibilité de trouver les lignes asymptotiques d'une surface réglée possédant deux droites singulières a été signalée pour la première fois par M. Cremona.

11. Je vais appliquer les résultats généraux que je viens d'indiquer à certaines surfaces réglées unicursales.

Je commence par rappeler quelques considérations sur les surfaces unicursales, qui ont été étudiées par M. Clebsch (*Math. Annalen*, 1869).

Soient  $x, y, z, t$  les coordonnées homogènes d'un point de la surface. Nous avons pour cette surface

$$x = f_1(\alpha, \beta, \gamma), \quad y = f_2(\alpha, \beta, \gamma), \quad z = f_3(\alpha, \beta, \gamma), \quad t = f_4(\alpha, \beta, \gamma),$$

égalités où les  $f$  désignent des fonctions entières, homogènes et de degré  $n$  de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . A un point représenté dans un plan en coordonnées homogènes par  $(\alpha, \beta, \gamma)$  correspond sur la surface le point  $(x, y, z, t)$ , et réciproquement, à un point donné sur la surface ne correspond, en général, qu'un point sur ce plan, que M. Clebsch appelle le *plan de la représentation*.

On exprime aisément le degré  $N$  de la surface. Considérons, à cet effet, les courbes planes

$$f_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad f_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad f_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad f_4(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Soient  $x$ , le nombre de leurs points simples communs;  $x_2$  celui de leurs points doubles communs, ...;  $x_K$  celui de leurs points multiples d'ordre  $K$  communs. Je suppose qu'en aucun de ces points les quatre courbes n'aient de branche ayant même tangente. Le degré  $N$  de la surface s'exprime par la formule

$$N = n^2 - x_1 - 4x_2 - \dots - K^2 x_K.$$

Si les quatre courbes  $f$  ont un point multiple d'ordre  $(n-1)$  commun, la surface sera une surface réglée unicursale. Réciproquement, toute surface réglée unicursale peut être obtenue au moyen de quatre courbes ayant un point multiple commun, dont l'ordre est inférieur d'une unité à celui de la courbe.

Nous n'emploierons pas dorénavant, dans le plan de la représentation, les coordonnées homogènes; nous désignerons les axes auxquels nous rapportons les points de ce plan par  $O\lambda$  et  $O\mu$ .

Supposons que le point multiple commun aux quatre courbes soit à l'infini sur l'axe des  $\lambda$ . Les équations des courbes servant à définir la surface auront la forme  $A\lambda + B = 0$ , où  $A$  et  $B$  sont deux polynômes en  $\mu$ .

La surface sera définie par les équations

$$x = \frac{A_1\lambda + B_1}{A\lambda + B}, \quad y = \frac{A_2\lambda + B_2}{A\lambda + B}, \quad z = \frac{A_3\lambda + B_3}{A\lambda + B}.$$

Pour une valeur constante donnée à  $\mu$ , on obtient, en faisant varier  $\lambda$ , une génératrice rectiligne. Nous avons

$$\lambda(Ax - A_1) = B_1 - Bx, \quad \lambda(Ay - A_2) = B_2 - By, \quad \lambda(Az - A_3) = B_3 - Bz,$$

d'où

$$x = \frac{AB_1 - A_1B}{AB_2 - A_1B} z + \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{AB_2 - A_1B}, \quad y = \frac{AB_2 - A_2B}{AB_3 - A_1B} z + \frac{A_1B_3 - A_3B_2}{AB_3 - A_1B}.$$

Les équations d'une droite étant  $x = az + p$ ,  $y = bz + q$ , nous avons écrit l'équation d'un complexe sous la forme

$$La + Mb + N - Qp + Pq - R(aq - bp) = 0.$$

Les génératrices de notre surface réglée appartiendront à un complexe linéaire, si l'on peut trouver des quantités  $L, M, N, P, Q$  et  $R$  telles, que l'on ait identiquement

$$(15) \begin{cases} L(AB_1 - A_1B) + M(AB_2 - A_2B) + N(AB_3 - A_3B) \\ \quad + P(A_1B_2 - A_2B_1) + Q(A_1B_3 - A_3B_2) + R(A_1B_3 - A_3B_2) = 0. \end{cases}$$

12. Parmi les surfaces réglées unicursales, nous rencontrons les surfaces gauches du troisième ordre. Toute surface gauche du troisième ordre est unicursale. Considérons, en effet, une conique tracée sur la surface. Par chacun des points de cette courbe passe une génératrice; comme la conique est une courbe unicursale, il s'ensuit que chaque génératrice est déterminée individuellement.

Toute surface réglée du troisième ordre peut être définie (*Borchardt's Journal*, Band 67) par les équations

$$x = \frac{A_1\lambda + B_1}{A\lambda + B}, \quad y = \frac{A_2\lambda + B_2}{A\lambda + B}, \quad z = \frac{A_3\lambda + B_3}{A\lambda + B},$$

où  $A = a\mu^2 + b\mu + c$ ,  $B = d\mu + e$ ,  $A_1 = a_1\mu^2 + \dots$

Sur le plan de la représentation, c'est-à-dire sur le plan des  $\lambda\mu$ , à une génératrice de la surface correspond une parallèle à l'axe  $O\lambda$ ; nous obtenons, en effet, une génératrice de la surface en donnant à  $\mu$  une valeur constante.

Une surface gauche du troisième ordre a une droite double. Elle

possède en outre une seconde droite singulière qui rencontre toutes les génératrices. Nous obtenons cette droite en faisant  $\lambda = 0$ . Elle correspond, par conséquent, à l'axe  $O\mu$ .

Le premier membre de la relation (15) du n° 11 est ici un polynôme du troisième degré. Nous n'aurons que quatre équations homogènes entre les six quantités  $L, M, N, P, Q$  et  $R$ . Les génératrices de la surface appartiennent donc à une infinité de complexes linéaires. Un des rapports reste arbitraire.

Le fait était d'ailleurs évident *a priori*, car tous les complexes, ayant pour droites conjuguées la droite double et la droite singulière de la surface, répondent à la question. On sait, en effet, que toute droite rencontrant deux droites conjuguées par rapport à un complexe appartient elle-même au complexe.

Cela posé, considérons un des complexes auxquels appartiennent les génératrices de la surface. A ce complexe correspond, sur la surface, une courbe dont il est facile de trouver le degré. Celui-ci est, en effet, égal (3) à la classe d'une section plane quelconque. Or cette section est une courbe du troisième degré ayant un point double. Sa classe est donc égale à quatre. Nous avons donc sur la surface une courbe gauche du quatrième ordre. Cette courbe est une courbe asymptotique de la surface (3). C'est un fait dont on peut se rendre compte ici de la manière suivante : Prenons, en effet, un point quelconque  $A$  de la courbe, et menons le plan polaire de ce point, c'est-à-dire le plan tangent en ce point à la surface. Ce plan coupe la surface suivant la génératrice  $D$  passant en  $A$ , et suivant une conique  $C$  passant aussi par  $A$ . Cherchons les points où la courbe gauche du quatrième ordre rencontre le plan considéré. Ce sont, comme nous l'avons démontré (3), les points de contact des tangentes menées par le foyer  $A$  du plan à la section faite dans la surface par ce plan. Or, si du point  $A$  on mène les tangentes à cette section, trois des quatre tangentes que l'on peut mener, en général, viennent confondre leur point de contact en  $A$ . Le plan a donc en  $A$  trois points de rencontre avec la courbe confondus. Il est osculateur en ce point à la courbe. Le quatrième point d'intersection est le point  $A'$ , second point de la courbe gauche située sur la génératrice  $D$ .

13. Proposons-nous de rechercher l'équation de la courbe qui, dans

le plan  $\lambda\mu$ , représente une de ces courbes du quatrième ordre. Considérons donc un des complexes auxquels appartiennent les génératrices de la surface. Le plan polaire du point  $(x, y, z)$  est

$$(L + Qz - Ry)(X - x) + (M + Rx - Pz)(Y - y) + (N + Py - Qx)(Z - z) = 0.$$

Nous voulons avoir la courbe telle, que le plan polaire de chacun de ses points soit en ce point tangent à la surface. Il nous suffira pour cela d'écrire que ce plan contient la tangente à la courbe décrite par le point  $(x, y, z)$  donné par les formules

$$x = \frac{A_1\lambda + B_1}{A\lambda + B}, \quad y = \frac{A_2\lambda + B_2}{A\lambda + B}, \quad z = \frac{A_3\lambda + B_3}{A\lambda + B},$$

lorsque, laissant  $\lambda$  constant, on fait varier  $\mu$ .

Désignons par  $\delta x, \delta y, \delta z$  les différentielles de  $x, y, z$  prises par rapport à  $\mu$ . Le plan polaire de  $x, y, z$  contenant la tangente à la courbe que nous venons de définir, on aura

$$(L + Qz - Ry)\delta x + (M + Rx - Pz)\delta y + (N + Py - Qx)\delta z = 0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant  $\delta x, \delta y, \delta z$  par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} & (L + Qz - Ry)[(A'_1\lambda + B'_1)(A\lambda + B) - (A'\lambda + B')(A_1\lambda + B_1)] \\ & + (M + Rx - Pz)[(A'_2\lambda + B'_2)(A\lambda + B) - (A'\lambda + B')(A_2\lambda + B_2)] \\ & + (N + Py - Qx)[(A'_3\lambda + B'_3)(A\lambda + B) - (A'\lambda + B')(A_3\lambda + B_3)] = 0. \end{aligned}$$

Si nous substituons à  $x, y$  et  $z$  leurs valeurs, nous avons la relation entre  $\lambda$  et  $\mu$  donnant la ligne de la surface correspondant au complexe défini par  $L, M, N, P, Q$  et  $R$ , ces six quantités satisfaisant, bien entendu, aux quatre équations que l'on obtient, en écrivant que l'équation (15) est identiquement vérifiée.

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & L[(A'_1\lambda + B'_1)(A\lambda + B) - (A'\lambda + B')(A_1\lambda + B_1)] \\ & + M[(A'_2\lambda + B'_2)(A\lambda + B) - (A'\lambda + B')(A_2\lambda + B_2)] \\ & + N[(A'_3\lambda + B'_3)(A\lambda + B) - (A'\lambda + B')(A_3\lambda + B_3)] \\ & + P[(A_2\lambda + B_2)(A'_3\lambda + B'_3) - (A_3\lambda + B_3)(A'_2\lambda + B'_2)] \\ & + Q[(A_3\lambda + B_3)(A'_1\lambda + B'_1) - (A_1\lambda + B_1)(A'_3\lambda + B'_3)] \\ & + R[(A_1\lambda + B_1)(A'_2\lambda + B'_2) - (A_2\lambda + B_2)(A'_1\lambda + B'_1)] = 0. \end{aligned} \right.$$



Cette relation est du quatrième degré en  $\lambda$  et  $\mu$ . On peut l'écrire

$$U\lambda^2 + V\lambda + W = 0;$$

on a

$$U = L(AA'_1 - A_1A') + M(AA'_2 - A_2A') + \dots + R(A_1A'_2 - A_2A'_1).$$

Les  $A$  étant des polynômes du second degré, on voit que  $U$  est aussi un polynôme du second degré en  $\mu$ ,

$$W = L(BB'_1 - B_1B') + \dots + R(B_1B'_2 - B_2B'_1).$$

$B$  étant du premier degré,  $W$  se réduit à une constante.

Enfin

$$V = L(AB'_1 - B'A_1 + BA'_1 - B_1A') + \dots + R(A_1B'_2 - B'_1A_2 + B_1A'_2 - B_2A'_1);$$

or on a identiquement, d'après l'équation (15),

$$L(AB'_1 - B'A_1) + M(AB'_2 - B'A_2) + \dots = -[L(B_1A' - BA'_1) + \dots];$$

par suite, on peut écrire

$$V = 2[L(AB'_1 - B'A_1) + \dots + R(A_1B'_2 - B'_1A_2)].$$

On voit que  $V$  est un polynôme du premier degré en  $\mu$ .

L'équation (16) est du quatrième degré par rapport à  $\lambda$  et  $\mu$ . En changeant  $\lambda$  en  $\frac{1}{\lambda}$ , on obtient une relation qui est seulement du second degré;  $\lambda$  et  $\mu$  peuvent donc s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre. Il s'ensuit que la courbe gauche du quatrième ordre est une courbe unicursale. Les lignes asymptotiques des surfaces gauches du troisième ordre rentrent, par conséquent, dans la famille des courbes unicursales du quatrième ordre, étudiées par M. Appell (*Comptes rendus*, 18 décembre 1876). Chacune de ces lignes possède deux points où le contact de la tangente avec la courbe est du second ordre, ce qui est d'accord avec la formule générale  $N = 2(m - 3)$ , que nous avons donnée (8) comme expression du nombre des points de cette nature pour une courbe unicursale d'ordre  $m$ , dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire.

14. Nous considérerons comme application la surface du troisième ordre donnée par les équations

$$x = \mu\lambda, \quad y = \lambda, \quad z = \mu^2;$$

cette surface du troisième ordre est la surface gauche générale du troisième ordre : nous voulons dire que, par des transformations homographiques convenables, on peut ramener à cette surface une surface gauche quelconque du troisième ordre (CLEBSCH, *Journal de Crelle*, t. 67).

On a ici

$$\begin{aligned} A &= 0, & A_1 &= \mu, & A_2 &= 1, & A_3 &= 0, \\ B &= 1, & B_1 &= 0, & B_2 &= 0, & B_3 &= \mu^2; \end{aligned}$$

l'équation (15) se réduit à

$$-L\mu - M + P\mu^2 - Q\mu^3 = 0;$$

donc

$$L = 0, \quad M = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0,$$

et l'équation (16) devient

$$-R\lambda^2 + 2N\mu = 0;$$

on a donc pour les lignes asymptotiques

$$\lambda^2 = C\mu,$$

C étant une constante arbitraire. Les deux points d'une quelconque des lignes asymptotiques, où la tangente a, avec la courbe, un contact du second ordre, sont situés sur la droite double de la surface. Ce sont l'origine et le point à l'infini sur l'axe Oz. Les deux génératrices, passant en chacun de ces points, sont confondues et sont les génératrices d'inflexion de la surface. Elles sont tangentes à toutes les lignes asymptotiques.

Une génératrice quelconque rencontre en deux points chaque ligne asymptotique. Le milieu de la distance de ces deux points est situé sur Oz. On le reconnaît en considérant les équations d'une ligne asymptotique

$$x = \frac{\lambda^2}{C}, \quad y = \lambda, \quad z = \frac{\lambda^4}{C^2}.$$

Une génératrice  $z = \mu^2, \frac{y}{x} = \mu$  coupe cette courbe en deux points pour lesquels les  $x$  et les  $y$  sont égaux et de signe contraire. On peut donc dire, en remarquant que toutes les génératrices sont parallèles au plan des  $xy$  et que la droite singulière de la surface est à l'infini

dans ce plan, qu'une génératrice quelconque rencontre une ligne asymptotique en deux points conjugués harmoniques par rapport aux points de rencontre de cette génératrice avec la droite double et la droite singulière. Cette propriété, qui se conserve par des transformations homographiques, appartient par suite à toute surface gauche du troisième ordre. Les deux points de rencontre d'une génératrice avec une ligne asymptotique variable forment sur cette droite deux divisions homographiques en involution. Il suit de ce que nous venons de dire que les deux points doubles de cette involution sont les points de rencontre de la génératrice avec la droite double et la droite singulière.

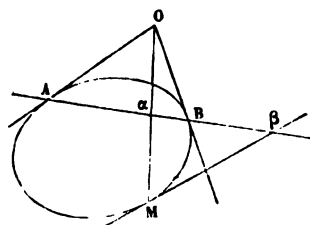
On peut trouver les lignes asymptotiques d'une surface réglée du troisième ordre par les considérations géométriques dont s'est servi M. Darboux (*Bulletin de la Société philomathique*) pour trouver les lignes asymptotiques de la surface de Steiner. On démontre aisément qu'une surface réglée du troisième ordre peut être donnée par les équations

$$x = f_1(\lambda, \mu), \quad y = f_2(\lambda, \mu), \quad z = f_3(\lambda, \mu), \quad t = f_4(\lambda, \mu),$$

où les courbes  $f_i(\lambda, \mu) = 0, \dots$  représentent des coniques passant par un point fixe O, et divisant harmoniquement un segment de droite AB. Cela posé, une section plane quelconque de la surface, qui est donnée par l'équation

$$A f_1(\lambda, \mu) + B f_2(\lambda, \mu) + C f_3(\lambda, \mu) + D f_4(\lambda, \mu) = 0,$$

est représentée par une conique passant en O et partageant harmoniquement AB. Soit M un point quelconque du plan de la représentation.



A ce point correspond un point M' sur la surface. Toutes les sections planes de la surface, passant en M', sont représentées par des coniques

passant en M et en O, et divisant harmoniquement AB. La section de la surface, par le plan tangent en M', aura pour représentation une conique ayant un point double en M. Celle-ci se composera donc de la droite MO et d'une seconde droite M $\beta$  coupant AB en un point  $\beta$  conjugué harmonique par rapport à A et B du point de rencontre  $\alpha$  de MO avec AB. La droite MO correspond à la génératrice passant en M'; M $\beta$  est la représentation de la conique qui complète l'intersection de la surface par le plan tangent. La tangente en M' à cette conique est tangente à la seconde ligne asymptotique passant en M'; donc la représentation de cette ligne asymptotique sera une courbe tangente en M à M $\beta$ . Nous avons donc à chercher des courbes telles que leur tangente en un point quelconque M soit la droite M $\beta$  conjuguée de MO par rapport aux droites MA et MB. On voit que la famille des coniques tangentes en A et B à AO et BO répond à la question. On a donc ainsi immédiatement les lignes asymptotiques de la surface.

15. Passons maintenant aux surfaces réglées unicursales du quatrième ordre ayant pour courbe double une cubique gauche. On peut remarquer que toute surface du quatrième ordre ayant pour courbe double une cubique gauche est nécessairement une surface réglée unicursale. Prenons, en effet, un point quelconque sur la surface. On peut, par ce point, faire passer une sécante double de la cubique gauche : cette droite rencontrant la surface en cinq points est située tout entière sur elle. D'autre part, chaque génératrice est déterminée individuellement, une section plane quelconque de la surface étant une courbe unicursale.

Ces surfaces peuvent être obtenues par les équations (CLEBSCH, *Math. Annalen*, 1870)

$$(17) \quad x = \frac{A_1\lambda + B_1}{A\lambda + B}, \quad y = \frac{A_2\lambda + B_2}{A\lambda + B}, \quad z = \frac{A_3\lambda + B_3}{A\lambda + B},$$

où

$$A = a\mu^2 + b\mu + c, \quad B = d\mu^2 + c\mu + f, \quad A_i = a_i\mu^2 + \dots;$$

chacun des binômes AB, — A, B, ... entrant dans le premier membre de l'égalité (15) est du quatrième degré. Pour que cette égalité soit identiquement satisfaite, nous aurons cinq relations homogènes et

linéaires entre  $L, M, N, P, Q$  et  $R$ . Il y aura une solution et en général une seule. Par suite, il y a en général un complexe et un seul dont font partie les génératrices d'une surface réglée unicursale du quatrième ordre ayant pour courbe double une cubique gauche. Signalons une propriété de la surface résultant immédiatement de ce fait. Il existe sur la surface quatre génératrices parallèles à un plan quelconque. Des deux droites s'appuyant sur ces quatre génératrices, l'une est à l'infini, l'autre est indépendante de la direction du plan. Considérons, en effet, les plans parallèles au plan donné passant par chacune de ces quatre génératrices. Les pôles de ces quatre plans, respectivement situés sur ces génératrices, sont en ligne droite, et celle-ci est le diamètre correspondant à la direction du plan. La seconde droite s'appuyant sur les quatre génératrices est la droite conjuguée de ce diamètre: elle est donc à l'infini. De plus, tous les diamètres étant parallèles, on voit que la première droite a une direction constante, celle de l'axe du complexe.

16. Considérons la courbe de la surface correspondant au complexe dont font partie ses génératrices. Le degré de cette courbe est égal (3) à la classe d'une section plane quelconque de la surface. Or toute section plane est une courbe du quatrième ordre avec trois points doubles (les trois points où elle rencontre la cubique double); elle est donc de la sixième classe. La courbe gauche est par suite du sixième ordre. Cherchons la courbe qui la représente sur le plan des  $\lambda\mu$ . Nous avons vu d'une manière générale (13) que cette équation était

$$L[(A', \lambda + B') (A\lambda + B) - (A'\lambda + B') (A, \lambda + B)] + \dots = 0;$$

$A$  et  $B$  étant ici deux polynômes du second degré, cette relation est du quatrième degré par rapport à  $\lambda$  et à  $\mu$ .

Écrivons cette équation sous la forme

$$U\lambda' + V\lambda + W = 0;$$

on voit que  $U, V$  et  $W$  sont des polynômes du second degré en  $\mu$ .

La courbe représentée par cette équation entre  $\lambda$  et  $\mu$  a deux points doubles, un à l'infini sur l'axe  $O\lambda$  et le second à l'infini sur  $O\mu$ . Elle est donc du genre un. Il en est par suite de même de notre courbe

gauche du sixième ordre. L'équation du second degré en  $\lambda$  permet d'exprimer  $\lambda$  rationnellement au moyen de  $\mu$  et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en  $\mu$ . Nous pouvons donc avoir aisément les coordonnées d'un point quelconque de la courbe gauche du sixième ordre, exprimées rationnellement au moyen d'un paramètre  $\mu$  et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en  $\mu$ , propriété caractéristique des courbes dont le genre est un.

17. La détermination des autres lignes asymptotiques de la surface est ramenée (10) à une quadrature.

Soient  $\lambda'$  et  $\lambda''$  les deux racines de l'équation

$$U\lambda' + V\lambda + W = 0.$$

Nous prendrons, en faisant usage des notations dont nous nous sommes servis précédemment (10),

$$\begin{aligned} M_1 &= A_1\lambda'' + B_1, & N_1 &= A_1\lambda' + B_1, \\ M_2 &= A_2\lambda'' + B_2, & N_2 &= A_2\lambda' + B_2, \\ M_3 &= A_3\lambda'' + B_3, & N_3 &= A_3\lambda' + B_3, \\ M_4 &= A_4\lambda'' + B_4, & N_4 &= A_4\lambda' + B_4. \end{aligned}$$

Reportons-nous à la relation différentielle (14) entre  $\mu$  et  $\nu$ . Le multiplicateur de  $\frac{d\nu}{\nu}$  sera une fonction rationnelle de  $\mu$ , car il est symétrique par rapport à  $\lambda'$  et à  $\lambda''$ ; il ne change pas en effet quand on change  $M$  en  $N$  et inversement.

Quant au multiplicateur de  $d\mu$ , il peut s'écrire

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} M_1 - N_1 & M_1 + N_1 & \frac{d(M_1 + N_1)}{d\mu} & \frac{d^2(M_1 + N_1)}{d\mu^2} \\ M_2 - N_2 & M_2 + N_2 & \frac{d(M_2 + N_2)}{d\mu} & \frac{d^2(M_2 + N_2)}{d\mu^2} \\ M_3 - N_3 & M_3 + N_3 & \frac{d(M_3 + N_3)}{d\mu} & \frac{d^2(M_3 + N_3)}{d\mu^2} \\ M_4 - N_4 & M_4 + N_4 & \frac{d(M_4 + N_4)}{d\mu} & \frac{d^2(M_4 + N_4)}{d\mu^2} \end{vmatrix},$$

en ayant égard à ce que les lignes  $M$  et  $N$  sont des lignes asymptotiques.

Tous les termes des trois dernières colonnes seront évidemment des fonctions rationnelles de  $\mu$ . Nous avons, d'autre part,

$$\begin{aligned} M_1 - N_1 &= A_1(\lambda'' - \lambda'), \\ M_2 - N_2 &= A_2(\lambda'' - \lambda'), \\ M_3 - N_3 &= A_3(\lambda'' - \lambda'), \\ M_4 - N_4 &= A_4(\lambda'' - \lambda'). \end{aligned}$$

Nous aurons donc comme coefficient de  $d\mu$  une fonction rationnelle de  $\mu$ , multipliée par  $(\lambda'' - \lambda')$ , c'est-à-dire une fonction rationnelle de  $\mu$ , multipliée par la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en  $\mu$ . La recherche des lignes asymptotiques sera ramenée, par suite, à une intégrale elliptique.

18. Nous avons démontré qu'en général toutes les génératrices d'une surface réglée unicursale du quatrième ordre, représentée par les équations (17), pouvaient appartenir à un seul complexe linéaire. Mais si l'on suppose vérifiées certaines relations entre les coefficients, les génératrices appartiendront à une infinité de complexes linéaires. Dans ce cas, la surface ne peut avoir pour courbe double une cubique gauche, car, lorsqu'il en est ainsi, un plan quelconque coupe la cubique gauche en trois points, et les plans qui contiennent les couples de génératrices passant par chacun de ces trois points déterminent nécessairement le foyer du plan considéré. Ce foyer étant ainsi déterminé d'une manière unique, les génératrices de la surface ne peuvent appartenir à une infinité de complexes. Il est nécessaire, dans ce cas, que la surface ait une droite triple. Elle possède, en outre, une seconde droite singulière rencontrant toutes les génératrices. En un point quelconque de la droite triple passent trois génératrices qui sont situées dans un même plan, le plan de ce point et de la droite singulière. Nous trouvons dans ce cas, où la surface présente la plus grande analogie avec la surface du troisième ordre, toutes les lignes asymptotiques, qui sont des courbes du sixième ordre, dont le genre est un.

Parmi les surfaces dont les génératrices font partie d'une infinité de complexes linéaires, ou rencontrent toutes deux droites, nous signalerons la classe des surfaces conoïdes. On sait intégrer l'équation des lignes asymptotiques d'un conoïde quelconque. La méthode con-

duit donc sous ce rapport à un résultat connu. Elle donne une propriété des lignes asymptotiques d'un conoïde : ce sont des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.

19. Nous indiquerons maintenant une classe étendue de surfaces réglées algébriques, dont toutes les lignes asymptotiques sont algébriques. Nous nous proposons de former toutes les surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire, et dont toutes les lignes asymptotiques sont algébriques. Considérons un complexe linéaire, et prenons une courbe algébrique quelconque. Soit  $M$  un point de la courbe ; dans le plan osculateur en  $M$  à la courbe se trouve une droite  $MN$  appartenant au complexe. Le lieu de la droite  $MN$  est une surface réglée. Démontrons que toutes ses lignes asymptotiques sont algébriques. Nous voyons d'abord que la courbe dont nous sommes partis est une ligne asymptotique de la surface, puisqu'en chacun de ses points le plan osculateur à la courbe est tangent à la surface. D'autre part nous connaissons sur la surface une seconde ligne asymptotique, puisque toutes les génératrices appartiennent à un complexe linéaire, et, comme nous savons que nous pouvons compter pour deux cette seconde ligne asymptotique, nous connaissons trois lignes asymptotiques de la surface. Nous avons donc toutes les autres sans aucune intégration ; or les trois premières ainsi que la surface étant algébriques, il en est de même de toutes les autres lignes asymptotiques. Nous nous servons pour les obtenir de la propriété relative au rapport anharmonique (9). Soient, sur la génératrice  $MN$ ,  $A$  et  $B$  les deux points où le plan polaire et le plan tangent à la surface coïncident. Nous obtiendrons sur chaque génératrice un point d'une ligne asymptotique, en écrivant que le rapport anharmonique des quatre points  $P, A, B, M$  a une valeur constante  $C$ . On voit ainsi qu'il y aura sur chaque génératrice deux points d'une même ligne asymptotique, car on ne peut pas distinguer  $A$  de  $B$ . Nous pouvons donc dire que toutes les lignes asymptotiques de la surface sont algébriques et rencontrées en deux points par une génératrice quelconque, sauf toutefois la ligne dont nous sommes partis, qui ne sera rencontrée en général qu'en un seul point. On voit, sans qu'il soit nécessaire d'insister, que, réciproquement, toute surface réglée dont les génératrices font partie d'un



complexe linéaire, et dont les lignes asymptotiques sont algébriques, admet le mode précédent de génération.

20. Nous allons maintenant chercher les surfaces dont les normales font partie d'un complexe linéaire. Cette recherche est un problème de Calcul intégral, qui revient à l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles. Nous nous proposons de montrer ici comment des considérations géométriques peuvent mener au résultat.

Traisons d'abord le problème suivant : *Un complexe linéaire étant donné, trouver les courbes telles, que le plan correspondant à chaque point de la courbe soit normal à celle-ci.*

Prenons pour axe des  $z$  l'axe du complexe. Les équations des droites ayant la forme normale, l'équation du complexe est  $aq - bp = k$ .

Le plan correspondant au point  $x, y, z$  a pour équation

$$-(X-x)y + (Y-y)x + h(Z-z) = 0;$$

on aura donc pour tous les points de la courbe cherchée

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{k},$$

c'est-à-dire,  $a$  étant une constante ainsi que  $C$ ,

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z + C = k \arcsin \frac{y}{a}.$$

Toutes ces courbes sont des hélices tracées sur des cylindres de révolution ayant pour axe l'axe du complexe, et dont le pas est constant.

Cela posé, considérons deux surfaces dont les normales font partie d'un même complexe. Soit  $M$  un point de leur courbe d'intersection. Menons les normales  $MN, MN'$  à ces deux surfaces. Ces deux droites font partie du complexe. Le plan  $MNN'$  a donc pour pôle dans ce complexe le point  $M$ . Or ce plan est normal à la courbe d'intersection des surfaces, puisque les droites  $MM$  et  $MN'$  sont évidemment normales à cette courbe : donc, en chaque point de celle-ci, le plan correspondant lui est normal ; par conséquent la courbe d'intersection ne peut être qu'une ou plusieurs hélices correspondant au complexe. Nous remarquerons que le raisonnement précédent se trouverait en défaut si la

courbe  $C$  d'intersection était une courbe de contact des deux surfaces; car alors, les deux normales  $MN$  et  $MN'$  coïncidant, on ne pourrait plus dire que le plan correspondant à  $M$  est normal à la courbe.

Les surfaces les plus simples que nous puissions trouver, dont les normales font partie d'un complexe linéaire donné, sont les cylindres de révolution ayant pour axe l'axe du complexe. Considérons une surface dont les normales fassent partie de ce complexe, et cherchons son intersection avec un quelconque de ces cylindres. Cette intersection est une hélice d'après ce que nous venons de dire.

21. Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante : *Pour que les normales d'une surface appartiennent toutes à un complexe linéaire, il faut et il suffit que cette surface soit une surface hélicoïde.*

Démontrons d'abord que la condition est suffisante. Nous prenons donc une surface hélicoïde. Toutes les hélices tracées sur cette surface ont même pas; il existe, par suite, un complexe linéaire ayant pour axe l'axe de l'hélicoïde, dans lequel le plan correspondant à chaque point de la surface est normal à l'hélice passant par ce point. Toutes les normales de la surface appartiennent à ce complexe. En effet, la normale en un point quelconque de la surface, étant normale à l'hélice de la surface passant par ce point, est située dans le plan normal à cette hélice; elle passe de plus par le foyer de ce plan, qui est le point considéré : c'est donc une droite du complexe.

En second lieu, la condition est nécessaire. Prenons, en effet, une surface dont les normales appartiennent à un complexe linéaire. Nous avons dit qu'un cylindre quelconque de révolution ayant pour axe l'axe du complexe coupait cette surface suivant une ou plusieurs hélices. Par chaque point de la surface nous pouvons alors faire passer une hélice, et toutes les hélices ainsi obtenues ont même pas. Par l'axe du complexe faisons passer un plan quelconque. La section de ce plan dans la surface est le lieu des deux points de rencontre du plan avec toutes les hélices tracées sur la surface. Il est clair que la forme de la section et sa position dans son plan par rapport à l'axe du complexe sont indépendantes de la position de ce plan, puisque toutes les hélices ont même pas. On peut donc considérer la surface comme engendrée par le mouvement d'un profil plan de forme invariable, dont le plan passe

constamment par l'axe du complexe et dont tous les points décrivent des hélices correspondant au complexe. Le théorème est par suite démontré.

**22.** Cherchons les courbes de cette surface dont les tangentes font partie du complexe auquel appartiennent les normales de la surface : ces lignes sont des lignes géodésiques de la surface. Le plan correspondant en chacun de leur point est en effet le plan osculateur à la courbe, et il contient la normale à la surface, puisque cette droite appartient au complexe. Mais cette propriété ne caractérise pas les lignes dont nous parlons. En voici une autre qui les définira nettement. Prenons un point M d'une de ces lignes C. Par ce point on peut faire passer une hélice située sur la surface. La tangente en M à cette hélice est perpendiculaire à toutes les droites du complexe passant par M et notamment à la tangente en M à la courbe C. Donc les lignes de la surface hélicoïde dont les tangentes appartiennent au complexe linéaire correspondant à la surface sont les trajectoires orthogonales de la famille d'hélices de même pas tracées sur la surface.

On sait que toute surface hélicoïde est applicable sur une surface de révolution dont le méridien est convenablement choisi. Dans cette déformation, les hélices de la surface hélicoïde deviennent des parallèles de la surface de révolution. Cherchons ce que deviennent sur cette surface les courbes dont nous venons de parler. L'angle de deux lignes tracées sur une surface se conserve quand on la déforme. Les courbes précédentes deviendront donc sur la surface de révolution les trajectoires orthogonales des parallèles, c'est-à-dire les méridiens. Ainsi les méridiens de la surface de révolution sur laquelle est applicable la surface hélicoïde deviennent sur celle-ci des courbes dont les tangentes font partie du complexe linéaire correspondant à l'hélicoïde.

De la propriété caractéristique des surfaces hélicoïdes on peut déduire que toutes les normales menées par un point quelconque à une de ces surfaces sont dans un même plan.

**23.** Nous terminerons en donnant quelques propriétés des surfaces, dont un des systèmes de lignes de courbure est circulaire, c'est-à-dire des surfaces enveloppes d'une série de sphères dépendant d'un paramètre arbitraire.

Nous avons démontré (9) que, dans toute surface réglée, une génératrice quelconque rencontre quatre lignes asymptotiques données sur la surface en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Considérons maintenant, sur une surface dont un des systèmes de lignes de courbure est circulaire, quatre lignes de courbure de l'autre système; un quelconque des cercles du premier système rencontre ces quatre lignes en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. On sait qu'on appelle *rapport anharmonique de quatre points sur un cercle* celui du faisceau des quatre droites joignant ces points à un point quelconque de ce cercle.

Soit

$$(1) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0$$

l'équation de la sphère dont la surface est l'enveloppe;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $R$  sont des fonctions données quelconques d'un paramètre  $t$ . La caractéristique, qui est, comme on sait, une ligne de courbure de la surface, est définie par l'équation (1) et par l'équation (2)

$$(2) \quad (x-a) \frac{da}{dt} + (y-b) \frac{db}{dt} + (z-c) \frac{dc}{dt} + R \frac{dR}{dt} = 0.$$

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  les coordonnées d'un point de la surface; les équations de la normale en ce point à la surface sont

$$\frac{X-x}{x-a} = \frac{Y-y}{y-b} = \frac{Z-z}{z-c}$$

ou

$$X = Z \frac{x-a}{z-c} + \frac{az-cx}{z-c}, \quad Y = Z \frac{y-b}{z-c} + \frac{bz-cy}{z-c}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure sera donc

$$d\left(\frac{x-a}{z-c}\right) d\left(\frac{bz-cy}{z-c}\right) - d\left(\frac{y-b}{z-c}\right) d\left(\frac{az-cx}{z-c}\right) = 0$$

ou

$$(3) \quad \begin{cases} da[(z-c)d(y-b) - (y-b)d(z-c)] \\ + db[(x-a)d(z-c) - (z-c)d(x-a)] \\ + dc[(y-b)d(x-a) - (x-a)d(y-b)] \end{cases} = 0.$$

Cette équation, jointe aux équations (1) et (2), définit en fonction

du paramètre  $t$  les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  d'un point d'une ligne de courbure.

Prenons, pour fixer la position d'un point du cercle défini par les équations (1) et (2), l'angle que fait le rayon passant par ce point avec une direction quelconque du plan du cercle. Nous choisissons, pour cette direction, la droite du plan du cercle parallèle au plan des  $xy$ .

Soit  $Ax + By + Cz = 0$  l'équation d'un plan, et considérons dans ce plan un cercle de rayon  $r$ , ayant l'origine pour centre. Si  $x$ ,  $y$  et  $z$  désignent les coordonnées d'un point du cercle, et  $\theta$  l'angle que fait le rayon passant par ce point avec la droite du plan du cercle, située dans le plan des  $xy$ , on a

$$\begin{aligned} x &= -\frac{ACr \sin \theta}{\sqrt{(A^2 + B^2)(A^2 + B^2 + C^2)}} + \frac{Br \cos \theta}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ y &= -\frac{BCr \sin \theta}{\sqrt{(A^2 + B^2)(A^2 + B^2 + C^2)}} - \frac{Ar \cos \theta}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ z &= \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2 + C^2}} r \sin \theta. \end{aligned}$$

Dans notre problème, les coordonnées du centre défini par les équations (1) et (2) sont

$$x = a - \frac{R dR da}{da^2 + db^2 + dc^2}, \quad y = b - \frac{R dR db}{da^2 + db^2 + dc^2}, \quad z = c - \frac{R dR dc}{da^2 + db^2 + dc^2};$$

le rayon  $r$  du cercle est donné par la formule

$$r^2 = R^2 - \frac{R^2 dR^2}{da^2 + db^2 + dc^2};$$

enfin on a

$$A = da, \quad B = db, \quad C = dc;$$

donc les coordonnées d'un point du cercle (1), (2) peuvent s'exprimer par les formules

$$\begin{aligned} x &= a - \frac{R dR da}{da^2 + db^2 + dc^2} - \frac{da dc \cdot r \sin \theta}{\sqrt{(da^2 + db^2)(da^2 + db^2 + dc^2)}} + \frac{db \cdot r \cos \theta}{\sqrt{da^2 + db^2}}, \\ y &= b - \frac{R dR db}{da^2 + db^2 + dc^2} - \frac{db dc \cdot r \sin \theta}{\sqrt{(da^2 + db^2)(da^2 + db^2 + dc^2)}} - \frac{da \cdot r \cos \theta}{\sqrt{da^2 + db^2}}, \\ z &= c - \frac{R dR dc}{da^2 + db^2 + dc^2} + \sqrt{\frac{da^2 + db^2}{da^2 + db^2 + dc^2}} r \sin \theta. \end{aligned}$$

En remplaçant, dans l'équation (3),  $x$ ,  $y$  et  $z$  par ces valeurs, on obtient une équation différentielle entre  $\theta$  et  $t$ , qui est l'équation différentielle des lignes de courbure. Après de nombreuses réductions, qui s'offrent d'elles-mêmes, cette équation prend la forme

$$(4) \quad M \frac{d\theta}{dt} + N \sin \theta + P \cos \theta + Q = 0.$$

$M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$  sont des fonctions de  $t$ .

Prenons  $\tan \frac{\theta}{2}$  au lieu de  $\theta$  pour fonction inconnue.

Soit  $\tan \frac{\theta}{2} = u$ , on a

$$\sin \theta = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

L'équation (4) devient alors

$$2M \frac{du}{dt} + 2Nu + P(1-u^2) + Q(1+u^2) = 0.$$

C'est une équation de Riccati.

Par conséquent, d'après le théorème du n° 9, le rapport anharmonique de quatre solutions ne dépend pas de  $t$ . Soient  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$  quatre solutions; le rapport anharmonique de  $\tan \frac{\theta_1}{2}$ ,  $\tan \frac{\theta_2}{2}$ ,  $\tan \frac{\theta_3}{2}$  et  $\tan \frac{\theta_4}{2}$  est constant, c'est-à-dire

$$\frac{\tan \frac{\theta_1}{2} - \tan \frac{\theta_3}{2}}{\tan \frac{\theta_1}{2} - \tan \frac{\theta_4}{2}} : \frac{\tan \frac{\theta_2}{2} - \tan \frac{\theta_3}{2}}{\tan \frac{\theta_2}{2} - \tan \frac{\theta_4}{2}} = \text{const.}$$

ou

$$\frac{\sin \frac{\theta_1 - \theta_3}{2}}{\sin \frac{\theta_1 - \theta_4}{2}} : \frac{\sin \frac{\theta_2 - \theta_3}{2}}{\sin \frac{\theta_2 - \theta_4}{2}} = \text{const.}$$

Cette dernière égalité exprime le théorème que nous avons énoncé; car le premier membre est le rapport anharmonique de quatre points situés sur un cercle, tels que les rayons passant par ces points fassent

respectivement des angles égaux à  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  avec une même direction.

24. De ce théorème résultent les mêmes conséquences que celles qui ont été signalées pour la recherche des lignes asymptotiques des surfaces réglées.

La connaissance d'une ligne de courbure ramènera la recherche des autres à deux quadratures. Si l'on connaît deux lignes de courbures, on pourra obtenir les autres par une seule quadrature. Enfin la connaissance de trois lignes de courbure permet d'obtenir les autres sans aucune intégration.

Il existe une classe de surfaces ayant un système de lignes de courbure circulaires dont on connaît *a priori* une ligne de courbure du second système. Ce sont les surfaces enveloppes d'une série de sphères coupant une sphère fixe sous un angle constant. Il y a plus : la connaissance de cette ligne de courbure équivaut à deux, car elle coupe chacun des cercles du premier système en deux points; donc, dans ces surfaces, la recherche des lignes de courbure du second système est ramenée à une quadrature. On voit l'analogie qui se présente entre ces surfaces et les surfaces réglées dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire. Considérons d'abord une surface enveloppe d'une série de sphères coupant un plan donné sous un angle constant. L'enveloppe des cercles suivant lesquels la sphère mobile coupe le plan est une ligne de courbure de la surface. Cette ligne est, en effet, une ligne de courbure pour le plan : celui-ci d'ailleurs coupe la surface sous un angle constant. La ligne considérée est donc aussi une ligne de courbure pour la surface, d'après un théorème dû à Joachimstal. On voit, en outre, que chacun des cercles du premier système rencontre en deux points cette ligne de courbure.

Le raisonnement est identique dans le cas où, au lieu d'un plan fixe, on a une sphère. L'enveloppe des cercles de cette sphère, suivant lesquels la coupe la sphère mobile, est une ligne de courbure de la surface, que rencontre en deux points chaque cercle du premier système.

Nous avons considéré des surfaces dont les génératrices faisaient partie de deux et par suite d'une infinité de complexes linéaires. Nous obtiendrons ici des surfaces analogues en prenant des surfaces

enveloppes d'une série de sphères coupant deux sphères données sous des angles constants. Toutes les sphères qui coupent deux sphères données sous des angles constants coupent également, sous un angle constant, une sphère quelconque passant par l'intersection des deux premières. Cela nous montre que nous pourrions considérer d'une infinité de manières notre surface comme l'enveloppe d'une série de sphères coupant une sphère donnée sous un angle constant. Nous pourrions donc avoir immédiatement toutes les lignes de courbure du second système de cette surface. Ces lignes seront des courbes sphériques situées sur des sphères passant par l'intersection des deux premières sphères. Chaque ligne de courbure du second système rencontre en deux points les cercles de courbure du premier, et deux lignes de courbure du second système sont rencontrées par un cercle quelconque du premier système en quatre points, dont le rapport anharmonique est constant.

---



---

# RECHERCHES

SUR

## LA DISPERSION ANOMALE,

PAR M. A. HURION,  
AGRÉGÉ-PRÉPARATEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

---

### HISTORIQUE.

Le premier phénomène de dispersion anormale, c'est-à-dire de distribution irrégulière des couleurs dans le spectre, a été signalé par M. Le Roux (<sup>1</sup>), dans ses *Recherches sur les indices de réfraction des vapeurs*.

Il observait, à l'aide d'une lunette astronomique, munie d'un micromètre oculaire, l'image de la fente d'un collimateur, après avoir interposé entre les deux un prisme creux d'un angle considérable. Ce prisme, en porcelaine, fermé par des glaces, était placé dans une enceinte chauffée; l'intérieur, en libre communication avec l'atmosphère, contenait des morceaux d'iode qui se réduisaient en vapeur. Dans ces conditions, l'image de la fente lumineuse paraissait composée de deux parties, l'une bleue et l'autre rouge; cette dernière était la plus déviée, contrairement à ce que l'on observe d'ordinaire. Un prisme de verre donnant une déviation de 11' environ permettait d'achromatiser sensiblement l'image. Ce prisme devait être disposé de façon que sa déviation propre vint s'ajouter à la déviation primitive, qui était, elle aussi, voisine de 11'.

---

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LV, p. 126; 1862.

En éclairant la fente avec de la lumière rouge, puis avec de la lumière bleue, on voyait l'image rouge et l'image bleue se produire à des endroits différents. La dispersion produisait un écart de 30" environ entre les deux images; pour l'air, dans les mêmes conditions, l'écart était à peine de quelques secondes.

Bien qu'il eût déjà déterminé l'indice de réfraction de certaines vapeurs <sup>(1)</sup>, M. Le Roux ne paraît pas s'être préoccupé de mesurer celui de la vapeur d'iode.

Les travaux postérieurs relatifs à la dispersion anormale ont porté surtout sur les dissolutions peu transparentes, et se sont faits à l'étranger. Ils ont été résumés, en grande partie, par M. Bertin <sup>(2)</sup>.

M. Christiansen <sup>(3)</sup>, à la suite d'études sur la réflexion totale, au contact du verre et d'une solution alcoolique de fuchsine, a été conduit à la mesure des indices de cette dissolution. Le procédé employé par lui n'est autre que la méthode ordinaire de la déviation minima; mais l'opacité du liquide l'a forcé à prendre pour prisme deux lames de verre, maintenues au contact par l'un de leurs bords, tandis qu'une vis permet d'écarter les deux autres. Le liquide se porte vers l'arête, par suite de la capillarité, et l'on observe le spectre à la manière ordinaire. Ce spectre se réduit à deux portions, rouge et violette, séparées par une bande d'absorption. L'indice a été déterminé plusieurs fois pour chaque dissolution, en faisant varier l'angle du prisme de 1°36' à 4°22'. L'auteur a mesuré le plus exactement possible l'indice de la raie H, et a déterminé ensuite la différence entre cet indice et celui de chacune des autres raies. Les valeurs de ces différences, pour une même solution, varient avec l'angle du prisme employé.

La variation des nombres est en moyenne d'une unité du second ordre décimal, ce qui correspond à une erreur relative de  $\frac{1}{10}$ .

Pour une solution alcoolique contenant 18,8 pour 100 de fuchsine, les valeurs moyennes sont données dans le tableau suivant :

---

<sup>(1)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LXI, p. 345; 1861.

<sup>(2)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. XXV, p. 400; 1872.

<sup>(3)</sup> *Annales de Poggendorff*, t. CXLIII, p. 250; 1871.

Nom des raies.	$n - n_{\infty}$ .	$n$ .	Indices de l'alcool.
B. ....	+ 0,138	1,450	1,363
C. ....	+ 0,190	1,502	"
D. ....	+ 0,249	1,561	1,365
D $\frac{1}{2}$ E. ....	+ 0,178	1,490	"
F. ....	+ 0,000	1,312	1,370
F $\frac{1}{2}$ G. ....	- 0,027	1,285	1,373
H. ....	"	1,312	1,376

On voit, par ce tableau, que tous les indices sont plus grands que celui de la raie H, excepté l'indice de la raie G; il y a donc anomalie complète.

A la fin de son Mémoire, M. Christiansen indique une méthode de mesure, sur laquelle j'aurai à revenir, et qui consiste à déterminer l'angle de réflexion totale quand la lumière passe du verre dans une couche liquide très-mince. D'ailleurs il ne cite aucun des nombres obtenus par ce procédé.

Dans une série d'études sur la dispersion anormale, M. Kundt (<sup>1</sup>) a découvert beaucoup de substances présentant un spectre irrégulier. Il remarque que, dans la réflexion de la lumière, l'angle de polarisation ou, plus généralement, l'incidence principale, sont des fonctions de l'indice déterminées par les formules de Brewster ou de Cauchy. Pour les corps transparents, cet angle croît régulièrement du rouge au violet, ainsi que l'indice; pour les métaux, la variation est de sens contraire, comme l'ont montré les expériences de M. Jamin (<sup>2</sup>); mais on ne peut songer à en déterminer les indices. Cependant certains corps, dits à *couleur superficielle*, présentent une transparence assez grande, tout en étant doués de la réflexion métallique; et les expériences de M. Van der Villigen (<sup>3</sup>) sur l'indigo montrent que l'incidence principale ne varie pas d'une façon régulière. C'est donc dans ces corps à couleur superficielle qu'il y a chance de rencontrer la dispersion anormale.

Guidé par ces idées, M. Kundt a fait plusieurs expériences en employant la méthode du prisme. Une goutte d'une solution, très-concen-

(<sup>1</sup>) *Annales de Poggendorff*, t. CXLII, p. 163 (1871); t. CXLIII, p. 149, 259 (1871); t. CXLIV, p. 128 (1871); t. CXLV, p. 67, 164 (1872).

(<sup>2</sup>) *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXII, p. 311; 1848.

(<sup>3</sup>) *Annales de Poggendorff*, t. CVII, p. 464.

trée, d'une substance colorante était placée sur une lame de verre contre laquelle on appuyait le biseau d'une seconde lame. La partie transparente était située près du sommet et l'on observait le spectre à la manière ordinaire. C'est ainsi que l'auteur a trouvé la dispersion anormale dans la fuchsine, le permanganate de potasse, la cyanine et plusieurs autres substances.

Les déterminations numériques ont été faites par un procédé un peu différent. On rendait horizontale la fente du collimateur d'un goniomètre et l'on tendait en avant un cheveu vertical. On fixait contre l'objectif de la lunette un prisme de flint dont l'arête était horizontale; dans ces conditions, on voyait un spectre vertical présentant, outre les raies de Fraunhofer, une bande verticale formée par l'ombre du cheveu.

La lunette était douée d'un mouvement dans le plan vertical, ce qui permettait de faire coïncider le fil horizontal du réticule avec l'une des raies de Fraunhofer; on pouvait d'ailleurs pointer, comme d'habitude, l'ombre verticale du cheveu. On plaçait alors sur la plate-forme du goniomètre un prisme à liquide; le spectre devenait oblique, comme dans l'expérience des prismes croisés de Newton, mais les raies de Fraunhofer restaient horizontales, l'ombre du cheveu prenant seule une forme courbe. La quantité dont il fallait faire tourner la lunette, pour amener la coïncidence du point de croisement des fils du réticule avec l'intersection de l'ombre du cheveu et de la raie de Fraunhofer, mesurait la déviation produite par le prisme à liquide. Il n'y avait plus dès lors qu'à déterminer la déviation minima pour chaque raie, pour en déduire l'indice correspondant.

Les expériences sont résumées dans le tableau suivant :

Nom des raies.	Alcool.	Cyanine		Fuchsine		Permanganate de potasse
		1,22 p. 100.	concentrée.	presque concentrée.	plus concentrée.	presque concentré
A. ....	»	1,3666	1,3732	1,3818	»	1,3377
B. ....	1,3642	1,3691	1,3781	1,3873	1,3898	1,3397
C. ....	1,3649	1,3714	1,3831	1,3918	1,3939	1,3408
D. ....	1,3667	»	»	1,3982	»	1,3442
E. ....	1,3692	1,3666	1,3658	»	»	1,3452
F. ....	1,3712	1,3713	1,3705	1,3613	»	1,3420
G. ....	1,3750	1,3757	1,3779	1,3668	»	1,3477
H. ....	»	1,3793	1,3821	1,3759	1,3783	1,3521

Les indices qui manquent correspondent à des bandes d'absorption.

et les nombres précédents montrent qu'il y a une variation brusque de l'indice dans le voisinage de ces bandes. M. Kundt estime que, par suite des variations de température qui se produisent pendant l'expérience, on ne peut espérer pousser l'approximation au delà de deux unités du quatrième ordre décimal.

Les indices trouvés pour la fuchsine indiquent que le sens du phénomène est bien le même que dans les expériences de M. Christiansen; mais la valeur de la dispersion est beaucoup plus faible. D'après M. Kundt, la valeur du quotient  $\frac{\Delta n}{n-1}$  correspondant à la raie B, en prenant pour  $n$  l'indice de la raie H, serait de  $\frac{19}{34}$  pour la solution la plus concentrée, tandis que, d'après les nombres de M. Christiansen, elle serait voisine de  $\frac{1}{2}$ . M. Kundt attribue ces divergences à une différence de composition entre les fuchsines employées.

Quant à la variation rapide de l'indice, dans le voisinage des bandes d'absorption, l'auteur l'explique de la façon suivante :

L'observation montre que les corps présentent un coefficient d'absorption notable pour les rayons qu'ils réfléchissent en de fortes proportions. D'autre part, l'intensité de la lumière réfléchie normalement se trouve exprimée, d'après Fresnel, par la formule

$$I = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2.$$

Le maximum de  $I$  correspond au maximum de  $n$  si l'on a  $n > 1$ , et au minimum de  $n$  si l'on a  $n < 1$ ; d'après cela, l'indice des rayons fortement réfléchis, c'est-à-dire de ceux qui correspondent aux bandes d'absorption, doit être très-grand ou très-petit. M. Kundt a essayé de voir si l'ordre habituel des couleurs des anneaux de Newton serait altéré en introduisant une goutte de la solution colorée entre les deux verres producteurs du système d'anneaux. Le résultat de l'expérience a été négatif. D'ailleurs, en calculant, pour les raies du spectre, d'après la formule connue et les nombres précédemment donnés, les épaisseurs correspondant à un anneau de même ordre, on trouve que l'ordre de succession n'est pas interverti, ainsi que l'indique l'expérience.

M. Soret (') s'est également occupé de la dispersion anormale et a

---

(') *Annales de Gêveve*, t. XL, p. 282; 1871.

cherché à annuler la dispersion propre du dissolvant par un dispositif spécial. Il plaçait le prisme à liquide dans une cuve à faces parallèles, remplie par le dissolvant, et observait le spectre ainsi obtenu. Cet artifice permettait de voir la dispersion anormale dans des solutions de concentration moyenne qui, dans l'air, présentaient un spectre normal. Toutefois, suivant une remarque très-juste de M. Bertin, l'expérience, faite dans ces conditions, n'est pas concluante. Le prisme à liquide peut être considéré comme formé de deux autres : l'un, d'angle très-petit, contenant de la fuchsine par exemple, et l'autre, d'angle notable, contenant de l'alcool. Quand on vient à plonger ce prisme dans une cuve à faces parallèles, c'est comme si l'on disposait en sens inverse deux prismes de même angle renfermant l'un de l'alcool, l'autre de la fuchsine, et dès lors on peut avoir la dispersion anormale, même avec deux prismes de verre donnant chacun un spectre régulier.

On ne trouve dans le Mémoire de M. Soret aucune détermination numérique relative aux indices de réfraction des corps qu'il a étudiés.

Toutes les expériences rapportées jusqu'ici n'ont point paru suffisamment démonstratives à M. Von Lang <sup>(1)</sup>; ce physicien n'a pu réussir à voir la dispersion anormale des solutions alcooliques de fuchsine et de cyanine en employant la méthode du prisme. Il paraît vraisemblable que les solutions étudiées par lui n'étaient pas assez concentrées; mais il est bon d'insister sur certaines remarques qu'il a faites. Il a observé que la dispersion paraissait anormale ou régulière suivant la position de l'œil; dès lors il attribue à un défaut d'achromatisme de cet organe les apparences observées par MM. Kundt et Christiansen. De fait, dans les observations de ce genre, si l'on n'a pas le soin d'utiliser les parties centrales de l'oculaire et de l'œil, on est exposé à commettre des erreurs. Cette remarque avait déjà été faite par M. Le Roux <sup>(2)</sup>, qui conseille de pointer les images et de s'assurer que le réticule reste bien en coïncidence avec l'image quand on déplace l'œil, avant de se prononcer sur le sens du phénomène. En prenant toutes ces précautions, on arrive en effet à des résultats certains.

Dans toutes les recherches précédentes, on a mesuré directement

<sup>(1)</sup> *Annales de Poggendorf*, t. CXLIII, p. 269; 1871.

<sup>(2)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LXVI, p. 173; 1862.

les indices, mais certains observateurs ont essayé de calculer ces mêmes nombres à l'aide d'autres données expérimentales. C'est ainsi que M. Lundquist <sup>(1)</sup> a étudié la réflexion de la lumière sur une couche de fuchsine obtenue en déposant, sur la face hypoténuse d'un prisme de crown rectangle et isoscèle, une solution concentrée d'acétate de rosaniline mélangé d'un peu d'arsénite de la même base. Le rapport des amplitudes, des composantes principales d'un rayon primitivement polarisé et la différence de phase de ces mêmes composantes ont été déterminés par la méthode de M. Jamin <sup>(2)</sup>. Les formules de la réflexion vitreuse représentent bien les expériences pour les raies B et C; quant aux rayons d'une autre couleur, ils subissent la réflexion métallique et il faut recourir aux formules de Cauchy. On peut, à l'aide de ces formules, calculer les indices de la fuchsine par rapport au crown et sous l'incidence normale pour les différentes raies. Le résultat de ce calcul indique un accroissement considérable de l'indice, dans le voisinage de la raie D, conformément à ce que donne l'observation directe.

On trouve également, dans un travail de M. Eilhardt Wiedemann <sup>(3)</sup>, sur la polarisation elliptique de la lumière, des déterminations des indices de réfraction de la fuchsine solide. Ce physicien a étudié la réflexion sur une couche de fuchsine obtenue par évaporation d'une solution alcoolique déposée sur une lame de verre. La méthode expérimentale <sup>(4)</sup> n'est qu'une modification de la méthode du mica, d'un quart d'onde, déjà employée par de Senarmont. Les indices sont calculés en prenant, pour leurs valeurs numériques, la tangente de l'angle d'incidence pour lequel la différence de marche des deux composantes principales du rayon elliptique est égale à un quart de longueur d'onde. Les valeurs trouvées sont les suivantes :

*Indices de la fuchsine solide.*

Raies.	Indices.
C.....	2,251
E.....	1,327

<sup>(1)</sup> *Mémoire sur la réflexion de la lumière*, présenté à la Société royale des Sciences d'Upsal, le 6 décembre 1873, et *Journal de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. III, p. 352.

<sup>(2)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXIX, p. 263; 1850.

<sup>(3)</sup> *Annales de Poggendorff*, t. CLI, p. 1 (1874), et *Journal de Physique*, t. IV, p. 20.

<sup>(4)</sup> *Journal de Physique*, t. IV, p. 240.

Ces nombres indiquent une dispersion anormale considérable.

D'autres physiciens, MM. Mach et Osnobischin<sup>(1)</sup>, ont cherché à mettre en évidence la dispersion anormale au moyen de franges d'interférences. Ils ont employé, pour produire les franges, deux fentes verticales, dont l'une était recouverte d'une mince couche de fuchsine. En diminuant convenablement la largeur de l'autre fente, on arrivait à rendre égales les intensités des deux faisceaux et les franges apparaissaient, sans offrir d'abord rien de particulier. On les examinait alors à travers un prisme dont les arêtes étaient perpendiculaires aux franges. Dans les conditions habituelles et avec ce dispositif, on obtient un spectre traversé par des bandes noires, qui s'épanouissent en éventail du violet au rouge; cela tient à ce qu'une frange noire, d'ordre déterminé, est plus rapprochée de l'axe du phénomène pour le violet que pour le rouge, et que, d'autre part, le prisme dévie plus le violet que le rouge. Mais, quand on répète l'expérience, après avoir couvert l'une des fentes d'une mince couche de fuchsine, les bandes noires paraissent courbées en S, indiquant, ainsi que dans les franges, que l'ordre de succession des couleurs n'est pas régulier; cette irrégularité ne peut provenir que d'un déplacement anormal de la frange centrale pour les différentes couleurs ou, en d'autres termes, de la dispersion anormale de la fuchsine.

Les auteurs ont d'ailleurs varié le mode de production des franges en opérant avec de la lumière polarisée et les demi-lentilles de M. Billet ou les lames épaisses de M. Jamin.

Des expériences d'un autre genre ont été faites par M. Wernicke<sup>(2)</sup>; ce physicien admet que l'absorption de la lumière par un milieu peu transparent est représentée par la formule

$$A = A_0 K^d,$$

A,  $A_0$  et K étant des constantes dont la dernière est inférieure à l'unité et  $d$  l'épaisseur traversée.

Il emploie un spectroscope à double fente; l'une de largeur variable  $b'$ , l'autre de largeur fixe  $b$ ; des couches absorbantes, d'épaisseur  $d$  et

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Vienne*, 1<sup>er</sup> semestre 1875, et *Journal de Physique*, t. V, p. 34.

(<sup>2</sup>) *Annales de Poggendorff*, t. CLV, p. 17 (1875), et *Journal de Physique*, t. IV, p. 314.



$d'$ , sont placées normalement sur le trajet des faisceaux lumineux issus des deux fentes, et l'on règle la fente variable de manière à amener l'égalité d'intensité des deux faisceaux. Soit alors  $b_0$  la largeur de fente mobile; on a la relation

$$b A, K^d = b, A, K^{d'} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{b_0} = K^{d'-d}.$$

On incline alors les deux couches absorbantes d'un angle  $i$  et l'on ramène les intensités à être les mêmes; soit  $b_1$  la nouvelle largeur de la fente variable, on a

$$\frac{b}{b_1} = K^{\frac{d'-d}{\cos r}},$$

$r$  désignant l'angle de réfraction correspondant à l'incidence  $i$ . De ces formules on déduit

$$\cos r = \frac{\log b_0}{\log b_1}.$$

Dès lors l'indice se calcule par la formule connue

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}.$$

Deux observations faites sous deux angles différents  $30^\circ$  et  $60^\circ$  ont donné les résultats suivants :

Nom des raies.	Indices	
	1 <sup>re</sup> expérience.	2 <sup>e</sup> expérience.
D. ....	2,168	2,595
E. ....	1,754	1,653
F. ....	1,487	1,507
G. ....	1,310	1,314

La méthode indique le sens des phénomènes, mais ne paraît pas comporter une bien grande précision.

La dispersion anormale a fait l'objet de plusieurs études purement théoriques, que j'exposerai très-brièvement, n'ayant pas l'intention de discuter les formules analytiques des différents auteurs.

M. Sellmeier (1) admet que la dispersion tient à la résistance que les molécules pondérables opposent à la propagation du mouvement vibra-

(1) *Annales de Poggendorff*, t. CXLIII, p. 272.

toire. D'après lui, les molécules éteignent les mouvements vibratoires d'une certaine période : par suite, elles doivent augmenter l'indice de réfraction des vibrations plus lentes et diminuer celui des vibrations plus rapides. Ces variations d'indice seraient même sensibles pour les milieux transparents; on peut le reconnaître en construisant une courbe ayant pour ordonnées les indices et pour abscisses les valeurs correspondantes de  $\frac{1}{\lambda^2}$ ,  $\lambda$  désignant la longueur d'onde; car, d'après Cauchy, la dispersion est une fonction de la quantité  $\frac{1}{\lambda^2}$ . Pour l'eau et le sulfure de carbone, on obtient des courbes régulières, mais de courbure inverse; dans le cas du crown, la courbe présente une inflexion dans la région qui correspond aux rayons verts, et, si l'on se reporte aux expériences de M. F. Bernard (<sup>1</sup>), on trouve que le coefficient d'absorption du crown, pour les rayons verts, est plus grand que pour les rayons rouges.

Dans une étude mathématique de la question, M. O. Mayer (<sup>2</sup>) a cherché à introduire dans les équations différentielles du mouvement vibratoire des ondes planes certaines hypothèses relatives à l'absorption de la lumière.

Une première hypothèse consiste à admettre que les molécules d'éther frottent contre les molécules matérielles immobiles; d'où une résistance proportionnelle à la vitesse de vibration des molécules éthérées. Dès lors, l'équation du mouvement vibratoire d'une onde plane se propageant perpendiculairement à l'axe  $x$  devient

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mu \frac{d^2\xi}{dx^2} - \gamma \frac{d\xi}{dt}.$$

Cherchant une intégrale simple de cette équation et prenant pour indice de réfraction de la lumière de longueur d'onde  $\lambda$  le rapport entre la vitesse de propagation dans le vide et la vitesse de propagation dans le milieu considéré, on arrive à la formule

$$n^2 = \frac{1}{2\mu^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma\lambda}{2\mu} \right)^2} \right].$$

(<sup>1</sup>) *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXXV, p. 434.

(<sup>2</sup>) *Annales de Poggendorff*, t. CXLV, p. 80; 1872.

Cette formule est compatible avec le fait de la dispersion anormale.

Dans un second calcul, l'auteur admet un frottement des couches d'éther les unes sur les autres et, par suite, une résistance proportionnelle à leur vitesse relative. L'équation du mouvement vibratoire devient dans ce cas

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mu^2 \frac{d^2\xi}{dx^2} + \nu \frac{d^2\xi}{dt dx^2},$$

et les mêmes procédés de calcul conduisent à représenter l'indice par la formule

$$n = \frac{1}{2} \left[ \frac{\nu^2}{\mu^2 + \left( \frac{2\pi\nu}{\lambda} \right)^2} \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + \left( \frac{2\pi\nu}{\lambda} \right)^2}.$$

Cette formule peut, comme la précédente, s'accorder avec les faits; cependant les calculs indiquent une augmentation du coefficient d'absorption avec la vitesse de vibration, ce qui implique que l'absorption devrait surtout se faire sentir dans le violet.

Dans un travail postérieur, M. Helmholtz (1) a donné plus de précision aux idées de M. Sellmeier.

D'après ce physicien, certaines molécules pondérables participent au mouvement vibratoire de l'éther qu'elles environne; il admet d'ailleurs, avec Cauchy, que l'on peut considérer l'éther et la matière pondérable comme deux milieux continus agissant l'un sur l'autre. Pour expliquer l'absorption, il suppose que le milieu pondérable oppose aux molécules matérielles covibrantes une résistance analogue au frottement. D'après cela, considérons une onde plane se déplaçant perpendiculairement à l'axe Oy; nous aurons à écrire les équations différentielles du mouvement d'une molécule d'éther et celles du mouvement d'une molécule matérielle.

La molécule éthérée sera soumise à l'action élastique de l'éther et à l'action des molécules matérielles; cette dernière est proportionnelle au déplacement relatif de la molécule éthérée, dont l'élongation est représentée par  $\xi$  et de la molécule covibrante, dont l'élongation est représentée par  $x$ . L'équation du mouvement vibratoire sera dès lors

$$\mu \frac{d^2\xi}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2\xi}{dx^2} + \beta^2 (x - \xi).$$

(1) *Annales de Poggendorff*, t. CLIV, p. 512 (1875), et *Journal de Physique*, t. IV, p. 216.  
*Ann. de l'Éc. Normale*. 2<sup>e</sup> Série. Tome VI. — NOVEMBRE 1877.



de la bande d'absorption, et prenons

$$AB = \frac{n}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2}, \quad BD = \frac{\beta^2}{\alpha^2 \gamma^2 n^2}, \quad BK = \frac{2\gamma^2}{n};$$

puis décrivons un cercle sur BD comme diamètre. Pour voir ce qui se passe dans une partie de la bande d'absorption, où le nombre de vibrations à la seconde est  $n < \nu$  par exemple, on prend  $KM = \nu - n$  et l'on mène BM, puis, par le point E, la perpendiculaire EH. La vitesse de propagation  $c$  est donnée par la relation

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{2} (AE + AH).$$

Si l'on supposait  $n > \nu$ , il faudrait prendre le point M à droite. La quantité  $\frac{1}{c^2}$  est proportionnelle au carré de l'indice; par conséquent, si BK est petit, on voit que, pour de petites valeurs de  $n - \nu$ , le point E peut se déplacer beaucoup sur le cercle et la somme AK + AH passer par un maximum.

Les calculs précédents se rapportent au cas d'une seule bande d'absorption; si le nombre de ces bandes est plus grand, on admet qu'à chacune d'elles correspond une molécule covibrante, ce qui introduit de nouvelles équations. On obtient alors, pour chaque bande, des résultats analogues aux précédents.

Enfin M. Ketteler s'est également occupé de ce problème théorique<sup>(1)</sup>. Pour lui, les formules de M. Helmholtz ne peuvent pas représenter le phénomène; car, en annulant le coefficient d'absorption, on trouve, pour les corps transparents, des formules en désaccord avec l'expérience.

La présence des molécules matérielles, d'après les vues de l'auteur, équivaut à une modification de l'élasticité de l'éther; d'où il suit que le mouvement d'une molécule éthérée se trouve représenté par l'équation

$$\gamma \frac{d^2 \xi}{dt^2} = (E + e) \frac{d^2 \xi}{dy^2},$$

$e$  représente la constante d'élasticité de l'éther libre.

---

(<sup>1</sup>) *Philosophical Magazine*, 5<sup>e</sup> série, t. II, p. 414; 1876.

Quant à la molécule matérielle covibrante, il admet qu'elle est soumise à la force élastique du corps pondérable, laquelle est proportionnelle au déplacement, et à une seconde force due à la déformation du milieu, et il écrit

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = Kx + E' \frac{d^2 x}{dy^2}.$$

Dans le cas de plusieurs molécules covibrantes, on écrit autant d'équations qu'il y a de molécules, et l'on ajoute dans la première équation autant de termes analogues à  $E \frac{d^2 \xi}{dy^2}$ .

Le développement du calcul conduit à représenter l'indice par la formule

$$n^2 - 1 = \sum \frac{D}{l^2 - L^2}.$$

D et L sont des constantes dépendant de la molécule covibrante considérée,  $l$  représente la longueur d'onde, dans le milieu considéré, de la lumière considérée. Sous le signe  $\Sigma$ , le nombre des termes est égal à celui des molécules covibrantes.

De fait, des formules de dispersion de cette forme peuvent représenter les phénomènes; mais, la publication du Mémoire n'étant pas achevée, je n'ai pu me former une idée bien nette de la manière dont l'auteur rend compte de la dispersion anormale.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

### EXPÉRIENCES RELATIVES A LA DISPERSION DE L'IODE.

---

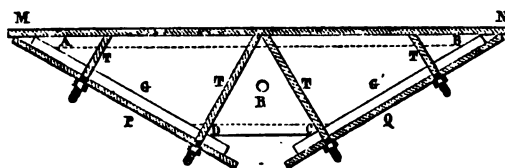
#### Dispersion de la vapeur d'iode.

Je me suis occupé de répéter les expériences de M. Le Roux, relatives à la vapeur d'iode, et j'ai cherché à mesurer, d'une manière approchée, les indices de réfraction de cette vapeur, pour les rayons rouges et les

rayons violets. La méthode qui m'a paru la plus commode est encore celle du prisme.

Le prisme représenté dans la *fig. 2*, en projection horizontale, se compose d'un tube de verre ABCD, taillé en biseau à ses deux extré-

Fig. 2.



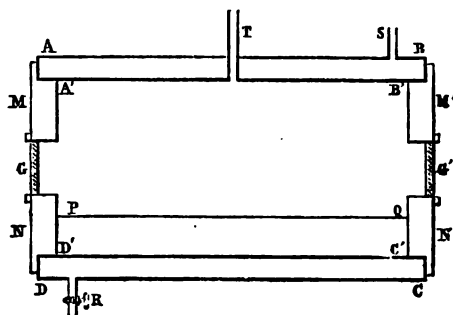
mités. Deux glaces G et G', maintenues par une monture métallique, viennent compléter ce prisme. La monture est formée d'une première plaque MN, contre laquelle s'appuie la base du prisme; deux autres plaques P et Q, percées, en leur centre, d'ouvertures elliptiques, servent à appliquer les glaces contre les bords rodés du tube. Huit tiges, dont les quatre supérieures T sont visibles sur la figure, se trouvent fixées sur la plaque MN, perpendiculairement à la direction des glaces; elles pénètrent dans des trous pratiqués dans les plaques mobiles. Ces tiges sont munies de pas de vis à leurs extrémités, et des écrous permettent de serrer fortement les plaques mobiles et les glaces entre les biseaux du tube. Un trou R, sur lequel s'adapte un tube de verre rodé à l'émeri, sert à faire communiquer l'intérieur du prisme avec l'atmosphère; c'est aussi par là que l'on peut introduire les morceaux d'iode.

Le dispositif adopté permet un démontage rapide et donne beaucoup de facilité pour le nettoyage des glaces. De plus, si l'on applique une solution de gomme entre les bords du prisme et les glaces, et aussi sur le pourtour du tube qui pénètre en R, on obtient une fermeture telle, que l'on peut faire dans l'appareil un vide approché. Quant au diamètre du tube constituant le prisme, il est d'environ 5 centimètres et l'angle voisin de  $140^\circ$ .

L'étuve, en cuivre rouge, servant à chauffer le prisme, est constituée par deux cylindres horizontaux, concentriques et de même longueur. L'intervalle annulaire qui les sépare est de 2 centimètres environ. Les cylindres ABCD, A'B'C'D' (*fig. 3*) sont réunis par leurs extrémités, ainsi que l'indique la coupe ci-contre. Deux tubulures S et R, dont la

dernière est munie d'un robinet, permettent d'introduire dans l'espace annulaire un liquide ou une vapeur.

Fig. 3.



Pour achever de clore l'enceinte, on adapte aux extrémités deux opercules à double enveloppe MN et M'N', percés d'ouvertures centrales. Des viroles maintiennent les glaces G et G', qui permettent au faisceau lumineux de traverser l'étuve. Une tubulure T, passant à travers les deux cylindres, livre passage au tube destiné à mettre l'intérieur du prisme en communication avec l'atmosphère, tandis qu'une seconde tubulure semblable permet l'introduction d'un thermomètre; donc le réservoir se trouve alors voisin du piston.

Dans les premières expériences, la chaudière, renfermant de l'huile, était chauffée à l'aide d'un bec de gaz; pour empêcher le courant d'air chaud de faire onduler les images, j'avais disposé deux écrans qui, partant des extrémités C et D, descendaient jusqu'au contact de la table soutenant l'appareil. Plus tard, pour obtenir une température bien constante, j'ai fait arriver, par la tubulure C, un courant de vapeur d'eau; cette vapeur, sortant par la tubulure R, allait se condenser dans un vase contenant de l'eau. Grâce à ce mode de chauffage, je pouvais maintenir la température à 100 degrés pendant plus d'une heure. L'observation du spectre se faisait à l'aide d'une lunette de MM. Brünner, portant un micromètre oculaire; la distance focale de la lunette était de 620 millimètres et le diamètre de l'objectif 55 millimètres.

Le micromètre, portant deux fils en croix, était mobile à l'aide d'une vis micrométrique, dont le pas était de 0<sup>mm</sup>,4; le tambour portait

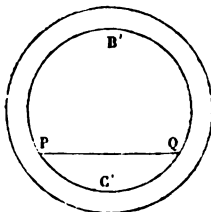


100 divisions; un tour de la vis équivalait à 130" et une division du tambour à 1",3.

Avant de procéder aux expériences, il faut d'abord se procurer de bonnes glaces, pour fermer le prisme et l'enceinte, et choisir le sens dans lequel on doit les ajuster, pour que l'image de la fente du collimateur, vue à travers le système complet du prisme et de l'étuve, soit bonne et exempte d'irisations. J'ai dû essayer plusieurs glaces avant d'arriver à un résultat satisfaisant.

On place alors le collimateur horizontalement à l'aide d'un niveau et l'on rend sa fente verticale; derrière ce collimateur, on dispose l'étuve de manière que le faisceau lumineux passe par le centre des glaces; quant au prisme, on le place sur une tablette de cuivre PQ (*fig. 4*).

Fig. 4.



s'appuyant par les bords contre les parois du cylindre intérieur B'C'. On rend verticale l'arête de ce prisme; on fait en sorte que la lumière traverse les parties centrales de ses faces, puis on adapte le tube destiné à mettre l'intérieur du prisme en communication avec l'atmosphère. On a eu soin de mettre dans ce prisme une assez grande quantité d'iode.

Pour bien orienter la lunette, on dispose sur son objectif un écran percé d'une ouverture centrale d'un diamètre un peu plus petit que celui du prisme; on enlève l'oculaire et, regardant par le tube du tirage, on s'arrange de manière à voir la partie libre de l'objectif fortement éclairée. On est sûr ainsi d'utiliser la partie centrale de l'objectif. On replace alors l'oculaire, après l'avoir muni d'un œilleton très-petit pour forcer l'œil à regarder dans l'axe de la lunette. Toutes ces précautions sont nécessaires si l'on ne veut pas commettre d'erreur sur le sens de la dispersion.

L'appareil ainsi disposé, on éclaire la fente du collimateur avec

l'étincelle condensée d'une grande bobine de Ruhmkorff, jaillissant entre deux fils de cadmium. On obtient ainsi un point lumineux intense, et la lumière qui en émane est composée de rayons rouges et de rayons bleu violet.

On met alors la fente au point, en lui donnant une largeur très-faible, et l'on repère sur le micromètre la position de l'image. On chauffe l'étuve et, quand le prisme est rempli de vapeurs d'iode, on procède aux observations.

L'image de la fente paraît composée de deux parties : l'une rouge, l'autre violette; si l'on n'avait pas le soin de maintenir l'œil bien fixe, on pourrait intervertir l'ordre de ces couleurs; mais, en prenant les précautions indiquées ci-dessus, on constate que le rouge est plus dévié que le violet; d'ailleurs, on s'assure de la réalité du fait en pointant les deux images. Pour se mettre à l'abri de toute idée préconçue, on fait les pointés en plaçant alternativement un verre bleu et un verre rouge en avant de la fente du collimateur.

Dans ces conditions, on ne voit qu'une seule image à la fois et l'on en détermine la position.

Quand on opère avec le bain d'huile et qu'on éclaire avec la lumière solaire, on peut élever la température jusqu'à ce que le thermomètre marque 130 degrés : on obtient alors, entre les deux images, un écart représenté en moyenne par 10 divisions du tambour, la déviation totale étant de 150 divisions environ; mais les variations de température empêchent les mesures d'être concordantes.

Pour opérer à température constante, on fait arriver dans l'étuve un courant de vapeur d'eau; on n'a plus besoin de recourir au Soleil, car les étincelles d'induction donnent une lumière assez intense.

Voici, comme exemple, les résultats d'une expérience faite le 13 mars 1877 :

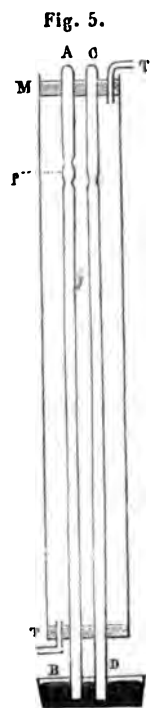
	Lectures du micromètre.			Déviation en divisions du micromètre.	
	Lumière blanche.	Lumière rouge.	Lumière bleue.		
Avant de chauffer. ....	133	»	»	»	»
» .....	132	»	»	»	»
» .....	132	»	»	»	»
Après une heure de chauffe. ....	»	»	75	»	57
» .....	»	71	»	61	»
» .....	»	»	74	»	»
» .....	»	70	»	62	58
Après une heure un quart de chauffe. .	»	»	75	»	57
» .....	»	71	»	61	»
» .....	»	»	76	»	56
» .....	»	70	»	62	»
Appareil refroidi. ....	132	»	»	»	»

En prenant les nombres des autres expériences, on trouve que, pour le rouge, la déviation a varié entre 59 et 62 divisions du tambour et que, pour le violet, cette déviation a varié entre 54 et 58 divisions du tambour. Ces déviations ne sont donc guère déterminées qu'à  $\frac{1}{13}$  près. Quant à l'écart entre deux pointés successifs du rouge et du bleu, il a oscillé entre 4 et 7 divisions; ce qui fournit, pour la dispersion, une approximation de même ordre que la précédente. Je ne crois pas qu'il soit possible, par cette méthode, d'arriver à une précision beaucoup plus grande.

La connaissance de ces déviations ne suffit pas pour calculer les indices de la vapeur d'iode; il faut d'abord chercher dans quel état se trouve la vapeur d'iode à 100 degrés, et, pour cela, déterminer sa tension.

L'appareil (*fig. 5*) qui a servi à mesurer cette tension se compose de deux tubes AB et CD, pouvant être fixés à l'intérieur d'un manchon de verre MN. Le premier de ces tubes porte deux étranglements, et l'on a introduit, dans la partie renflée P, un peu de paraffine; la partie supérieure contient des morceaux d'iode. Le tube CD ne porte qu'un seul étranglement et renferme aussi de la paraffine. Après avoir étiré à la lampe les extrémités A et C des tubes, on les dessèche en y faisant passer un courant d'air qui traverse, au préalable, une éprouvette à pied contenant de la chaux potassée; on chauffe même les tubes pendant qu'ils sont soumis à l'action du courant d'air. Les tubes desséchés

sont mis en place et l'on fait plonger leurs extrémités dans une petite cuve à mercure. A l'aide d'un aspirateur de Sprengel, on fait le vide



successivement dans chaque tube par la partie supérieure; quand le vide a été maintenu pendant près d'une heure, on ferme à la lampe. Pour déterminer alors la tension de vapeur de l'iode à 100 degrés, on fait arriver, par le tube T', un courant de vapeur d'eau qui s'échappe par le tube T. La paraffine fond dans chaque tube et se répand sur la surface du mercure. Dans le tube CD, le déplacement du niveau est peu considérable; mais en AB, l'iode entrant en vapeur, produit une dépression de la colonne mercurielle. La couche de paraffine de ce tube AB se colore en brun, mais l'iode n'attaque pas sensiblement le mercure; toutefois il est impossible de relever le niveau au cathétomètre. Les lectures faites sur une règle divisée m'ont donné, pour tension de la vapeur d'iode à 200 degrés, 50 millimètres environ. C'est ce nombre que j'adopterai pour le calcul de l'indice.

L'angle du prisme est un second élément qu'il importe de connaître

pour effectuer le calcul; mais on peut, au lieu de déterminer cet angle, comparer la réfraction de la vapeur d'iode à celle de l'air, de la manière suivante :

Le tube qui communique avec l'intérieur du prisme est mis en rapport avec l'une des branches d'un robinet de verre à trois voies; la seconde branche de ce robinet est reliée à un manomètre barométrique à deux branches. On fait le vide dans le prisme et dans le manomètre en adaptant une machine pneumatique à la troisième branche du robinet. Quand le vide est poussé aussi loin que le permettent les fuites du prisme, on arrête le jeu de la machine et l'on mesure la déviation de l'image. Au moment où l'on fait le pointé, un aide tourne le robinet de façon à isoler complètement le manomètre du reste de l'appareil; la pression indiquée par cet instrument, qu'on vient lire ensuite au cathétomètre, est celle qui existe réellement dans le prisme au moment de la lecture de la déviation.

Pour donner une idée de cette déviation, je citerai les nombres d'une expérience faite le 21 mars 1877.

La pression, primitivement égale à la pression atmosphérique 742 millimètres, ayant été amenée à 14 millimètres, la déviation s'est trouvée de 192 divisions du tambour; la température était de 10 degrés.

Cette déviation était naturellement de sens contraire à la précédente, et de plus on ne pouvait distinguer aucune coloration dans l'image.

#### *Calcul de l'indice.*

J'admets que l'air et la vapeur d'iode suivent exactement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et de plus que la réfraction d'un gaz, c'est-à-dire l'excès de son indice sur l'unité, est proportionnelle à sa densité. De nombreuses expériences de MM. Jamin <sup>(1)</sup> et Mascart <sup>(2)</sup> montrent que cette loi s'accorde bien avec les faits, surtout lorsqu'on produit la variation de densité par une variation correspondante dans la pression.

Dans l'expérience sur la vapeur d'iode, on a dans l'intérieur du prisme de la vapeur d'iode à T degrés et à la pression  $h$ , et de l'air à la

<sup>(1)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XLIX, p. 282.

<sup>(2)</sup> *Annales scientifiques de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. IV, p. 9.

même température et à la pression  $H - h$ ,  $H$  désignant la hauteur barométrique. Quant à l'air qui environne le prisme, il est à la température  $T$  et à la pression  $H$ ; mais on peut partager cette masse d'air en deux, l'une à la pression  $H - h$  et l'autre à la pression  $h$ . Les deux masses d'air, intérieure et extérieure, à la pression  $H - h$ , ne produisent pas d'effet de réfraction. La déviation observée est la même que celle qui est produite par le prisme plein de vapeur d'iode à la pression  $h$  et placé dans de l'air à la même température  $T$  et à la même pression  $h$ .

D'après cela, désignant par  $N_0$  et  $n_0$  les indices de la vapeur d'iode et de l'air dans les conditions normales, c'est-à-dire à zéro et sous la pression de 760 millimètres, et par  $N$  et  $n$  les indices des mêmes corps dans les conditions de l'expérience, on a les équations

$$N - 1 = (N_0 - 1) \frac{h}{760} \frac{1}{1 + \alpha T},$$

$$n - 1 = (n_0 - 1) \frac{h}{760} \frac{1}{1 + \alpha T},$$

$\alpha$  désignant le coefficient de dilatation de l'air et de la vapeur.

La lumière traversant un prisme d'indice  $N$  placé dans un milieu d'indice  $n$ , l'indice relatif du milieu constituant ce prisme est  $\frac{N}{n}$ ; comme, d'ailleurs, on est à peu près dans la position de la déviation minima, on peut écrire

$$\frac{N}{n} = \frac{\sin \frac{A + D}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \cos \frac{D}{2} + \cot \frac{A}{2} \sin \frac{D}{2},$$

en désignant par  $A$  l'angle du prisme.

La quantité  $D$  étant très-petite, la formule précédente peut être écrite ainsi :

$$\frac{N}{n} - 1 = \frac{D}{2} \cot \frac{A}{2};$$

d'où, en remplaçant  $N$  et  $n$  par leurs valeurs en  $N_0$  et  $n_0$ ,

$$\frac{N_0 - n_0}{n_0 - 1 + \frac{760}{h} (1 + \alpha T)} = \frac{D}{2} \cot \frac{A}{2}.$$

Dans l'expérience faite sur l'air, en désignant par  $n'$  l'indice de l'air resté dans le prisme, par  $n''$  celui de l'air extérieur et par  $D'$  la déviation, on a de même

$$\frac{n''}{n'} - 1 = \frac{D'}{2} \cot \frac{A}{2};$$

$n'$  et  $n''$  sont définies par les relations suivantes :

$$n' - 1 = (n_0 - 1) \frac{h'}{760} \frac{1}{1 + \alpha t},$$

$$n'' - 1 = (n_0 - 1) \frac{H'}{760} \frac{1}{1 + \alpha t}.$$

$h'$  désigne la pression de l'air resté dans le prisme,  $H'$  la hauteur barométrique et  $t$  la température.

Ces valeurs de  $n'$  et  $n''$  conduisent à la relation

$$\frac{H' - h'}{h' + 760 \frac{1 + \alpha t}{n_0 - 1}} = \frac{D'}{2} \cot \frac{A}{2},$$

qui permet de calculer  $\cot \frac{A}{2}$  et d'arriver à la formule définitive

$$\frac{N_0 - n_0}{n_0 - 1 + \frac{760}{h} (1 + \alpha T)} \left[ \frac{h' + \frac{760}{n_0 - 1} (1 + \alpha t)}{H' - h'} D' \right] = D.$$

La quantité entre crochets est une constante qu'on détermine par les expériences faites sur l'air. Le calcul de cette constante, au moyen des données de deux expériences, conduit à des nombres ne différant entre eux que de  $\frac{1}{100}$  de leur valeur moyenne.

On prend, pour effectuer les calculs, les valeurs suivantes :

$$H' = 742^{\text{mm}}, 8, \quad h' = 14^{\text{mm}}, \quad D' = 192, \quad T = 100^\circ \text{ et } t = 10^\circ;$$

on adopte pour déviation du rouge évalué en divisions du tambour  $D = 60$  et pour déviation du violet  $D = 55$ , nombres autour desquels oscillent les valeurs trouvées. Enfin, tenant compte de la dispersion de l'air, on admet comme indice normal de l'air pour le rouge 1,000.293

et pour indice normal du violet 1,000.295, nombres résultant des déterminations de MM. Jamin et Mascart.

Tous ces nombres conduisent aux valeurs suivantes :

*Indices de la vapeur d'iode.*

Lumière rouge.....	1,00205
Lumière violette. ....	1,00192

Le pouvoir dispersif négatif de la vapeur d'iode, c'est-à-dire le quotient  $\frac{n' - 1}{n - 1}$ ,  $n$  représentant l'indice du rouge et  $n'$  celui du violet, serait d'après cela voisin de 0,06, c'est-à-dire de même ordre de grandeur que le pouvoir dispersif du flint. Cela explique pourquoi M. Le Roux a pu achromatiser l'image donnée par le prisme à vapeur d'iode, en disposant, à la suite et en sens inverse, un prisme de verre produisant la même déviation que le prisme à vapeur d'iode.

**Dispersion de l'iode en solution.**

Après ces expériences, il devenait intéressant de rechercher si l'iode conserve, dans les dissolutions, la propriété de dévier plus fortement le rouge que le violet. Les solutions qui paraissent le plus transparentes pour les rayons violets sont celles qu'on obtient avec le sulfure de carbone; cette remarque avait été faite déjà par M. Schultz-Sellack (<sup>1</sup>). C'est donc sur ces solutions qu'ont porté mes recherches, et leurs indices ont été déterminés par la méthode du prisme, mais en prenant certaines précautions.

Avec une solution fortement colorée, il faut utiliser la portion du prisme très-voisine de l'arête et dès lors il ne sort du prisme qu'un faisceau très-étroit. Si ce faisceau ne tombe pas au centre de l'objectif de la lunette, la mise au point est toujours défectueuse; de plus, suivant une remarque de M. Kundt, le prisme produit l'effet d'une fente fine placée entre le collimateur et la lunette, d'où production de phéno-

---

(<sup>1</sup>) *Annales de Poggendorff*, t. CXL, p. 334, et *Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. XXV, p. 217.



mènes de diffraction. Toutes ces causes diminuent beaucoup la netteté des images, et on peut les éviter en opérant sur des solutions très-étendues et dès lors transparentes sous une grande épaisseur.

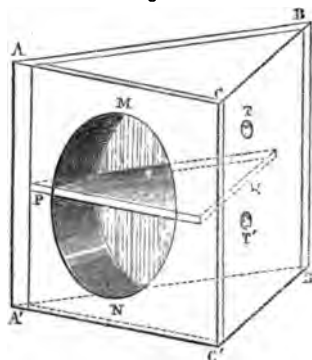
On compare la dispersion de ces dissolutions à la dispersion propre du dissolvant pour en conclure la dispersion de l'iode.

Si, pour faire cette comparaison, on se contentait de déterminer les indices des deux liquides, on n'arriverait à aucun résultat, par suite de la variation rapide de l'indice du sulfure de carbone avec la température. Cette variation, d'après les expériences de MM. Dale et Gladstone (<sup>1</sup>), serait de même ordre que les différences à évaluer et les expériences n'offriraient aucune garantie.

On peut néanmoins arriver à mesurer directement la différence des indices de la dissolution et du dissolvant, en employant un prisme à deux compartiments.

Pour obtenir ce prisme, on a creusé dans un prisme de verre ABCA'B'C' (*fig. 6*), et perpendiculairement à son plan bissecteur,

Fig. 6.



un canal circulaire MN. Une lame de verre PQ a été disposée, dans ce canal, perpendiculairement aux arêtes du prisme; elle est maintenue par deux rainures pratiquées sur les parois internes de la cavité. Cette lame de verre a été usée en même temps que les plans ABA'B' et ACA'C'; puis on a collé des glaces sur chacune de ces faces du prisme. Deux ouvertures, T, T', pratiquées sur la base BC B'C', servent à intro-

(<sup>1</sup>) *Philosophical transactions*, 1863, 1<sup>re</sup> Partie; p. 317.

duire les liquides dans chaque compartiment. On a ainsi deux prismes superposés et de même angle.

Pour faire une expérience, on introduit, dans l'un des compartiments, la solution d'iode et dans l'autre le sulfure de carbone. Le prisme est posé sur la plate-forme d'un goniomètre de Brünnér; on se place à la déviation minima, puis on abandonne quelque temps l'appareil à lui-même. Au bout d'une heure, on peut admettre que les liquides sont à la même température et procéder aux observations.

Quand on met l'œil à la lunette, on voit deux spectres distincts; pour faciliter les pointés, on peut couvrir alternativement les deux compartiments avec un petit écran de papier, de manière à n'avoir qu'un seul spectre dans le champ au moment de pointer. Toutefois, cette précaution n'est pas nécessaire quand on opère avec la lumière solaire. Pour relever les distances angulaires des deux images d'une même raie, il m'a paru commode d'employer la lunette à micromètre qui m'avait servi dans les expériences précédentes : elle permet de faire très-rapidement les lectures.

Des expériences faites sur une solution d'iode au  $\frac{1}{500}$ , très-transparente pour les rayons rouges et violets, donnent des résultats dont on peut se faire une idée par le tableau suivant :

EXPÉRIENCE DU 4 MARS 1877.

Lectures du tambour.							
Sulfure de carbone.		Solution d'iode.		Différences.		Distances angulaires.	
Raie C.	Raie G.	Raie C.	Raie G.	Raie C.	Raie G.	Raie C.	Raie G.
36	»	90	»	54	»	1. 10"	»
34	»	92	»	58	»	1. 15	»
38	»	»	»	»	»	»	»
»	80	»	120	»	40	»	52
»	78	»	118	»	40	»	49
97	»	149	»	52	»	1. 7	»
97	»	152	»	55	»	1. 11	»

La moyenne de plusieurs observations donne 1'10" pour l'écart des deux raies C et 48" pour l'écart des deux raies G. Les différences entre les nombres extrêmes, correspondant à une même raie, ne dépassent pas 8" : c'est toute la précision qu'on peut espérer, car le prisme fait

Si, pendant la dissolution, il n'y a ni contraction ni dilatation, le volume du mélange  $\frac{p_1 + p_2}{D}$  est égal à la somme  $\frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2}$  des volumes des corps qui le constituent, et dès lors la formule devient

$$\left(\frac{p_1}{d_1} + \frac{p_2}{d_2}\right) (N - 1) = \frac{p_1}{d_1} (n_1 - 1) + \frac{p_2}{d_2} (n_2 - 1);$$

d'où l'on déduit

$$n_2 - 1 = \frac{p_1}{p_2} \frac{d_2}{d_1} (N - n_1) + N - 1.$$

Comme la proportion d'iode de la solution est très-faible, et qu'il serait difficile de voir expérimentalement si la densité du mélange est bien la moyenne des densités des composants, on peut admettre qu'il en est ainsi.

Dès lors, prenant pour  $d_1$  la valeur 1,29, pour  $d_2$  la valeur 4,95, on obtient la relation

$$n_2 - 1 = 499 \frac{4,95}{1,29} (N - n_1) + N - 1,$$

qui conduit aux nombres suivants :

*Indices de réfraction de l'iode solide.*

Raie C. ....	2,074
Raie G. ....	1,982

La dispersion négative, entre les deux raies C et G, est voisine de 0,08. Ce nombre est un peu plus grand que le nombre 0,06 provenant des expériences faites sur la vapeur; mais, si l'on a égard à la difficulté des mesures et si l'on remarque que, dans cette dernière méthode, l'erreur expérimentale se trouve multipliée par un nombre considérable, on peut admettre que ces résultats sont concordants.

On peut calculer l'indice de l'iode solide en partant des expériences faites sur la vapeur et admettant que le pouvoir réfringent reste constant pendant le changement d'état. On obtient alors les nombres suivants :

Rouge. ....	1,894
Violet ..	1,838

plus faibles que les précédents, mais cependant de même ordre.

En tout cas ces deux séries d'expériences nous apprennent que l'iode jouit de la propriété de dévier plus fortement le rouge que le violet.

## SECONDE PARTIE.

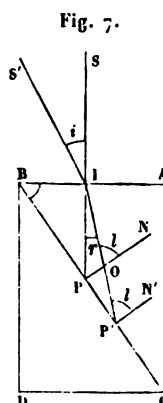
### EXPÉRIENCES RELATIVES AUX LIQUIDES COLORÉS.

#### Méthode de la réflexion totale.

On peut, pour étudier la dispersion des liquides fortement colorés, employer deux méthodes que je vais décrire successivement.

Le principe de la première méthode avait déjà été indiqué par M. Christiansen; le voici en quelques mots :

Soit (*fig. 7*) un prisme de verre  $ABDC$ , rectangle en  $A$ , et dont



l'angle  $B$  est supérieur à l'angle limite, qui correspond au passage du verre dans l'air, pour la lumière considérée. Appliquons contre la face hypoténuse un autre prisme semblable  $BCD$ , et faisons arriver un faisceau lumineux normalement à la face  $AB$ . L'angle  $B$  étant supérieur à l'angle limite, ce faisceau se réfléchit totalement sur la face  $BC$ , et

l'observateur qui regarde par la face CD ne voit aucune lumière; mais les conditions sont changées si l'on interpose une couche liquide entre les deux prismes : la lumière reparait. Supposons que le liquide coloré introduit ait un indice inférieur à celui du verre; on pourra obtenir une nouvelle extinction en inclinant l'ensemble des deux prismes sur le faisceau incident, de manière que celui-ci prenne, par rapport à la face AB, une direction telle que S'I. L'angle d'incidence sera dans ce cas  $S'IS = i$ , et l'angle de réfraction  $PIP' = r$ , et l'on aura la relation connue

$$\sin i = n \sin r,$$

$n$  désignant l'indice du prisme pour les rayons considérés. L'angle d'incidence sur la face BC est alors égal à l'angle limite  $l$  défini par l'équation

$$n \sin l = n_1,$$

$n_1$  désignant l'indice du liquide interposé pour la lumière employée.

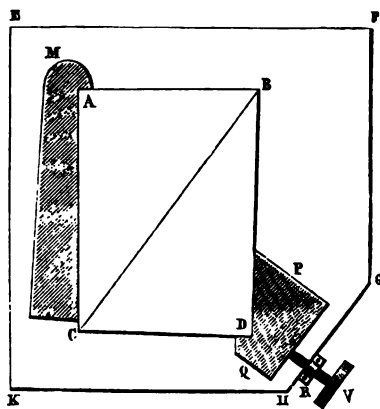
Cet angle  $l$  peut s'évaluer facilement en fonction de l'angle d'incidence  $i$  et de l'angle B du prisme. Le triangle OPI donne en effet

$$l = r + IPN = r + B,$$

et  $l$  est une fonction de  $i$ .

Pour réaliser l'expérience, on prend deux prismes de flint dont les

Fig. 8.



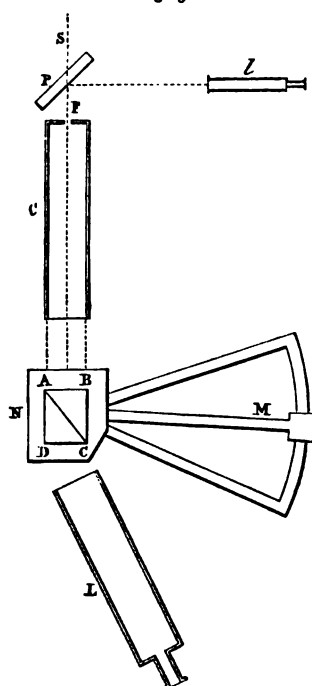
angles diffèrent légèrement. Le premier ABC (*fig. 8*) peut s'appuyer

contre une pièce de bois verticale MN, fixée solidement à une planchette horizontale EFGHK, portée par un trépied muni de trois vis calantes. Le second prisme BCD est engagé, par son angle droit D, dans un morceau de bois PQ, commandé par la vis V. Cette vis, passant à travers l'écran R, agit normalement à la face BC.

Pour évaluer les angles, on dispose le trépied sur une plaque de verre fixée à l'alidade M d'un sextant, et l'on s'arrange de manière que l'axe de rotation soit voisin du milieu de la face AB.

Le système des deux prismes est éclairé par un collimateur à fente C (fig. 9), provenant d'un spectroscopie à quatre prismes. On observe la

Fig. 9.



lumière émergente avec la lunette L de ce spectroscopie; les deux prismes ont été choisis de telle sorte qu'on voie un spectre très-peu étalé. La production de ce spectre est due à la différence des angles des deux prismes, et l'on voit nettement séparées les raies du spectre du cadmium quand on éclaire avec des étincelles d'induction. Entre la

source lumineuse S et la fente du collimateur on place une glace légèrement prismatique P, inclinée à  $45^\circ$ . Une lunette L, visant à petite distance, est mise au point sur l'une des images de la fente donnée par la glace P.

Les dimensions des prismes sont telles, que la face AB du premier est un peu plus large que le faisceau lumineux; dès lors tous les rayons sont utilisés.

Pour régler l'appareil, on commence par s'assurer que le collimateur et le limbe du sextant sont horizontaux; on éclaire ensuite la fente avec une lampe, après avoir mis en place le trépied qui porte les prismes. Mettant l'œil à la lunette L, on tourne l'alidade M jusqu'à ce que la fente F paraisse brillante. C'est alors que la lumière réfléchiée par la face AB rentre dans le collimateur. En agissant sur les vis du trépied, on peut amener l'image brillante de la fente à coïncider avec la fente elle-même, tout en ne conservant à cette dernière qu'une hauteur de 2 millimètres. On est sûr que la face AB est normale aux rayons incidents. Enlevant le prisme ABC, on opère sur la face AC du second comme sur la face AB du premier. Quand les images de la fente provenant des réflexions sur AB et AC ont été amenées successivement en coïncidence avec la fente, on est sûr que les arêtes du premier prisme sont normales à la direction du faisceau incident, et l'appareil est prêt pour les mesures.

Si l'on veut déterminer les indices d'une solution colorée, on éclaire avec les étincelles condensées d'une bobine d'induction, après avoir placé quelques gouttes de liquide entre les deux prismes, de façon à former une couche mince dont on règle l'épaisseur en serrant plus ou moins la vis V (*fig. 7*). On regarde dans la lunette L, et l'on fait coïncider la fente et son image; on note alors la position de l'alidade. On se place ensuite à la lunette L, et l'on tourne l'alidade jusqu'au moment où l'on voit disparaître une des raies brillantes du spectre; on note la nouvelle position de l'alidade. La différence des deux lectures donne l'angle d'incidence sur la face AB. Pour que l'observation soit bonne, il est nécessaire de s'assurer que, au moment où elle va disparaître, la lumière étudiée tombe bien au centre de l'objectif de la lunette d'observation.

On peut remarquer aussi qu'il faut faire les lectures au moment où

J'ai inscrit au-dessus de chaque raie sa longueur d'onde en millièmes de millimètre. Les nombres du premier tableau nous apprennent que, dans le cas d'une fente fine, les pointés peuvent être très-concordants. Le second tableau nous apprend qu'en exagérant la largeur de la fente on enlève un peu de la précision; toutefois, l'erreur qui en résulte pour l'indice est au plus d'une unité du troisième ordre décimal.

En second lieu, on peut faire varier l'épaisseur de la couche liquide; pour cela, après avoir clivé de petites lamelles de mica, on les interpose entre les bords des deux prismes. Pour avoir une idée de l'épaisseur de ces lamelles, on peut les placer sur l'une des images réelles d'un biprisme à angle rentrant<sup>(1)</sup>; il se produit un déplacement des franges proportionnel à l'épaisseur de la lame. Les premières des lamelles employées donnaient un déplacement de onze franges, les autres produisaient un déplacement de sept franges, ce qui donne, pour le rapport des épaisseurs, un nombre voisin de  $\frac{3}{2}$ .

L'expérience a montré que, quelles que fussent les lamelles employées, les variations accidentelles provenant de la température ou de l'évaporation de l'alcool servant de dissolvant étaient comprises entre les mêmes limites que dans le cas des prismes en contact. L'épaisseur ne paraît donc pas avoir d'influence, il suffit d'opérer sur une couche suffisamment transparente.

En dernier lieu, on peut faire varier l'intensité de la lumière, soit en supprimant la glace à  $45^\circ$ , soit en remplaçant le prisme de flint par un prisme de quartz. Dans ce dernier cas, le faisceau lumineux se partage en deux dans le prisme, et l'on observe la disparition de l'image ordinaire.

Le calcul, appliqué aux données de ces expériences, conduit, pour les indices, à des valeurs concordant avec les précédentes.

J'ai reconnu que la méthode bien appliquée permet de déterminer les indices à un degré d'approximation représenté par une unité du troisième ordre décimal. Avant de donner les résultats obtenus, je transcris les données nécessaires au calcul: ce sont, en premier lieu, les indices du prisme pour les lumières employées.

---

<sup>(1)</sup> *Journal de Physique*, t. II, p. 153.



*Indices du prisme de flint.*

Nature de la lumière.	Longueurs d'onde.	Indices.
Raie rouge du cadmium.....	0,6438	1,6115
Raie jaune du thallium.....	0,568	1,6150
Raie verte du thallium.....	0,534	1,6209
Raie verte du cadmium.....	0,5154	1,6243
Raie bleue du cadmium.....	0,4677	1,6286
Raie violette du cadmium....	0,4404	1,6362

Les longueurs d'onde sont évaluées en prenant pour unité le millième de millimètre. Le second élément qu'il faut connaître est l'angle du prisme. La moyenne de plusieurs observations concordantes conduit au nombre

$$55^{\circ}2'20''.$$

C'est à l'aide de ces données que les indices ont été calculés.

*Résultats.* — De nombreuses expériences faites sur un bleu d'aniline ont donné les résultats suivants :

Nature des raies.	Longueurs d'onde.	Indices.
Rouge du cadmium.....	0,6438	1,373
Bleu du cadmium.....	0,4677	1,369
Violet du cadmium.....	0,4404	1,374

Un prisme rempli de cette dissolution dévierait moins le bleu que le violet; ce dernier serait un peu plus dévié que le rouge. Une couche mince de cette solution produit, dans le spectre ordinaire, une bande d'absorption s'étendant du jaune au bleu. On trouve donc une diminution de l'indice dans le voisinage de cette bande.

Les expériences sur le chlorhydrate de fuchsine conduisent à des résultats semblables.

*Indices d'une solution presque concentrée de chlorhydrate de fuchsine.*

Nature des raies.	Longueurs d'onde.	Indices.
Rouge du cadmium.....	0,6438	1,377
Jaune du thallium.....	0,5339	1,382
Violet du cadmium.....	0,4404	1,366

*Indices de la même solution étendue de la moitié de son volume d'alcool.*

Nature des raies.	Longueurs d'onde.	Indices.	Indices de l'alcool.
Rouge du cadmium. ....	0,6438	1,372	1,364
Jaune du thallium. ....	0,5339	1,376	1,365
Violet du cadmium. ....	0,4404	1,370	1,371

On observe ici que l'indice du violet est inférieur à celui du rouge et à celui du jaune; de plus l'indice du violet est plus petit que celui de l'alcool servant de dissolvant. Ce fait ressort aussi des nombres donnés par M. Kundt, et qui se rapprochent assez des miens; les différences peuvent être attribuées à une différence de composition des fuchsines.

Pour opérer sur un corps de composition bien déterminée, je me suis adressé au permanganate de potasse et je donne le résultat comparé des expériences de M. Kundt et des miennes.

*Indices d'une solution presque concentrée de permanganate de potasse.*

Nature de la lumière.		Longueurs d'onde.	Indices.	
Expériences de M. Kundt.		Expériences de M. Kundt.	Expériences de M. Kundt.	
Raie C. ....		0,656	1,3408	
	Rouge du cadmium..	0,643		1,340
Raie D. ....		0,589	1,3442	
	Vert du thallium....	0,534		1,345
Raie E. ....		0,526	1,3452	
	Vert du cadmium...	0,515		1,342
Raie F. ....		0,485	1,3420	
	Violet du cadmium..	0,441		1,346
Raie G. ....		0,430	1,347	

Les nombres de M. Kundt et les miens ne diffèrent pas d'une unité du troisième ordre décimal; c'est, on se le rappelle, le degré de précision de mes expériences. D'après ces résultats, un prisme contenant une solution de permanganate de potasse dévierait plus le vert que le jaune et le bleu. Cet exemple, ainsi que le précédent, vient confirmer le fait d'une variation brusque de l'indice dans le voisinage des bandes d'absorption.

Les indices du permanganate de potasse ont encore été déterminés par une autre méthode.

**Méthode des interférences.**

Le procédé qui m'a paru le plus commode pour étudier la dispersion des liquides colorés repose sur l'emploi des franges dites *de Talbot*.

Le phénomène consiste en une série de bandes noires et brillantes qui se manifestent dans un spectre lumineux quand on introduit un retard sur l'une des moitiés du faisceau qui sert à le former. Le retard doit porter sur la moitié du faisceau voisine de l'arête du prisme.

La théorie complète de ce phénomène a été donnée par M. Airy<sup>(1)</sup>; le calcul des franges situées dans le plan focal principal de la lunette a été récemment exposé par M. Mascart<sup>(2)</sup>. Je me contenterai de résumer les points essentiels sans développer les formules analytiques.

Supposons que l'on fasse tomber, sur une fente fine verticale AB, une série d'ondes planes, parallèles au plan de la fente, dont nous désignerons la largeur par  $2l$ . Si la longueur de la fente est considérable par rapport à sa largeur, on peut, pour rendre compte des phénomènes observés, se borner à considérer ce qui se passe à l'intersection du plan focal de la lunette et d'un plan perpendiculaire à la fente.

Prenons l'un de ces plans pour plan de la figure et admettons que tous les rayons qui passent par la moitié droite de la fente aient subi un certain retard, par exemple par l'interposition d'une lame réfringente. La fente AB de largeur  $2l$  peut être considérée comme composée de deux autres AM et MB de largeur  $l$ . Chacune de ces fentes donne naissance à des franges de diffraction et, si l'on désigne par  $\theta$  la distance angulaire d'une frange noire à la normale aux ondes planes, on a la relation bien connue

$$(1) \quad l \sin \theta = p\lambda.$$

$p$  désigne un nombre entier quelconque, qui représente l'ordre de la frange, et  $\lambda$  désigne la longueur d'onde de la lumière considérée.

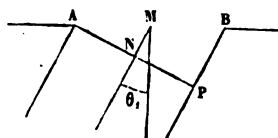
Les minima définis par l'équation (1) peuvent être nommés *minima du premier ordre*.

(<sup>1</sup>) *Philosophical Transactions*, 1840, Part II, p. 225, et 1841, p. 1.

(<sup>2</sup>) *Annales de l'École Normale*, 2<sup>e</sup> série, t. VI, p. 9.

Mais un nouveau phénomène vient se superposer au précédent. En effet, quand on regarde dans une direction définie par l'angle  $\theta_1$  (*fig. 10*),

Fig. 10.



la partie d'onde plane AP peut être considérée comme formée de deux autres AN et NP, provenant des portions AM et MB de l'onde incidente. La portion d'onde MB a subi un certain retard  $\Delta$  avant de rencontrer la fente; dès lors, le retard des éléments de NP sur les éléments correspondants de AN se trouve être

$$\Delta + l \sin \theta_1.$$

Si ce retard est un nombre impair de demi-longueur d'onde, les mouvements vibratoires émanés de AN et NP sont discordants en arrivant au point du plan focal correspondant à l'angle  $\theta_1$ , ce qui produit un minimum.

Les minima qu'on peut appeler du second ordre sont définis par la relation

$$\Delta + l \sin \theta_1 = (2p_1 + 1) \frac{\lambda}{2}$$

ou encore

$$(2) \quad l \sin \theta_1 = (2p_1 + 1) \frac{\lambda}{2} - \Delta.$$

$\Delta$  peut toujours être supposé inférieur à  $\lambda$ , car une différence de marche d'un nombre entier de longueurs d'onde ne change rien aux phénomènes.

Les formules précédentes nous montrent que la distance angulaire de deux minima successifs, quand on se borne à des angles petits, est représentée par  $\frac{\lambda}{l}$  pour le premier comme pour le second ordre. Les minima du second ordre sont situés plus à droite que ceux du premier et l'écart augmente avec  $\Delta$ ; de sorte que, pour un accroissement con-

tinu de la différence de marche, il se produit une sorte de glissement de ces minima du côté du faisceau en retard.

Les mêmes raisonnements peuvent s'appliquer dans le cas où les ondes planes arrivent obliquement sur la fente; les angles  $\theta$  et  $\theta'$ , doivent alors être comptés à partir des rayons incidents.

Si l'on opère avec la lumière blanche, les minima de premier ordre sont à peu près superposés pour toutes les couleurs; mais il n'en est pas de même de ceux du second, car le retard  $\Delta$  varie généralement d'une couleur à l'autre. En observant directement avec la lunette, ces minima se trouvent noyés dans le phénomène général; mais les conditions sont changées quand on interpose un prisme entre la fente et la lunette.

L'interposition de ce prisme revient, au point de vue théorique, à incliner le faisceau incident sur la fente d'un angle variable avec la couleur. Si la base du prisme est à droite, chaque faisceau s'incline vers la droite et l'inclinaison augmente du rouge au violet. D'autre part,  $\Delta$  et, par suite, le glissement vers la droite des minima du second ordre augmentent du rouge au violet. Dès lors, les deux effets s'ajoutent, le spectre paraît continu. Si l'on place le prisme en sens contraire, les faisceaux s'inclinent vers la gauche, et le glissement des franges peut se trouver compensé par la dispersion du prisme. Les conditions de cette compensation peuvent s'établir facilement; si le retard augmente d'une longueur d'onde pendant que le faisceau incident tourne d'un angle  $\frac{\lambda}{l}$ , égal à la distance de deux minima successifs, le minima de droite est amené en coïncidence avec le minima de gauche. Comme, dans une petite étendue, les retards dus au milieu réfringent et les rotations produites par le prisme sont proportionnels, il y a, en réalité, superposition d'un grand nombre de minima et production de bandes noires dans la région du spectre correspondant à une longueur d'onde voisine de  $\lambda$ .

Dès lors, la distance angulaire  $\alpha$  de deux franges noires est donnée par la relation

$$\alpha = \frac{\lambda}{l},$$

qui détermine la largeur de la fente: cette dernière doit être d'autant

plus fine que les franges sont plus larges et la longueur d'onde plus petite.

Il est facile de comprendre comment ce phénomène peut être utilisé dans la mesure des indices; supposons que la moitié gauche du faisceau traverse une certaine épaisseur  $e_1$  d'un liquide d'indice  $n$ , et l'autre la même épaisseur d'un liquide d'indice  $n' > n$ . Le retard primitif  $\Delta_1$  du faisceau de droite s'exprime par la formule suivante :

$$\Delta_1 = (n' - n) e_1.$$

On fait varier d'une même quantité l'épaisseur des deux couches, de façon à lui donner la valeur  $e_2 < e_1$ . Le nouveau retard  $\Delta_2$  est donné par l'équation

$$\Delta_2 = (n' - n) e_2.$$

Soient  $p_1$  et  $p_2$  les ordres de la frange de longueur d'onde  $\lambda$  dans le premier et le second cas, et  $\theta_1$  l'angle correspondant à cette frange, on a les relations

$$\theta_1 = (2p_1 + 1) \frac{\lambda}{2} - \Delta_1,$$

$$\theta_1 = (2p_2 + 1) \frac{\lambda}{2} - \Delta_2,$$

d'où

$$\lambda(p_1 - p_2) = \Delta_1 - \Delta_2 = (n' - n)(e_1 - e_2).$$

Si donc on désigne par  $f$  le nombre de franges qui, marchant vers le violet, ont passé au point considéré quand le retard a diminué de  $\Delta_1$  à  $\Delta_2$ , et par  $e$  la diminution d'épaisseur correspondante, on a

$$n' - n = \frac{f}{e} \lambda.$$

Cette relation permet de déterminer directement la différence entre les indices d'une dissolution et ceux de son dissolvant.

Pour réaliser l'expérience, il faut pouvoir modifier la différence de marche sans toucher au liquide, de manière à amener d'abord le phénomène à son maximum de netteté. De plus, il faut produire un écart entre les deux faisceaux, de manière à pouvoir agir à volonté sur l'un d'eux. On peut, pour cela, employer le dispositif suivant, dû à M. Mascart.

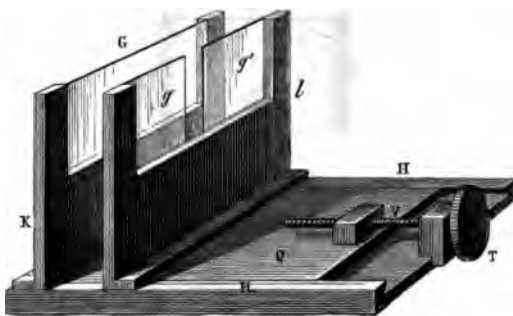
réflexion totale. On obtient ainsi un premier faisceau F. La lumière qui traverse la seconde moitié de l'objectif continue sa route suivant F' et rencontre un second parallélépipède P' identique au premier; ce second parallélépipède ramène le faisceau F' au contact du faisceau F. L'ensemble des deux faisceaux tombe sur une plaque MN munie d'une fente  $f$ , puis se rend dans le prisme et la lunette à réticule.

C'est la fente  $f$  qui donne naissance aux franges.

Pour régler l'appareil, on rend les deux parallélépipèdes verticaux et on les amène à être aussi parallèles que possible; il ne reste plus qu'à faire tourner l'un d'eux autour de la verticale pour produire les franges. On agit sur la fente  $f$  de manière à rendre les franges bien noires.

Les deux faisceaux ayant un écart voisin de 3 centimètres, il est facile d'interposer une couche liquide sur le trajet de chacun d'eux; on se sert pour cela d'une cuve à paroi mobile. Cette cuve (*fig. 12*) se

Fig. 12.



compose d'une première glace fixe G, collée sur une pièce fixe verticale K. Deux glaces mobiles  $g$  et  $g'$  sont portées par une pièce verticale L, fixée elle-même à une plaque horizontale Q, mobile dans deux rainures H. Les deux glaces  $g$  et  $g'$  sont dans un même plan parallèle à la glace G, et peuvent être amenées presque au contact de cette dernière, à l'aide de la vis V. Le pas de cette vis est de  $\frac{1}{2}$  millimètre; la tête est munie d'un tambour portant 50 divisions; une division du tambour équivaut à  $\frac{1}{100}$  de millimètre.

La cuve est disposée de façon que le faisceau F traverse normalement les glaces G et  $g$ , tandis que le faisceau F' traverse les glaces G et  $g'$ .

Pour procéder à une expérience, on approche les glaces mobiles très-près de la glace fine, et l'on met une goutte de la solution à étudier entre les glaces G et  $g$  par exemple, puis une goutte du dissolvant entre les glaces G et  $g'$ . Ces gouttes s'étalant entre les glaces, on obtient deux couches liquides assez transparentes. En diaphragmant convenablement la lentille du collimateur et employant la lumière solaire, on parvient à voir des franges très-nettes. On met l'œil à la lunette et l'on pointe le réticule sur une raie connue, puis on fait mouvoir la vis de manière à rapprocher les glaces mobiles de la glace fixe. Les franges se déplacent et l'on tourne jusqu'à ce qu'il en passe sous le fil un nombre déterminé  $f$ ; on lit sur le tambour la diminution  $e$  de l'épaisseur. Le sens du déplacement des franges indique lequel des deux liquides a l'indice le plus grand; il suffit de remarquer qu'un déplacement vers le rouge correspond à une augmentation de la différence de marche des deux faisceaux.

La méthode m'a permis de déterminer les indices du permanganate de potasse, et le tableau suivant donne une idée des résultats :

EXPÉRIENCE DU 19 JUILLET 1876 SUR LE PERMANGANATE DE POTASSE.

Nom des raies.	Lectures du tambour.		$e$ Variations d'épaisseur.	$f$ Nombre de franges.	$\frac{f}{e}$	Indices.
C. ....	27	16	11	2	0,18	1,340
	31	20	11	2	0,18	»
	32	16	16	3	0,18	»
D. ....	38	21	17	3,2	0,24	1,344
	34	21	13	3	0,23	1,343
	30	22	8	2	0,25	»
	32,5	20	12,5	3	0,24	1,344
E. ....	24	20	4	1	0,25	1,345
	23,5	20	3,5	1	0,28	1,346
	24	20	4	1	0,25	1,345
F. ....	30	23	7	1	0,14	1,341
	36	24	12	1,5	0,13	1,341

Il reste à dire quelques mots sur le procédé employé pour calculer les indices contenus dans le tableau précédent.



Soient  $n'$  l'indice de la dissolution pour une couleur donnée et  $n$  l'indice de l'eau ; on a la relation

$$(1) \quad \begin{cases} (n' - n)e = f\lambda, \\ n' - n = \frac{e}{f}\lambda, \end{cases}$$

équation qui détermine  $n'$  en fonction de  $n$ , pourvu que  $e$  soit évalué d'une manière exacte.

Comme il est difficile d'évaluer des longueurs absolues, on peut partir d'un indice connu, celui du rouge par exemple.

Soient donc  $n_1$  et  $n'_1$  les indices correspondant à la longueur d'onde  $\lambda_1$ , on a

$$n'_1 - n_1 = \left(\frac{f}{e}\right)_1 \lambda_1.$$

Combinant cette équation avec la précédente, on obtient la relation

$$n' - n = (n'_1 - n_1) \frac{\frac{f}{e}}{\left(\frac{f}{e}\right)_1} \frac{\lambda}{\lambda_1}.$$

Cette formule ne renferme plus que des rapports.

C'est ainsi qu'ont été calculés les indices, en adoptant pour indices de l'eau les nombres suivants :

Raie C . . . . .	1,331
Raie D . . . . .	1,333
Raie E . . . . .	1,335
Raie F . . . . .	1,337

L'indice de la raie C a été pris égal à 1,340 pour la dissolution. C'est le nombre qui résulte des expériences par la méthode de la réflexion totale.

On voit, à l'inspection des nombres, que les résultats obtenus par les deux méthodes sont concordants. Le degré d'approximation est à peu près le même.

Toutefois cette dernière méthode est d'une application plus difficile que la méthode de la réflexion totale. Cette difficulté relative des expériences ne m'a pas permis d'appliquer le procédé des interférences à des liquides plus nombreux. J'espère cependant pouvoir combler cette lacune.

---

### RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

Dans la première Partie de ce travail, j'ai cherché à déterminer la dispersion de l'iode, d'abord en mesurant les indices de réfraction de sa vapeur, et ensuite en déterminant la dispersion d'une solution d'iode dans le sulfure de carbone. Les deux méthodes conduisent à des résultats de même ordre et montrent que l'indice de réfraction de l'iode, pour la lumière rouge, est plus grand que pour la lumière violette.

La dispersion négative de l'iode est tout à fait comparable à la dispersion positive du flint.

Je me propose d'ailleurs de poursuivre l'étude des solutions d'iode et des autres substances analogues en faisant varier le titre des liqueurs employées.

Mes autres expériences ont eu pour but la détermination des indices de réfraction de quelques solutions colorées. Pour éviter les objections faites à la méthode directe du prisme, j'ai dû recourir à d'autres procédés.

Une première série d'expériences sur la réflexion totale, au contact du verre et du liquide, m'a conduit à des résultats en accord avec ceux de M. Kundt.

L'application des franges de Talbot m'a permis d'opérer par une méthode d'interférence et les résultats ont été les mêmes que les précédents.

Il résulte de ces expériences que les faits annoncés par MM. Le Roux, Christiansen et Kundt, peuvent se vérifier par des méthodes différentes de celles qui ont conduit à leur découverte.

Je ne puis terminer ce travail sans remercier M. Mascart de tous les bons conseils qu'il n'a cessé de me donner pendant tout le cours de ces recherches, entreprises dans son laboratoire.

FIN DU TOME SIXIÈME.

412a

---

# MÉMOIRE

## SUR LES MÉTHODES EMPLOYÉES

### POUR LA

## DÉTERMINATION DES COURBURES DES OBJECTIFS,

### ERRATA.

---

Page S. 10, ligne 10, *au lieu de* : Gibbert, *lisez* Gilbert.

- » S. 12, lignes 9, 10 et 11, *au lieu de la phrase* : « Je considère, etc., ... négatif », *lisez*  
« Je considère comme positifs les rayons des surfaces convexes ; les rayons des  
surfaces concaves seront négatifs. »

et exempts de tous défauts, susceptibles d'être associés pour donner des objectifs convenablement achromatiques, ont été écartées; et les méthodes si ingénieuses et si sûres de notre regretté L. Foucault ont permis d'obtenir une telle perfection dans l'exécution, qu'on peut espérer satisfaire les exigences les plus grandes de la Science.

Les physiciens, lorsqu'ils ont à leur disposition les échantillons des verres à employer, sont en possession de procédés suffisants de mesure des indices des rayons lumineux de toutes réfrangibilités, et le manque d'indications des moyens de déterminer les courbures à donner aux objectifs est seul à regretter.

Le *Traité d'Astronomie physique* de Biot contient, il est vrai, les notions théoriques sur lesquelles on peut s'appuyer pour cette détermination; mais elles ne sont pas présentées sous une forme facilement accessible à la

S. 1.

pratique. C'est cette lacune que je me suis efforcé de combler dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie.

Il renferme un résumé historique des travaux des grands géomètres qui ont étudié le problème de l'objectif astronomique, des formes qu'ils ont successivement proposées de lui donner, soit pour rendre les calculs plus faciles, soit pour lui faire acquérir des qualités qu'ils regardaient comme importantes.

Deux méthodes ont été proposées par eux. Dans l'une on cherche la valeur de l'aberration des rayons homogènes pour un point situé à une certaine distance du centre de la lentille, et exprimant qu'elle doit être nulle : on a ainsi entre les courbures la relation nécessaire pour que l'aberration de sphéricité soit détruite; puis, annulant aussi l'expression de l'aberration chromatique des rayons centraux de diverses réfrangibilités, on en déduit une nouvelle relation qui, combinée à la première, permet de détruire à la fois les deux aberrations. C'est la méthode *directe* employée par Clairaut, Euler, d'Alembert, Lagrange, et, plus tard, par W. Herschel.

L'autre méthode, dite *indirecte*, est due au professeur Klügel, de Hall (1778); elle a été suivie par Bohnenberger, Littrow, etc. Elle consiste à supposer à la première lentille une forme qui réponde à certaines conditions, puis à donner à la seconde des courbures qui détruisent les aberrations de la première, et cela en suivant par la voie trigonométrique la marche d'un rayon lumineux dans ses réfractions successives par les surfaces des lentilles. La destruction des aberrations n'étant généralement pas atteinte par le premier essai, on procède, par approximations successives, jusqu'à ce que le point de convergence de ce rayon et de l'axe soit constant, quelles que soient sa réfrangibilité et la position du point où il a rencontré la première surface.

Moins avantageuse que la première au point de vue de la recherche des courbures, cette méthode est précieuse pour vérifier avec quelle précision un objectif remplit les conditions requises; et dans certaines circonstances elle est la seule qui puisse être employée. Je les donne toutes les deux, débarrassées de ce qui, se présentant sous une forme trop générale, deviendrait étranger au sujet.

Les équations données par la méthode directe renferment des coefficients dont le calcul est assez long pour laisser prise à des erreurs; j'ai

duisait une confusion à laquelle on s'est proposé de remédier en associant à l'objectif simple une autre lentille d'une matière différente qui, exerçant sur chacun des rayons une action contraire à celle de la première, ramène définitivement en un même point de convergence aussi bien les rayons centraux ou marginaux de même réfrangibilité que les rayons de toute autre couleur (dans les limites où cette dernière condition est réalisable).

C'est en cela que consiste le double problème de l'achromatisme et de l'aplanétisme; et pour savoir exactement par qui il a été posé et à qui revient l'honneur de la réalisation, il faut consulter les volumes de l'*Histoire de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1756 et 1765 d'une part, et de l'autre les additions au deuxième volume de la traduction française de l'*Optique* de Smith, par le P. Pézénas, où l'historique de cette découverte se trouve complètement détaillé. Nous allons le résumer brièvement.

3. Dans un travail inséré, en 1747, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, Euler, se fondant sur l'achromatisme de l'œil et en même temps sur sa nature composée de divers milieux, conclut que ces deux circonstances devaient avoir entre elles un rapport nécessaire, et que, par l'emploi de milieux convenables, on devait pouvoir réaliser aussi une lunette exempte de dispersion, et il indique la voie analytique qui devait conduire au résultat qu'il espérait. A ces conclusions, un savant opticien de Londres, J. Dollond, opposa la huitième expérience de la Proposition III, Livre I, II<sup>e</sup> Partie de l'*Optique* de Newton, d'après laquelle, toute réfraction entraînant à une dispersion proportionnelle, l'une ne pouvait être détruite sans l'autre. Euler céda devant une pareille autorité; mais le grand nom de Newton n'arrêta pas Klengenstierna, célèbre professeur de l'Université d'Upsal, qui soumit ladite proposition à un examen approfondi et prouva mathématiquement qu'elle conduisait à des conséquences contradictoires. Il fit remettre, en 1755, un Mémoire sur ce sujet à J. Dollond, qui répéta les expériences de Newton, et, les trouvant inexactes, entreprit de réaliser le projet d'Euler avec des lentilles de verre et d'eau d'abord, puis avec du cristal anglais associé au verre à glaces. Le succès couronna son entreprise et la Science fut dotée d'une puissance nouvelle.

Les Mémoires scientifiques ne parlent pas de la légende de Hall et de ses deux ouvriers habitant deux faubourgs de Londres, etc. Le Parlement put bien lui accorder une consolation, mais la Société royale de Londres sanctionna les titres de Dollond en lui accordant la médaille de Copley.

4. Les données d'après lesquelles l'objectif achromatique doit être réalisé sont, on le sait, les suivantes :

1° La longueur focale qu'il doit avoir;

2° La relation qui exprime que les rayons centraux ou marginaux de la même réfrangibilité moyenne doivent converger en un même point;

3° La relation par laquelle les rayons centraux de diverses réfrangibilités convergeront également en ce même point.

Les inconnues, qui sont les quatre rayons de courbure des deux verres, étant en plus grand nombre que les relations données, le problème est indéterminé. Chacun des auteurs que nous avons cités a proposé, pour le déterminer, une quatrième condition, dans le but soit de donner de nouvelles qualités à la lunette, soit de rendre le travail plus facile, soit encore de simplifier les calculs qui sont, en général, assez prolixes.

5. Tout entier à ses recherches, Dollond n'ayant pas indiqué la route qu'il avait suivie dans le choix de ses verres et des courbes qu'il leur avait données, Clairaut entreprit de traiter le sujet qui nous occupe à l'aide d'une théorie complète, « pour n'avoir pas, dit-il, à copier servilement les lunettes de Dollond, ce qui eût peut-être été inutile, mais à coup sûr humiliant ». Cette théorie est contenue dans trois Mémoires insérés dans les volumes des années 1756, 1757, 1762 des *Mémoires de l'Académie des Sciences*. « Il y examine, avec le plus grand scrupule, la différence de réfrangibilité des différents verres ou cristaux qu'il emploie, la différente forme qu'on doit leur donner, les différentes combinaisons qu'on en peut faire, et le degré d'avantage ou de désavantage qui en résulte, et il tire de toutes ces discussions les différentes constructions des lunettes achromatiques ou sans couleurs; et l'expérience, souverain juge en cette matière, a suivi pas à pas toutes ses détermi-

nations. Il comptait parfaire son œuvre en donnant des Tables calculées pour les différents verres employés et un Précis de sa théorie à l'usage des opticiens, mais la mort ne lui en a pas laissé le temps. » (*Éloge de Clairaut*, 1765).

Il n'y a pas lieu, eu égard au but que nous nous proposons, de trop insister sur la méthode qu'il a suivie et qui s'est perfectionnée entre les mains des géomètres qui sont venus après lui ; mais nous devons remarquer que, parmi les formes d'objectif qu'il indique comme les plus avantageuses, il s'en trouve une que l'expérience a sanctionnée et qui, bien qu'applicable même à de grands objectifs, est exclusivement employée pour les petits. C'est celle dans laquelle les surfaces en contact du crown et du flint, ayant même rayon de courbure, s'appliquent exactement l'une sur l'autre dans toute leur étendue. Cette condition, jointe aux trois autres que nous avons indiquées plus haut, détermine complètement le problème et permet d'obtenir les quatre rayons de courbure de l'objectif. Nous y reviendrons dans la suite.

6. Quelques années plus tard, d'Alembert, reprenant le même sujet avec de nouveaux développements, donne, dans les volumes de l'Académie pour 1764, 1765 et 1767, trois Mémoires qui portent le titre d'*Observations sur les lunettes astronomiques*. Il y passe en revue un certain nombre de conditions nouvelles qui peuvent être choisies pour limiter le problème. En particulier, il propose, comme Clairaut le faisait aussi, de donner à l'objectif une forme qui permettrait de détruire l'aberration de sphéricité, non pas seulement pour les rayons de réfrangibilité moyenne comme on le fait ordinairement, mais aussi pour les rayons de toutes couleurs (*Opuscules*, t. III, art. 742). Cette idée a encore été reprise en 1818 (*Zeitschrift für Astronomie*, Lindenau et Bohnenberger) par Gauss, qui paraît avoir ignoré la priorité de Clairaut et d'Alembert. J.-W. Herschel la taxe un peu à tort de puérile (1821). Nous reviendrons plus tard sur cette solution de notre problème.

Il propose encore de corriger l'objectif, non-seulement pour les rayons partis d'un point pris sur l'axe, mais aussi pour les rayons venant d'un point situé en dehors de cet axe ; en d'autres termes, de rendre le champ tout entier également parfait autant que cela dépend de l'objectif.

Enfin il insiste avec quelque complaisance sur un moyen ingénieux,



inventé par lui pour modifier dans certaines limites, mais aux dépens de l'aplanétisme, l'état d'achromatisme de son objectif, en faisant varier l'écartement entre les deux verres (deuxième Mémoire, 1765, p. 71 et suivantes). Ce procédé, encore employé dans la pratique à titre de renseignement sur les corrections à faire subir aux rayons de courbure de l'objectif, a été étudié d'une manière complète, sous la forme de problèmes, par J.-W. Herschel (*Traité de la lumière*, §§ 479 à 483), qui montre comment, par son emploi, on peut parvenir à mesurer avec assez d'exactitude la valeur des rapports des pouvoirs dispersifs des deux verres de l'objectif. Mais Littrow, d'une part (*Zeitschrift für Physik*, Baumgartner et Ettinghausen, t. IV, p. 257), et Biot, de l'autre, ont démontré combien serait défectueuse cette disposition si elle était définitive.

7. Dans la période comprise entre 1757 et 1767, Euler publia dans divers volumes de l'*Histoire de l'Académie de Berlin* une série de Mémoires qui contribuèrent à fixer la théorie des lunettes. Les *Mémoires de l'Académie de Paris* ont reçu de lui un précis d'une théorie générale de la Dioptrique, qui prépare le lecteur à l'étude de la *Dioptrique* qu'il a publiée à Saint-Pétersbourg en 1770.

L'ensemble de ces travaux renferme ce que la science théorique a pu produire alors de plus parfait sur le sujet qui nous occupe, et sa *Dioptrique* en particulier est restée pendant longtemps le seul ouvrage consulté par ceux qui voulaient étudier cette question.

8. La méthode suivie jusqu'alors par les géomètres était toujours à peu près la même. Ils cherchaient l'expression de l'aberration des rayons homogènes passant par un point situé à une certaine distance du centre de la lentille et, égalant cette expression à zéro, ils avaient ainsi la relation entre les courbures qui détruisait l'aberration de sphéricité; puis, cherchant la valeur de l'aberration chromatique des rayons centraux de diverses couleurs, ils l'égalaient aussi à zéro : on en déduisait une nouvelle relation qui, combinée avec la première, permettait de détruire à la fois les deux aberrations.

Cette manière de procéder eût été irréprochable si, dans les expressions des aberrations, on eût pu employer les valeurs exactes des sinus

qui y entrent; mais, pour éviter une complication excessive, il a fallu se contenter des deux premiers termes de la série qui les représente. L'erreur qui en résulte n'est pas considérable, mais il était utile de trouver un moyen de contrôler les valeurs obtenues.

Le professeur Klügel, de Hall, donna dans le treizième volume des *Commentaires de Göttingen* (1778), sous le titre de *Dioptrique analytique*, un premier essai d'une méthode nouvelle, qui consiste à suivre trigonométriquement la marche des rayons à travers toutes les surfaces. Plus tard il revint sur le même sujet pour le perfectionner (vol. XXXIV des *Annales de Gibbert*, 1810). Mais si sa méthode convient parfaitement comme moyen de contrôle de résultats obtenus autrement, elle ne fournit qu'indirectement, et par voie d'approximations successives, les valeurs des rayons de courbure : elle est donc en cela inférieure à l'autre méthode, mais peut suppléer cependant à son impuissance dans certains cas où le calcul direct devient impossible. Elle a été surtout employée par son inventeur, par Bohnenberger, et enfin par Littrow.

Klügel avait proposé d'abord, comme condition définissant le problème, de rendre la lentille de crown équiconvexe; puis, dans une autre combinaison, il donna au rapport des rayons de la première et de la seconde surface de la lentille de crown la valeur de  $2 - n$  à  $n$  environ  $\frac{1}{3}$ . Les angles d'entrée et de sortie du rayon lumineux sont alors égaux, et sa déviation est la moindre possible.

10. Bohnenberger (*Zeitschrift für Astronomie*, Lindenau et Bohnenberger, t. I, 1816) critique le rapport choisi en ce qu'il laisse subsister, pour les rayons pour lesquels le calcul n'a pas été fait, une trop forte aberration, et montre, sous ce point de vue et sous celui de la correction chromatique au centre et aux bords, que le rapport de 2 à 3 convient mieux que celui de 1 à 3.

11. La méthode de Klügel a été reprise de nouveau par J.-J. Littrow (*Zeitschrift für Physik und Mathematik*, Baumgartner et Ettlinghausen, 1827), qui l'expose d'une manière très-nette, à l'aide d'une notation par laquelle l'application en devient plus symétrique et plus facile. Il la présente sous la forme de deux problèmes.

Le premier consiste à chercher si, dans un objectif déjà construit, ou seulement calculé d'après une règle donnée, le foyer des rayons centraux homogènes est le même que celui des rayons marginaux, et si les foyers des rayons centraux diversement colorés coïncident avec les premiers.

Dans le second, il se propose de déterminer les courbures d'un objectif de matières données, en prenant pour exemple le cas où la lentille de crown est équiconvexe, ainsi que l'avait fait primitivement Klügel. Mais, tandis que celui-ci, après avoir choisi les rayons de courbure de la lentille de crown, comme nous l'avons indiqué, cherchait à détruire l'aberration de sphéricité par la troisième surface, puis la dispersion chromatique par la quatrième, sans tenir compte de l'aberration que ramenait cette quatrième réfraction, parce qu'il la considérait comme négligeable, Littrow, au contraire, après avoir admis une valeur approchée de  $R_1$ , le premier rayon de la deuxième lentille, et en avoir déduit la valeur correspondante de  $R_2$  par la considération de l'achromatisme, soumet l'objectif ainsi obtenu au contrôle indiqué au premier problème. Alors, si les foyers des diverses sortes de rayons coïncident, l'objectif est déterminé avec exactitude; mais, si cette coïncidence n'a pas lieu, il essaye une nouvelle valeur de  $R_1$  et de  $R_2$  correspondant, et de la variation que ce changement apporte dans la situation relative des foyers, il déduit suivant la méthode des approximations successives la valeur d'une nouvelle correction à faire subir à  $R_1$  et à  $R_2$ , et ainsi de suite jusqu'à ce que la coïncidence des divers foyers soit suffisamment établie.

Quelques applications numériques données par lui mettent cette méthode à la portée de tous ceux à qui le calcul trigonométrique le plus élémentaire n'est pas complètement étranger. Plus tard il a complété son travail en donnant des Tables qui, à l'aide d'un calcul arithmétique très-simple, permettent de déterminer assez exactement les dimensions d'un objectif dont les verres ont des indices de réfraction et des pouvoirs dispersifs connus.

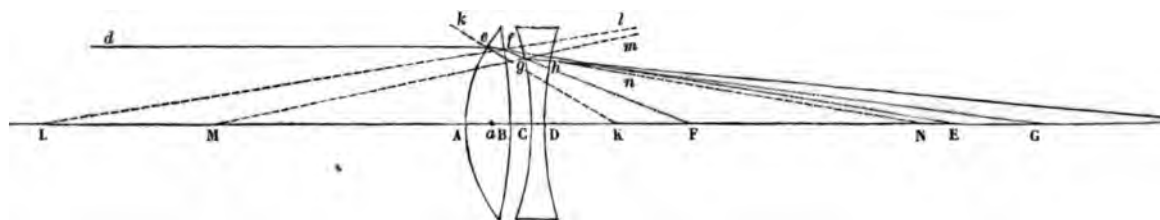
L'usage de ces Tables, qui ont été reproduites par Prechtl, est assez répandu dans la pratique en Allemagne.

12. Le problème de la vérification de l'aplanétisme et de l'achromatisme d'un objectif est assez important en lui-même et assez peu

connu en France pour qu'il me paraisse utile de donner ici l'exposé qu'en fait Littrow, d'après Klügel, en l'accompagnant de la figure donnée par ce dernier dans son Mémoire de 1810.

Nous appellerons, suivant la notation usuelle,  $n$  et  $n'$  les indices de réfraction des deux verres employés,  $dn$  et  $dn'$  leur dispersion ou différence des indices pour deux rayons donnés, et, pour abrégé, nous poserons  $\frac{dn}{dn'} = \pi$ . Les rayons des deux surfaces de la première lentille comptées en venant de l'objet seront  $R_1$  et  $R_2$ , ceux de la deuxième  $R_3$  et  $R_4$ . Je considère comme positifs les rayons des surfaces qui sont convexes vers l'objet; les rayons des surfaces qui lui présentent leur concavité seront négatifs. Nous désignerons par  $\alpha$  l'angle d'incidence que fait avec la première normale de la première surface réfringente le rayon parallèle à l'axe (le seul qu'il y ait lieu de considérer s'il ne s'agit que de la lunette astronomique); l'angle de réfraction correspondant à  $\alpha$  sera  $\alpha'$ ,  $b$  sera l'angle de deuxième incidence,  $\beta$  l'angle de réfraction correspondant. Pour la deuxième lentille, les angles analogues seront  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ ,  $b'$ ,  $\beta'$ .

Fig. 1.



Les prolongements successifs du rayon considéré après les diverses réfractions qu'il subit de la part des lentilles coupent l'axe en des points dont les distances aux première, deuxième, troisième et quatrième surfaces réfringentes sont appelées (dans leur ordre)  $A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$ , et enfin les angles formés avec l'axe en ces points par le rayon réfracté sont désignés par  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(A')$ ,  $(B')$ ; soit enfin  $e$  l'épaisseur de la première lentille,  $e'$  celle de la deuxième, et  $E$  l'écartement des deux verres pour tenir compte de cette quantité, qui est généralement très-petite.

Cela posé, les diverses directions du rayon réfracté forment, avec les rayons des surfaces et avec l'axe, des triangles rectilignes dans lesquels

les angles sont  $a, \alpha, b, \beta; a', \alpha', b', \beta'$  et  $(A), (B), (A'), (B')$ . La résolution de ces triangles s'obtient facilement par les expressions connues de la Trigonométrie rectiligne, et en tenant compte du signe des rayons des surfaces on a, pour la première réfraction du rayon,

$$(I) \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{n} \sin a = \frac{r}{R_1}, \\ (A) = a - \alpha, \\ A = \frac{R_1 \sin \alpha}{\sin(A)} + R_1; \end{cases}$$

pour la deuxième réfraction,

$$(II) \quad \begin{cases} \sin b = \frac{A + R_1 - e}{R_1} \sin(A), \\ \sin \beta = n \sin b, \\ (B) = (A) + \beta - b, \\ B = R_1 \frac{\sin \beta}{\sin(B)} - R_1; \end{cases}$$

pour la troisième,

$$(III) \quad \begin{cases} \sin \alpha' = (R_1 - B + E) \frac{\sin(B)}{R_1}, \\ \sin \alpha' = \frac{1}{n'} \sin a', \\ (A') = (B) + \alpha' - a', \\ A' = R_1 - R_1 \frac{\sin \alpha'}{\sin(A')}; \end{cases}$$

et enfin, pour la quatrième,

$$(IV) \quad \begin{cases} \sin b' = (R_1 - A' + e') \frac{\sin A'}{R_1}, \\ \sin \beta' = n' \sin b', \\ (B') = A' + b' - \beta', \\ B' = -R_1 - R_1 \frac{\sin \beta'}{\sin(B')}. \end{cases}$$

Ces expressions sont absolument exactes, quelque grand que soit l'angle d'incidence  $a$  du rayon.

Mais, pour trouver ces mêmes valeurs de  $A, B, A', B'$ , dans l'hypo-

thèse où le rayon rencontre la première surface réfringente à une distance très-petite de l'axe, nous n'avons, dans les équations précédentes, qu'à admettre que l'angle  $\alpha$  est assez petit pour qu'on puisse faire  $\sin \alpha = \alpha$ ,  $\sin \alpha = \alpha$ ; alors les quatre groupes d'équations ci-dessus nous donnent

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_1}{A} = \frac{n-1}{n}, \\ \frac{R_2}{B} = \frac{nR_2}{A-e} + n-1, \\ \frac{R_3}{A'} = \frac{R_3}{n'(B-E)} + \frac{n'-1}{n'}, \\ \frac{R_4}{B'} = \frac{n'R_4}{A'-e'} + n'-1; \end{array} \right.$$

mais comme, des quatre grandeurs  $A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$ , la dernière est de beaucoup la plus importante, comme donnant la distance du foyer des rayons après la quatrième réfraction, comptée à partir de la dernière surface réfringente, il sera convenable de chercher la valeur de  $B'$ , considérée simplement comme fonction de  $n$ ,  $n'$ ,  $e$ ,  $e'$  et  $E$ , expression qu'on obtiendra en éliminant les trois quantités  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  dans les équations (V).

Pour simplifier cette expression, nous négligerons les puissances deuxièmes et au-dessus des petites quantités  $e$  et  $e'$ , qui, surtout dans les grandes lunettes, sont peu importantes, et, en outre, nous ferons  $E = 0$ , parce que, en réalité, les deux surfaces intérieures de l'objectif ne sont séparées que par de minces feuilles d'étain, et qu'elles seraient même amenées au contact s'il n'en devait résulter des compressions et des altérations de surfaces qu'il convient d'éviter.

Cela posé, les équations (V) donnent

$$(VI) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{B'} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + (n'-1) \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) + \frac{(n-1)^2 e}{nR_1^2} \\ \quad + \left[ (n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{n'-1}{R_3} \right]^2 \frac{e'}{n'}. \end{array} \right.$$

13. Ces expressions nous mettent à même de soumettre un objectif à un examen très-sévère sous tous les points de vue.

D'abord, si l'on connaît  $n$ ,  $n'$ ,  $dn$ ,  $dn'$ , et les épaisseurs  $e$  et  $e'$  des

deux lentilles, on peut, à l'aide de l'équation (VI), trouver la valeur  $B'$  de la distance focale à partir de la quatrième surface.

Si l'on a pris pour  $n$  et  $n'$  leur valeur moyenne, on aura  $B'$  pour les rayons jaunes. Si, dans la même équation, on met ensuite à la place de  $n$  et de  $n'$  leurs valeurs  $n + dn$  et  $n' + dn'$ , on aura  $B'$  pour les rayons violets; et, en mettant  $n - dn$  et  $n' - dn'$ , on aura  $B'$  pour les rayons rouges; et, si ces trois valeurs de  $B'$  sont identiques, il est évident que, dans l'objectif double donné, l'aberration chromatique est détruite pour les rayons centraux.

Ensuite, pour s'assurer si l'aberration sphérique est détruite, on calcule  $B'$ , à l'aide des équations (I) à (IV), en se servant des valeurs moyennes de  $n$  et de  $n'$ , et, si la valeur de  $B'$ , ainsi obtenue, coïncide avec celle que fournit l'équation (VI), il est évident que l'aberration de sphéricité est détruite ou, en d'autres termes, que tous les rayons d'indice moyen, aussi bien ceux qui tombent au centre que ceux qui tombent sur les bords de l'objectif sous un angle de  $\alpha^\circ$ , viennent, après la quatrième réfraction, se réunir au même point de l'axe, ce qui est, pour la netteté de la vision, une qualité essentielle à toute bonne lunette.

Enfin, pour être sûr que les rayons marginaux donnent une image achromatique, on reprend la résolution des équations (I) à (IV), en mettant  $n + dn$  et  $n' + dn'$  à la place de  $n$  et de  $n'$  pour les rayons violets, et  $n - dn$ ,  $n' - dn'$  pour les rayons rouges; et, si les deux valeurs de  $B'$ , ainsi obtenues, s'accordent, l'aberration chromatique est aussi détruite pour les rayons marginaux, et l'objectif répond à toutes les conditions nécessaires à la netteté de la vision, en faisant abstraction des autres propriétés matérielles, telles que la limpidité et l'homogénéité de la matière, etc., qui ne peuvent entrer dans le calcul.

L'exposé qui précède suffit pour guider le lecteur dans la vérification d'un objectif quelconque pour lequel  $n$ ,  $n'$ ,  $dn$ ,  $dn'$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  sont connus. Littrow en fait l'application à deux exemples, l'un d'après d'Alembert, l'autre d'Herschel; mais, dans les deux, il commet des erreurs graves sur la détermination du rapport  $\frac{dn}{dn'}$  et sur le choix de l'angle d'incidence du rayon sur la première surface, qu'il prend beaucoup plus grand qu'on ne peut l'admettre, ce qui le conduit à rejeter,

comme mauvais, des objectifs qui remplissent très-bien, au contraire, les conditions du problème. Nous aurons, plus tard, à vérifier un objectif d'Herschel d'après cette méthode, et nous pourrons reconnaître que, loin de présenter les imperfections que lui attribue Littrow, il offre, au contraire, toutes les qualités désirables.

14. La méthode suivie par les géomètres qui avaient précédé Klügel a été reprise et perfectionnée par J.-F.-W. Herschel, dans son *Mémoire Sur les aberrations des lentilles composées et sur les objectifs* (*Philosophical Transactions*, vol. CXI; 1821). Il y donne une théorie complète de ces systèmes optiques, dans laquelle il établit les relations qui expriment la valeur des aberrations des surfaces et des lentilles; il étudie ensuite les moyens qui permettent de rendre nulles ces aberrations, et arrive ainsi à des équations facilement résolubles, qui fournissent avec exactitude les courbures qu'il convient de donner à un objectif pour lui faire acquérir les qualités requises.

Dans les formules qu'il donne, il emploie les inverses des quantités qu'on fait ordinairement entrer dans ce genre de calcul. A la longueur focale, il substitue le *pouvoir* de la lentille; au rayon, la *courbure*; à la distance du point lumineux, sa *proximité*, etc. Les propositions de l'optique géométrique et ses notations prennent ainsi une forme plus simple et plus claire, qu'il y aurait tout avantage à conserver.

Quelques années plus tard, le professeur Simon Stampfer, de l'Institut impérial et royal polytechnique de Vienne, a, dans le volume XIII de l'*Annuaire* de cet Institut (1828), reproduit, avec quelques modifications, le travail d'Herschel, en employant la même notation que lui; mais il se proposait surtout de retrouver les bases sur lesquelles s'était appuyé Fraunhofer pour arriver à construire les objectifs si parfaits dont il a doté la Science.

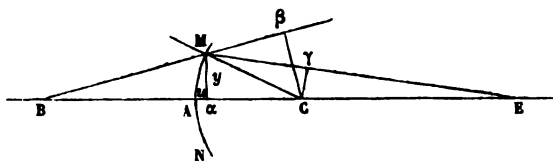
Pour atteindre ce but, Stampfer commença par déterminer, à l'aide d'une méthode indirecte, les indices, les rapports de dispersion et les courbures de sept objectifs de Fraunhofer, et, comparant les résultats de son analyse avec ceux de la théorie d'Herschel, il arrive à trouver entre eux une concordance parfaite, par suite de l'introduction d'une hypothèse nouvelle sur la quatrième relation, qui permet de définir le problème des objectifs.



La *fig. 3* nous donne

$$\frac{BC}{BM} = \frac{C\beta}{M\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{CE}{EM} = \frac{C\gamma}{M\alpha};$$

Fig. 3.



d'où

$$(1) \quad \frac{BC}{CE} = \frac{BM}{EM} \frac{C\beta}{C\gamma},$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{MA}^2 = (D + u)^2 + \gamma^2 \quad \text{et} \quad \gamma^2 = 2Ru - u^2;$$

d'où

$$\overline{BM}^2 = D^2 + 2u(D + R),$$

$$BM = D + u \frac{D + R}{D} - \frac{1}{2} u^2 \frac{(D + R)^2}{D^3} + \frac{1}{2} u^3 \frac{(D + R)^3}{D^5} - \dots;$$

de même

$$EM = F - u \frac{F - R}{F} + \frac{1}{2} u^2 \frac{(F - R)^2}{F^3} - \frac{1}{2} u^3 \frac{(F - R)^3}{F^5} + \dots$$

et

$$u = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{R} + \frac{1}{8} \frac{\gamma^4}{R^3} + \frac{1}{16} \frac{\gamma^6}{R^5} + \dots;$$

mais,  $\gamma$  et  $u$  étant toujours très-petits par rapport à  $D$ ,  $R$ ,  $F$ , ..., on néglige les puissances de  $\gamma$  supérieures à la deuxième, et l'on se contente de prendre

$$\begin{aligned} u &= \frac{\gamma^2}{2R}, & BM &= D + \frac{\gamma^2}{2} \frac{D + R}{RD}, & EM &= F - \frac{\gamma^2}{2} \frac{F - R}{RF}, \\ & & &= \frac{1}{d} + \frac{\gamma^2}{2} (r + d), & &= \frac{1}{f} - \frac{\gamma^2}{2} (r - f), \end{aligned}$$

et, comme  $\frac{C\beta}{C\gamma} = \mu = \frac{1}{m}$ , l'équation (1) devient

$$m \frac{r + d}{r - f} = \frac{1 + d(r + d) \frac{\gamma^2}{2}}{1 - f(r - f) \frac{\gamma^2}{2}} \quad \text{ou} \quad r - f = m(r + d) \frac{1 - f(r - f) \frac{\gamma^2}{2}}{1 + d(r + d) \frac{\gamma^2}{2}}.$$

Multipliant les deux termes de la fraction par  $1 - d(r + d) \frac{y^2}{2}$  et négligeant les termes en  $y^4$ ,

$$r - f = m(r + d) \left[ 1 - \frac{y^2}{2} f(r - f) + d(r + d) \right];$$

d'où

$$f = (1 - m)r - md + m(r + d) \frac{y^2}{2} [f(r - f) + d(r + d)].$$

La dernière parenthèse étant multipliée par  $\frac{y^2}{2}$ , le produit  $f(r - f)$  doit être débarrassé des termes qui contiennent  $y$  et se réduire à  $[(1 - m)r - md]m(r + d)$ ; la valeur de  $f$  devient alors

$$f = (1 - m)r - md + m(r + d)^2 [(1 - m)mr - m^2d + d] \frac{y^2}{2}$$

ou

$$(2) \quad f = (1 - m)r - md + m(1 - m)(r + d)^2 [mr + (1 + m)d] \frac{y^2}{2}.$$

La partie dépendante de  $y$  répond à ce qu'on appelle l'*aberration de sphéricité*.

Pour les rayons incidents infiniment voisins de l'axe,

$$y = 0 \quad \text{et} \quad f_1 = (1 - m)r - md.$$

16. Soit maintenant une seconde surface, de courbure  $\rho$  et d'indice  $m_1$ , en contact avec la première, le rayon qui allait couper l'axe en E ira le couper en un autre point E', dont la proximité par rapport à la surface sera

$$f_2 = (1 - m_1)\rho - m_1d_1,$$

et, comme ici  $d_1 = -f_1$ , on aura

$$f_2 = (1 - m_1)\rho + m_1f_1 = (1 - m_1)\rho + m_1(1 - m)r - m_1md.$$

Si l'ensemble de ces deux surfaces forme une lentille dont les deux faces sont plongées dans le même milieu,  $mm_1 = 1$ , d'où  $m_1 = \mu$ , et la valeur de  $f_2$  devient

$$f_2 = (\mu - 1)(r - \rho) - d;$$

si le rayon incident est parallèle à l'axe de la lentille,  $d = 0$ , et la

valeur particulière que prend alors  $f_2$ , et qui est la distance focale principale inverse de la lentille ou ce que nous appellerons son *pouvoir principal*, et que nous désignerons par  $l$ , est

$$l = (\mu - 1)(r - \rho);$$

de même

$$l' = (\mu' - 1)(r' - \rho'), \dots$$

Dans le cas où la proximité  $d$  n'est pas nulle, le pouvoir  $f$  de la lentille est

$$f = l - d;$$

de même, pour une seconde lentille,

$$f' = l' - d',$$

et, si cette seconde lentille est en contact avec la première,  $d' = -f$ ; d'où il résulte que le pouvoir du système de ces deux lentilles est égal à

$$f = l + l' - d;$$

pour trois lentilles,

$$f = l + l' + l'' - d, \dots$$

17. L'équation (2) nous a donné, pour la variation de  $f$  due à l'aberration de sphéricité,

$$\Delta f = m(1 - m)(r + d)^2 [mr + (1 + m)d] \frac{\gamma^2}{2};$$

pour une seconde surface, la variation de  $f$  se compose d'abord de celle qui est due à ce que  $f_1$  est devenu  $f_1 + \delta f_1$ , ce qui fait que

$$f_2 = (1 - m)\rho + m(f_1 + \delta f_1);$$

puis, secondement, de la nouvelle aberration due à la seconde surface. Il en résulte que la variation, pour une lentille, est

$$\Delta f = \mu \delta f_1 + \delta f_2.$$

Or, d'après l'équation (2),

$$\delta f_2 = \mu(1 - \mu)(\rho - f_1)^2 [\rho\mu - (1 + \mu)f_1] \frac{\gamma^2}{2}.$$

Si donc on met à la place de  $f_1$  sa valeur  $(1 - m)r - md = \frac{1}{\mu}[(\mu - 1)r - d]$

et se rappelant que  $l = (\mu - 1)(r - \rho)$ , après calculs faits, et posant

$$\mu^3 A = (2 - 2\mu^2 + \mu^3)r^2 + (\mu + 2\mu^2 - 2\mu^3)r\rho + \mu^3\rho^2,$$

$$\mu^3 B = (4 + 3\mu - 3\mu^2)r + (\mu + 3\mu^2)\rho,$$

$$\mu^3 C = 2 + 3\mu,$$

il vient pour la variation de  $f$  due à l'aberration de sphéricité pour une lentille

$$\Delta f = \frac{\gamma^2}{2} \mu^2 l (A + B d + C d^2).$$

Si les rayons reçus par la lentille sont parallèles à l'axe,  $d = 0$  et alors

$$\Delta f = \frac{\gamma^2}{2} \mu^2 l A.$$

Dans le cas de plusieurs lentilles et en se rappelant que

$$d' = -(l - d),$$

$$d'' = -(l + l' - d) \dots,$$

$$\Delta f = \frac{\gamma^2}{2} [\mu^2 l (A + B d + C d^2) + \mu'^2 l' (A' + B' d' + C' d'^2) + \dots].$$

18. Les notions qui précèdent nous permettent de résoudre le problème de l'objectif double. Nous chercherons d'abord à trouver la relation entre les pouvoirs des deux lentilles qui le composent, d'après laquelle les rayons de diverse réfrangibilité qui tombent parallèlement dans le voisinage du centre seront amenés à converger en un même point. Les indices et pouvoirs  $\mu, f, l$  devraient se rapporter au rayon le plus brillant du spectre; aujourd'hui il est plus commode de les rapporter à la raie du sodium et les mêmes quantités pour les rayons d'autre réfrangibilité seront  $\mu + \delta\mu$  et  $f + \delta f$ . Les épaisseurs et écartements des verres continueront à être considérés comme nuls.

Dans le cas que nous étudions,

$$f = (\mu - 1)(r - \rho) + (\mu' - 1)(r' - \rho').$$

Pour les rayons dont la réfrangibilité est  $\mu + \delta\mu$  dans le premier verre, elle sera  $\mu' + \delta\mu'$  dans le second, et en mettant ces deux valeurs

dans la relation précédente et retranchant, il vient

$$\delta f = \delta \mu (r - \rho) + \delta \mu' (r' - \rho').$$

Cette valeur doit être nulle pour que l'objectif soit achromatique.

Or, puisque

$$l = (\mu - 1)(r - \rho) \quad \text{et} \quad l' = \mu' - 1(r' - \rho')$$

ou

$$r - \rho = \frac{l}{\mu - 1} \quad \text{et} \quad r' - \rho' = \frac{l'}{\mu' - 1},$$

la condition d'achromatisme pourra s'exprimer par

$$0 = \frac{l}{\mu - 1} \delta \mu + \frac{l'}{\mu' - 1} \delta \mu'$$

ou

$$0 = l\omega + l' \quad \text{ou} \quad \omega = -\frac{l'}{l},$$

en posant

$$\omega = \frac{\delta \mu}{\mu - 1} : \frac{\delta \mu'}{\mu' - 1}$$

ou encore

$$\omega = \frac{\delta \mu}{\delta \mu'} \times \frac{\mu' - 1}{\mu - 1}.$$

$\frac{\delta \mu}{\mu - 1}$  est ce qu'on appelle le *pouvoir dispersif*,  $\omega$  est donc le *rapport des pouvoirs dispersifs*, et les pouvoirs des lentilles sont entre eux comme les termes de ce rapport.

On voit facilement d'ailleurs, d'après les relations qui précèdent, que dans l'objectif achromatique on a

$$\frac{r' - \rho'}{r - \rho} = -\frac{\delta \mu}{\delta \mu'},$$

$\delta \mu$  étant ce qu'on appelle la *dispersion*.

Le rapport  $\frac{\delta \mu}{\delta \mu'}$  est le *rapport de dispersion*; on le désigne souvent par  $\pi$ : il ne faut pas, comme l'a fait Littrow dans son étude sur un objectif d'Herschel, le confondre avec le rapport précédent  $\omega$ .

19. On peut chercher à détruire l'aberration chromatique pour les rayons parallèles qui passent à une distance  $y$  de l'axe.

Lorsqu'on veut achromatiser l'objectif en tous ses points, l'équation

$$o = l\omega + l' + \frac{\gamma^2}{2} (l\omega X + l'X')$$

doit être satisfaite pour toute valeur de  $\gamma$ , et, par suite, on doit avoir séparément

$$o = l\omega + l',$$

$$o = X - X'.$$

Ces équations sont celles qui répondent au problème posé par Clairaut, repris par d'Alembert et par Gauss ensuite.

20. Nous chercherons maintenant comment peut se corriger l'aberration de sphéricité dans l'objectif double. L'équation qui donne la variation  $\Delta f$  dépendant de l'aberration de sphéricité est

$$\Delta f = \frac{\gamma^2}{2} \{ \mu^2 l (\Lambda + Bd + Cd^2) + \mu'^2 l' [A' + B'(l - d) + C'(l - d)^2] \}$$

ou

$$\Delta f = \frac{\gamma^2}{2} (M + Nd + Pd^2),$$

en posant

$$M = \mu^2 l \Lambda + \mu'^2 l' (A' - B'l + C'l^2),$$

$$N = \mu^2 l B + \mu'^2 l' (B' - 2C'l),$$

$$P = \mu^2 l C + \mu'^2 l' C',$$

ou, en remplaçant A, B, C, A', B', C' par leurs valeurs données plus haut,

$$M = \frac{\mu + 2}{\mu} l r^2 - \frac{2\mu + 1}{\mu - 1} l^2 r + \frac{\mu' + 2}{\mu'} l' r'^2 - \left( \frac{4\mu' + 4}{\mu'} ll' + \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} l'^2 \right) r' \\ + \frac{\mu^2}{(\mu - 1)^2} l^3 + \frac{3\mu' + 2}{\mu'} l^2 l' + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} l'^3 + \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} ll'^2,$$

$$N = \frac{4\mu + 4}{\mu} l r + \frac{4\mu' + 4}{\mu'} l' r' - \left( \frac{3\mu + 1}{\mu - 1} l^2 + \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} l'^2 + \frac{6\mu' + 4}{\mu'} ll' \right),$$

$$P = \frac{3\mu + 2}{\mu} l + \frac{3\mu' + 2}{\mu'} l'.$$

Pour que l'objectif soit aplanétique pour des rayons venant d'un

de l'équation (II), après l'avoir de nouveau multiplié tout entier par  $\frac{l(1-\omega)}{n}$ ,

$$M + d(N + Pd) = 0.$$

3° Équation à joindre à l'une des précédentes pour corriger la dispersion sur toute la surface de l'objectif :

$$(III) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\mu^2 + 2}{\mu^2} r^2 - \frac{4\mu - 1}{\mu - 1} lr - \frac{\mu'^2 + 2}{\mu'^2} r'^2 + \left[ \frac{\mu'^2 + 4}{\mu'^2} + \frac{\mu' - 4}{\mu'(\mu' - 1)} \omega \right] lr' \\ &+ \left[ \frac{3\mu' - 2\mu}{(\mu - 1)^2} - \frac{3\mu'^2 + 2}{\mu'^2} + \frac{4}{\mu'(\mu' - 1)} \omega - \frac{\omega^2}{(\mu' - 1)^2} \right] l^2. \end{aligned} \right.$$

Ces trois équations renferment pour inconnues les courbures  $r$  et  $r'$ ; on aura les deux autres courbures  $\rho$ ,  $\rho'$  en les tirant des valeurs de  $l$  et de  $l'$

$$l = (\mu - 1)(r - \rho) \quad \text{et} \quad l' = -\omega l = (\mu' - 1)(r' - \rho'),$$

qui donnent

$$\rho = r - \frac{l}{\mu - 1}, \quad \rho' = r' + \frac{\omega l}{\mu' - 1}.$$

Leur calcul se simplifie encore si l'on prend  $l$  pour unité; dans ce cas, le pouvoir de l'objectif achromatique est  $f = (1 - \omega)$ : il faut donc, pour avoir les courbures répondant à un pouvoir donné  $f_1$ , multiplier les nombres fournis par l'équation par le rapport  $\frac{f_1}{1 - \omega}$ .

22. Dans ce résumé de la méthode d'Herschel, j'ai dû laisser de côté toutes les considérations sur l'action d'un nombre quelconque de surfaces ou de lentilles, comme étrangères au sujet restreint qui nous occupe. Elles ont, du reste, été étudiées de la manière la plus complète par Euler, Lagrange, Möbius, etc.

J'ai négligé l'influence de l'épaisseur des verres, parce que les travaux de Gauss sont un meilleur guide pour traiter cette question que les méthodes jusqu'alors employées, et Stampfer, §§ 17 à 20, a montré par une analyse détaillée que, soit au point de vue de l'achromatisme, soit à celui de l'aplanétisme, dans l'objectif astronomique construit sur les données d'Herschel ou sur celles de Fraunhofer, il n'y a pas lieu de tenir compte de l'épaisseur des verres.

Il y avait d'ailleurs une autre raison pour agir ainsi; les quantités négligées dans les diverses phases du calcul ne sont pas les seules causes d'imperfection : le travail des verres ne saurait être absolument parfait et la sphéricité des surfaces qu'on admet en théorie n'est jamais complètement obtenue; les aberrations qui en résultent se combinent avec celles qui peuvent provenir des quantités négligées, de manière à faire échapper la perfection à tout calcul.

Les méthodes de L. Foucault peuvent heureusement remédier à tous ces défauts, fussent-ils même beaucoup plus graves que ceux que laissent subsister un calcul et une exécution convenables. Il ne faut donc demander à la théorie que de fournir une approximation suffisante pour que les défauts soient modérés, et les méthodes dont nous parlons permettront d'obtenir toute la perfection possible.

23. Les trois équations que nous venons d'établir n'ont pas toutes la même importance. Il est parfaitement évident que la première exprime à elle seule toutes les conditions que doit remplir l'objectif de la lunette astronomique; mais, comme elle renferme deux inconnues, elle ne peut déterminer le problème qu'avec l'aide d'une autre relation entre les mêmes inconnues. C'est le choix de cette relation auxiliaire qui a divisé les géomètres, chacun d'eux en apportant une nouvelle à l'exclusion de toutes les autres. Nous allons les passer en revue, chercher ce que chacune d'elles peut avoir d'avantageux et comment on peut l'introduire dans le calcul de l'objectif astronomique.

24. Parmi les solutions proposées par Euler, il en est une qui paraît, au premier abord, présenter des avantages : c'est celle qui consiste à rendre minimum l'aberration due à la lentille de crown. Ce résultat est atteint, comme on le sait, en faisant  $\frac{r}{\rho} = -\frac{\mu(2\mu+1)}{4+\mu-2\mu^2}$  (pour  $\mu = 1,524$ ,  $\rho = 0,1366r$ ). Mais, dans les tentatives qui ont été faites dans cette voie, il résulte, d'après les calculs de Gauss, que l'aberration de sphéricité n'est détruite dans l'objectif entier que jusqu'à une distance de l'axe assez petite et qu'au delà elle est proportionnelle à  $y^4$ ; on ne peut alors donner à l'objectif qu'une ouverture assez restreinte, ce qui est le contraire du but qu'on se proposait.



Si, en conservant le même rapport de  $\frac{r'}{\rho}$ , on s'arrange de manière à détruire l'aberration au centre et vers les bords, la méthode de calcul de Klügel montre qu'il en reparait une quantité encore trop considérable vers les  $\frac{7}{10}$  de la distance du centre aux bords.

Cette forme a été abandonnée.

25. Clairaut a proposé plusieurs formes qui présentent certains avantages.

La première, sur laquelle il insiste le plus et que la pratique a sanctionnée en effet, est celle dans laquelle les surfaces des deux verres qui se regardent ont même courbure et s'appliquent exactement l'une sur l'autre. Elle offre de grandes facilités d'exécution et le centrage des verres, qui est très-important pour la beauté des images, est rendu par là plus facile et plus stable.

On lui a objecté que, pour certaines variétés de verres, le calcul donne des valeurs imaginaires pour les courbures. Cela arrive, en effet, lorsque, les indices des verres étant peu différents, le rapport des pouvoirs dispersifs n'est guère plus grand que  $\frac{1}{2}$ ; mais cette circonstance se présente assez rarement pour qu'on ne doive pas à cause d'elle rejeter une méthode qui est la seule praticable dans le cas des petits objectifs: il vaut mieux alors changer l'un des verres.

Pour introduire cette condition dans notre calcul, il faut écrire que

$$r' = \rho = r - \frac{1}{\mu - 1} \quad \text{ou} \quad r = r' + \frac{1}{\mu - 1}$$

dans le cas où nous avons fait  $l = 1$ ; alors on substitue cette valeur de  $r$  dans l'équation (I), qui peut être mise sous la forme

$$Ar^2 - Br - Cr'^2 + Dr + E - F = 0,$$

et ayant posé  $\frac{1}{\mu - 1} = \alpha$ , on trouve, après réductions,

$$(A - C) r'^2 + (D + 2A\alpha - B) r' + A\alpha^2 + E - B\alpha - F = 0,$$

d'où

$$r' = \frac{-(D + 2A\alpha - B) \pm \sqrt{(D + 2A\alpha - B)^2 - 4(A - C)(A\alpha^2 + E - B\alpha - F)}}{2(A - C)}.$$

On trouve toutes ces quantités  $A, B, A\alpha, \dots$  dans les Tables que j'ai dressées pour abréger le calcul des objectifs.

Le même auteur propose encore de détruire l'aberration de sphéricité pour les rayons de différentes couleurs, question que d'Alembert a étudiée aussi quelques années plus tard avec plus de détails, et que Gauss a reprise encore, ainsi que cela est dit plus haut.

Pour résoudre ce problème, il faut combiner ensemble les équations (I) et (III).

L'équation qui en résulte est du quatrième degré et a deux racines réelles. On en obtient une valeur approchée par une construction graphique et l'on corrige successivement les racines trouvées. La forme de cet objectif est désavantageuse, et M. Steinheil seul l'a réalisée une fois sur les nombres fournis par Gauss.

26. D'Alembert, outre le système dont nous venons de parler, en avait proposé d'autres. En particulier, il voulait rendre l'objectif aplanétique pour les axes obliques, de manière à donner une égale netteté à tous les points du champ admis par l'oculaire. Cette condition, peu importante dans la plupart des cas, rendrait au contraire de grands services pour les instruments méridiens qui doivent avoir un champ étendu. Elle mériterait d'être reprise.

27. Klügel avait d'abord, ainsi qu'il est dit plus haut, donné à sa lentille de crown des courbures égales; Clairaut l'avait proposé aussi, et Littrow y est revenu plus tard. Le mérite de cette disposition est de donner le maximum de pouvoir à un crown d'épaisseur limitée et, par suite, à la lunette la plus grande ouverture par rapport à sa longueur.

Le calcul de cet objectif est facile. Ayant fait  $l = 1$ , on a

$$r = \rho = \frac{1}{2(\mu - 1)}.$$

Cette valeur de  $r$  étant portée dans l'équation (I), celle-ci n'a plus que  $r'$  pour inconnue et se résout facilement. J'ai d'ailleurs dressé une Table renfermant la valeur des termes en  $r$ ; elle simplifie le calcul, qui donne par cette méthode des résultats plus exacts que ceux qui sont fournis par les Tables de Littrow.

L'autre choix fait par Klügel pour les courbures du crown, c'est-à-dire

$\frac{r}{\rho} = \frac{\mu}{2 - \mu}$ , et celui de Bohnenberger  $\frac{r}{\rho} = \frac{3}{2}$ , n'offrent aucun avantage sérieux et n'ont pas été adoptés par la pratique.

28. Nous avons vu plus haut que les équations (I) et (II) donnent les courbures d'un objectif devant servir à la fois pour les rayons parallèles et pour ceux qui divergent d'un point de proximité  $d = \frac{f}{n}$ . D'après l'analyse qu'en a faite Stampfer, les objectifs de Fraunhofer sont construits sur cette donnée,  $n$  ayant été pris par lui égal à 40, c'est-à-dire le point lumineux étant à 40 fois la distance focale principale. Cette seconde condition paraît au premier abord ne pas avoir d'importance pour l'objectif astronomique; cependant on peut remarquer que, par suite de la réalisation de l'aplanétisme pour deux valeurs de  $d$  très-voisines l'une de l'autre, l'aberration ne saurait croître que très-lentement dans leur voisinage et pour de très-faibles variations dans les courbures. Ce résultat est d'ailleurs vérifié par une analyse directe.

Herschel a été guidé par les mêmes considérations, et il a pris  $d$  assez petit pour que, tenant compte de  $d$ , on pût négliger  $d^2$ ; il n'y a alors qu'à satisfaire à l'équation (I) et à l'équation (II), dans laquelle on aura supprimé le terme en  $\frac{l(1 - \omega)}{n}$ .

Les deux méthodes d'Herschel et de Fraunhofer donnent des résultats peu différents l'un de l'autre. Ainsi, en les appliquant à deux verres pour lesquels

$$\pi = 1,5308, \quad \mu' = 1,6165, \quad \omega = -\frac{l}{l'} = 0,631724$$

et pour une distance focale  $F = 60,880$ , Stampfer a trouvé :

	Selon Herschel.	D'après Fraunhofer, objectif du cercle méridien de Kasan.	Équation (I) et (II).
$R_1$ .....	41,2973	41,800	41,768
$R_2$ .....	— 16,7188	— 16,638	— 16,643
$R_3$ .....	— 17,0497	— 16,972	— 16,970
$R_4$ .....	— 77,2266	— 75,653	— 75,609

Ces différences sont, on le voit, assez faibles et les qualités des objectifs

sont sensiblement les mêmes. L'ouverture de ces objectifs étant  $2\gamma = 4$ , l'influence de l'épaisseur négligée a été calculée et a donné une variation du foyer  $\Delta F = 0,00025$ , quantité absolument négligeable.

Enfin, ces deux objectifs ont été soumis aux vérifications que nous donne la méthode de Klügel. On a suivi la marche d'un rayon arrivant sur la première surface sous un angle de  $2^\circ 44'$ , ce qui correspond à  $\gamma = 1,9694$ ; par suite, très-voisin des bords, puisque la demi-ouverture  $= 2$ .

	Objectifs	
	Fraunhofer.	Herschel.
<i>a</i> .....	$2.44'. 0''$	$2.44'. 0''$
$\alpha$ .....	$1.47. 6,614$	$1.47. 6,614$
(A).....	$0.56.53,386$	$0.56.53,386$
A.....	$120,39830$	$119,04155$
<i>b</i> .....	$7.48.47,412$	$7.42.15,112$
$\beta$ .....	$12. 0.40,141$	$11.50.31,972$
(B).....	$5. 8.46,115$	$5. 5.10,246$
B.....	$21,96992$	$21,98212$
<i>a'</i> .....	$11.52.39,100$	$11.42.35,295$
$\alpha'$ .....	$7.18.54,030$	$7.12.45,487$
(A').....	$0.35. 1,045$	$0.35.20,438$
A'.....	$195,1550$	$191,1829$
<i>b'</i> .....	$2. 5.18,851$	$2. 2.44,580$
$\beta'$ .....	$3.22.38,571$	$3.18.28,930$
( $\beta'$ ).....	$1.52.20,765$	$1.51. 4,788$
B' foyer des rayons marginaux..	$60,7151$	$60,7126$
Foyer des rayons centraux.....	$60,7154$	$60,7131$
Diff...	$0,0003$	$0,0005$

Ces différences devraient encore être diminuées de  $0,0002$ , à cause de l'influence de l'épaisseur des verres. Les objectifs peuvent donc être considérés comme parfaits. Au point de vue de l'exécution, ils présentent encore cet avantage que les petits défauts inévitables de fabrication ont peut-être moins d'influence fâcheuse qu'avec toute autre forme.

Avec des verres convenablement choisis, on peut arriver à trouver, pour les surfaces en regard,  $\rho$  et  $\rho'$  les mêmes courbures, et alors l'objectif jouit, à la fois, des avantages que nous venons d'énumérer et de ceux que donne la méthode de Clairaut.

L'expérience a, du reste, prononcé en leur faveur et les lunettes construites par Fraunhofer ont été surpassées en dimensions, mais non en perfection.

29. Herschel a donné une Table qui renferme les rayons des quatre surfaces d'objectifs construits avec un crown d'indice 1,524 et un flint de 1,585 avec diverses valeurs du rapport  $\omega$  des pouvoirs dispersifs; il y a joint les moyens d'interpolations nécessaires pour obtenir les résultats qui correspondent à d'autres indices. Les résultats de ces interpolations ont été donnés par P. Barlow; ils sont contenus dans le n° 28 du *Journal d'Édimbourg*, et Prechtel les a reproduits, mais ils ne donnent qu'une approximation insuffisante. C'est pourquoi j'ai dressé des Tables qui renferment les coefficients des équations (I) et (II), afin qu'on puisse faire facilement le calcul direct des courbures. Elles conviennent également à toute forme dans laquelle on tient compte de l'équation (I) qui renferme les conditions les plus essentielles pour un objectif astronomique. Les solutions proposées par Clairaut, Littrow seront ainsi facilement réalisées.

30. Il y a cependant telles formes avantageuses qui ne peuvent être calculées par la méthode d'Herschel. Ce sont, en particulier, celles qui conviennent aux objectifs pour lesquels l'influence de l'épaisseur peut être considérable, ou celles dont les conditions ne peuvent être représentées par des expressions algébriques. Comme exemple de ces dernières, je citerai la disposition qui a été proposée par M. Prazmowski et dans laquelle les rayons traversent l'objectif tout entier sous le minimum de déviation. Cette condition, qui en sa qualité de limite paraît présenter des avantages au point de vue de la stabilité, est remplie lorsque le produit des cosinus des angles d'incidence du rayon à chaque surface est égal au produit des cosinus des angles de réfraction correspondants, ou d'après la notation que nous avons employée dans l'exposé de la méthode de Klügel quand on a

$$\cos a \cos b \cos a' \cos b' = \cos \alpha \cos \beta \cos \alpha' \cos \beta'.$$

(Voir la condition analogue pour les prismes, éq. (i), § 216, *Traité de la lumière*, par Herschel, en remarquant qu'ici  $\mu\mu' = \mu''\mu''' \dots = 1$ .)

Cette méthode se trouve alors en quelque sorte imposée, et l'on a, pour se guider dans les essais successifs qu'on doit faire pour arriver à satisfaire à la condition énoncée, la constance du rapport de la somme des courbures des deux verres  $\frac{r-r'}{r'-r'}$ , qui doit rester égal à  $\frac{\delta\mu'}{\delta\mu}$ .

M. Prazmowski a bien voulu me communiquer les éléments d'un objectif qu'il a réalisé sur ces données.

$$\begin{aligned}\mu &= 1,502, \quad \mu' = 1,6303; \\ \pi &= \frac{\delta\mu}{\delta\mu'} = 0,45951 \quad \text{pour les rayons centraux;} \\ & \quad 0,46236 \quad \text{pour les marginaux;} \\ \omega &= \frac{\delta\mu}{\delta\mu'} \frac{\mu' - 1}{\mu - 1} = 0,57696; \\ R_1 &= -R_4 = 540, \quad R_2 = R_3 = -202. \\ \text{Distance focale} &= 685.\end{aligned}$$

Le rayon, faisant un premier angle d'incidence =  $3^{\circ}, 30$ , rencontre les surfaces :

	Sous les angles	
	d'incidence.	de réfraction.
Première surface...	$\alpha \quad 3.30'$	$\alpha \quad 2.20'$
Deuxième » ...	$b \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 10.39$	$\beta \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 9.48$
Troisième » ...	$\alpha' \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$	$\alpha' \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$
Quatrième » ...	$b' \quad 3.49$	$\beta' \quad 6.14$

Cet objectif, employé avec une ouverture considérable, a montré de grandes qualités.

31. On peut se demander quelles sont, en fin de compte, celles de ces solutions d'un problème indéterminé qui conviennent le mieux au sujet qui nous occupe, à la construction des grands instruments d'Astronomie. On peut répondre, d'une manière générale, que ce sont celles pour lesquelles de légères variations dans la valeur des courbures font naître les moindres défauts, celles pour lesquelles l'achromatisme et l'aplanétisme sont le plus stables. Mais les conditions pratiques se sont singulièrement modifiées depuis un certain nombre d'années. La fabrication des verres d'optique a fait de grands progrès, non-seule-

ment au point de vue de la pureté et des dimensions des pièces qu'on peut obtenir, mais aussi à celui de la variété de leur nature chimique et physique, de telle sorte qu'on peut arriver, par cette voie, non plus seulement à adapter la forme à la nature du verre, mais à choisir une nature de verre qui convienne à la forme qu'on veut employer : c'est ce qu'on fait, en particulier, pour les objectifs de Photographie et pour ceux du microscope.

Les objectifs astronomiques peuvent aussi profiter de cette latitude, qui permettra d'employer la solution que je crois des meilleures, c'est-à-dire celle qui répond à la fois à la méthode de Clairaut ( $\rho = r'$ ) et à celles d'Herschel et Fraunhofer. On réunit ainsi les conditions de stabilité et les avantages des deux formes, ce qui me paraît surtout désirable, parce que les défauts de travail, les résidus d'aberrations, peuvent être alors combattus sans crainte par la méthode des retouches, qui est sans doute très-puissante et permettrait de combattre même de très-graves défauts dus à l'aberration de sphéricité; mais il est infiniment plus sage de rendre les défauts les plus faibles possible d'abord, afin de pouvoir rendre ensuite les retouches plus légères et exécutables avec des outils de dimension suffisante pour assurer la continuité de la surface : c'est, du reste, de cette manière que L. Foucault entendait faire l'emploi de ses méthodes.

32. C'est dans le but de rappeler les nombreuses solutions qui ont été mises en avant pour le problème de l'objectif, et pour en faciliter le calcul, que j'ai entrepris ce Mémoire et que j'ai dressé les Tables qui suivent. Je ne me suis pas proposé, comme Herschel et Littrow, de donner des calculs tout faits, dans lesquels les opticiens n'eussent qu'à relever directement les courbures à donner à leurs verres, attendu que, comme je l'ai déjà dit, ces Tables ne conviennent pas seulement à une forme déterminée, mais aussi à toutes celles pour lesquelles le calcul direct peut être employé. Quelques mots suffiront pour faire comprendre leur disposition.

Les équations (I) et (II), dans lesquelles on a fait  $l = 1$ , étant mises sous la forme

$$0 = Ar^2 - Br - Cr'^2 + Dr' + E - F,$$

$$0 = Gr - Hr' - J + K + \frac{1-\omega}{n} (L - M),$$

la Table I donne les valeurs des coefficients

$$A = \frac{\mu + 2}{\mu}, \quad B = \frac{2\mu + 1}{\mu - 1}, \quad E = \left( \frac{\mu}{\mu - 1} \right)^2, \quad G = \frac{4\mu + 4}{\mu},$$

$$J = \frac{3\mu + 1}{\mu - 1}, \quad L = \frac{3\mu + 2}{\mu}, \quad \alpha = \frac{1}{\mu - 1},$$

qui se rapportent à l'indice  $\mu$  du crown.

Les Tables réunies sous le titre II contiennent les coefficients relatifs à la fois à l'indice  $\mu'$  du flint (variant par 0,005) <sup>(1)</sup> et au rapport  $\omega$  des pouvoirs dispersifs  $= \frac{\partial \mu}{\mu - 1} : \frac{\partial \mu'}{\mu' - 1}$ ; ce sont

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \left( \frac{\mu'}{\mu' - 1} \right)^2 \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1}.$$

La Table III donne les coefficients réunis des équations qui conviennent aux solutions proposées, l'une par Clairaut et l'autre par Klügel, Littrow, etc.;

Enfin le Tableau IV donne les puissances de  $\omega$  qui entrent dans le calcul de C, D, ..., et, en outre, les valeurs de  $\frac{1}{1 - \omega}$  ou de la longueur focale de l'objectif pour lequel  $l = 1$ . C'est le nombre par lequel il faut multiplier  $r, \rho, r', \rho'$  pour avoir les valeurs de ces courbures qui correspondent à  $f = 1$ .

33. Pour mieux faire comprendre l'usage de ces Tables, nous allons calculer les courbures d'un objectif, et nous mettrons en présence les formes qu'il prend, selon qu'on admet la solution de Clairaut, celle d'Herschel ou enfin celle de Littrow.

Nous prendrons pour nos exemples les sortes de verres que W. Herschel a choisies lui-même comme types. Le crown aura pour indice  $\mu = 1,524$ , le flint  $\mu' = 1,585$ , et  $\omega$  sera égal à 0,60.

(1) Pour avoir ceux qui se rapportent à des variations par 0,001, on peut procéder soit par interpolation très-simple d'ailleurs, puisque dans ce cas les différences secondes au plus sont constantes, soit par calcul direct, en prenant les facteurs en  $\mu'$  dans la Table I et ceux en  $\omega$  dans la Table IV.



1° Clairaut, faisant coïncider, dans toute leur étendue, une surface du crown et une surface du flint, on a  $r' = \rho$ ; cette condition nous donne, ainsi qu'on l'a vu plus haut,

$$r' = \frac{-(D + 2A\alpha - B) \pm \sqrt{(D + 2A\alpha - B)^2 - 4(A - C)(A\alpha^2 + E - B\alpha - F)}}{2(A - C)}.$$

La Table I donne, pour  $\mu = 1,524$ ,

$$B = 7,72519, \quad A = 2,31234, \quad E = 8,45877, \quad \alpha = 1,90840.$$

Dans la Table II, on trouve

$$C = 1,35710, \quad D = 1,34804, \quad F = 0,60119, \quad \alpha' = 1,02564,$$

et enfin les valeurs de

$$2A\alpha = 8,82571, \quad A\alpha' = 8,42148, \quad B\alpha = 14,74273$$

se trouvent dans la Table III.

En effectuant la substitution de ces valeurs dans l'équation ci-dessus, il vient

$$D + 2A\alpha - B = 2,44856, \quad A - C = 0,95524, \quad A\alpha + E - B\alpha - F = 1,53633.$$

d'où

$$r' = \frac{-2,44856 \pm \sqrt{(2,44856)^2 - 4 \times 0,95524 \times 1,53633}}{1,91048},$$

$$r' = \frac{-2,44856 \pm 0,353823}{1,91048};$$

avec le signe +,

$$r' = -1,09644, \quad r = r' + \alpha = 1,90840 - 1,09644 = 0,81196;$$

avec le signe - ,

$$r' = -1,46684, \quad r = r' + \alpha = 1,90840 - 1,46684 = 0,44156.$$

On a donc pour les quatre courbures, avec le signe + ,

$$r = 0,81196,$$

$$\rho = r' = -1,09644,$$

$$\rho' = r' - \alpha' = 1,02564 - 1,09644 = -0,0708,$$

d'où

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{r} = 1,23159, \\ R_2 &= R_3 = -0,912043, \\ R_4 &= -14,124 \text{ (convexe);} \end{aligned}$$

avec le signe  $-$ ,

$$\begin{aligned} r &= 0,44156, \\ \rho &= r' = -1,46684, \\ \rho' &= 1,02564 - 1,46684 = -0,44120, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} R_1 &= 2,26470, \\ R_2 &= R_3 = -0,68175, \\ R_4 &= -2,26655 \text{ (convexe).} \end{aligned}$$

Pour avoir les rayons de courbure dans le cas où c'est la longueur focale de l'objectif que l'on prend pour unité, il faut multiplier les valeurs de  $R_1, \dots$ , ci-dessus par  $1 - \omega = 0,4$ , ce qui donne, avec le signe  $+$ ,

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,492636, \\ R_2 &= R_3 = 0,364817, \\ R_4 &= 5,6496, \end{aligned}$$

avec le signe  $-$ ,

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,90588, \\ R_2 &= R_3 = 0,27270, \\ R_4 &= 0,90661. \end{aligned}$$

2° Herschel, ainsi qu'on l'a vu plus haut, détermine les courbures de l'objectif à l'aide de l'équation (I) et de l'équation (II), dans laquelle il ne tient pas compte des termes  $L$  et  $M$ .

Si dans les termes qui restent nous mettons, à la place de  $GHJK$ , leurs valeurs, nous obtenons

$$r = \frac{Hr' + J - K}{G} = \frac{3,91419r' + 9,06093}{6,62467};$$

reportant cette valeur de  $r$  dans l'équation (I), où  $A, B, C, \dots$  auront été

remplacés par les nombres donnés par les Tables I et II, on trouve d'abord

$$\begin{aligned} A r^2 &= 0,807248 r^2 + 3,73738 r' + 4,32582, \\ - B r &= - 4,56443 r' - 10,56617, \\ - C r'^2 &= - 1,357100 r'^2, \\ + D r' + E - F &= 1,34804 r' + 8,45877 - 0,60119. \end{aligned}$$

et, réductions faites,

$$0,54985 r'^2 - 0,521 r' - 1,61723 = 0;$$

d'où

$$r' = \frac{0,521 \pm 1,9566}{1,0997}$$

(le signe + donnerait une forme inadmissible en pratique), ou

	Pour $l=1$ .	Pour $F=1$ .	Les Tables d'Herschel donnent pour $F=10$ .
$r' = - 1,30546$ .....	$- R_1 = 0,766$	$0,30640$	$3,0640$
$r = \frac{- 5,109831 + 9,06093}{6,62467} = 0,59642$ .	$R_1 = 1,67677$	$0,670687$	$6,7069$
$\rho = 0,59642 - 1,9084 = - 1,31198$ ...	$- R_2 = 0,76219$	$0,304876$	$3,0488$
$\rho' = 1,02564 - 1,30546$ $= - 0,27982$ (convexe). }	$R_2 = 3,5737$	$1,42948$	$14,2937$

3° Si enfin on fait le crown équiconvexe,  $r$  et  $\rho$  sont déterminés; car alors,  $l$  étant 1, on a

$$r = \rho = \frac{1}{2(\mu - 1)}.$$

Les termes en  $r^2$  et  $r$  peuvent donc être calculés d'avance: la Table III nous les donne en effet. L'équation (I) se trouve alors transformée en la suivante :

$$C r'^2 - D r' + F - (A r^2 - B r + E) = 0,$$

ou, dans l'exemple actuel,

$$\begin{aligned} 1,35710 r^2 - 1,34804 r' + 0,60119 - 3,19278 &= 0, \\ r' &= \frac{1,34804 - 3,98565}{2,7142} = \frac{- 2,63761}{2,7142} = - 0,97178; \end{aligned}$$

d'où les valeurs suivantes pour les courbures et les rayons :

	$l = 1.$	$F = 1.$
$r = -\rho = 0,954198 \dots \dots \dots$	$R_1 = -R_2 = 1,048$	$0,4192$
$r' = -0,97178 \dots \dots \dots$	$R_3 = -1,02905$	$0,41162$
$\rho' = 1,02564 - 0,97178 = 0,05386.$	$R_4 = 18,5666$ concave	$7,42666$

Les Tables de Littrow, qui sont construites pour obtenir, non pas l'aplanétisme pour une ouverture modérée, mais la concordance du foyer des rayons centraux avec celui des rayons qui rencontrent la première surface sous une incidence de 10 degrés, donnent, pour  $l = 1$  et  $\pi = 0,60 \times \frac{1,524}{1,585}$ ,

$$R_1 = -R_2 = 1,048, \quad R_3 = -1,03636, \quad R_4 = 16,480.$$

La différence des rayons  $R_2$  et  $R_3$  est un peu moins grande que dans le résultat du calcul direct.

Si enfin nous rangeons ces objectifs d'après la courbure de la première surface, nous trouvons pour la longueur focale  $L$ , prise pour unité :

D'après Littrow.	Clairaut avec le signe +.	Herschel.	Clairaut avec le signe --.
$R_1 = 0,4192$	$0,4926$	$0,6707$	$0,9059$
$R_2 = 0,4192$	$0,3648$	$0,3048$	$0,2727$
$R_3 = 0,41162$	$0,3648$	$0,3064$	$0,2727$
$R_4 = 7,4266$ concave	$5,6496$ convexe	$1,4294$	$0,9066$



## TABLES POUR LE CALCUL DES OBJECTIFS.

I. — ÉQUATION DONNANT LES COUREURES DE L'OBJECTIF APLANÉTIQUE ET ACHROMATIQUE  
POUR LES RAYONS PARALLÈLES ( $l$  ÉTANT ÉGAL A 1).

$$o = \frac{\mu + 2}{\mu} r^2 - \frac{2\mu + 1}{\mu - 1} r - \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega r^2 + \left[ \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 \right] r \\ + \frac{\mu^2}{(\mu - 1)^2} - \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega + \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 - \frac{\mu^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

ou

$$o = A r^2 - B r - C r'^2 + D r' + E - F.$$

II. — ÉQUATION DONNANT LES COUREURES POUR LES RAYONS PARALLÈLES ET POUR CEUX  
UI ÉMANENT D'UN POINT DE PROXIMITÉ  $d = \frac{f}{n} = \frac{1 - \omega}{n}$ .

$$o = (I) \quad \text{et} \quad o = \frac{4\mu + 4}{\mu} r - \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega r' - \frac{3\mu + 1}{\mu - 1} + \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 \\ + \frac{1 - \omega}{n} \left[ \frac{3\mu + 2}{\mu} - \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega' \right],$$

ou

$$o = G r - H r' - J + K + \frac{1 - \omega}{n} [L - M].$$

TABLE I.

$\mu$	A $\frac{\mu+2}{\mu}$	B $\frac{2\mu+1}{\mu-1}$	E $\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}$	G $\frac{4\mu+4}{\mu}$	J $\frac{3\mu+1}{\mu-1}$	L $\frac{3\mu+2}{\mu}$	$\alpha$ $\frac{1}{\mu-1}$
1,500	2,33333	8,00000	9,00000	6,66666	11,00000	4,33333	2,00000
1,501	2,33244	7,98802	8,97607	6,66489	10,98403	4,33245	1,99601
1,502	2,33156	7,97610	8,95225	6,66311	10,96813	4,33156	1,99223
1,503	2,33067	7,96421	8,92857	6,66134	10,95229	4,33067	1,98807
1,504	2,32979	7,95238	8,90501	6,65957	10,93651	4,32978	1,98413
1,505	2,32890	7,94060	8,88158	6,65781	10,92079	4,32890	1,98020
1,506	2,32802	7,92885	8,85829	6,65604	10,90514	4,32802	1,97628
1,507	2,32714	7,91716	8,83508	6,65428	10,88955	4,32714	1,97239
1,508	2,32626	7,90551	8,81201	6,65252	10,87402	4,32626	1,96850
1,509	2,32538	7,89391	8,78907	6,65076	10,85856	4,32538	1,96464
1,510	2,32450	7,88235	8,76624	6,64900	10,84312	4,32450	1,96078
1,511	2,32363	7,87084	8,74354	6,64725	10,82780	4,32362	1,95695
1,512	2,32275	7,85938	8,72095	6,64550	10,81251	4,32275	1,95313
1,513	2,32188	7,84795	8,69848	6,64375	10,79726	4,32188	1,94932
1,514	2,32100	7,83658	8,67612	6,64201	10,78210	4,32100	1,94553
1,515	2,32013	7,82524	8,65388	6,64025	10,76700	4,32013	1,94175
1,516	2,31926	7,81395	8,63175	6,63852	10,75294	4,31926	1,93798
1,517	2,31839	7,80271	8,60974	6,63678	10,73694	4,31839	1,93423
1,518	2,31752	7,79150	8,58784	6,63505	10,72200	4,31752	1,93050
1,519	2,31666	7,78035	8,56605	6,63336	10,70713	4,31665	1,92678
1,520	2,31579	7,76923	8,54438	6,63158	10,69230	4,31579	1,92308
1,521	2,31492	7,75816	8,52281	6,62985	10,67754	4,31492	1,91939
1,522	2,31406	7,74713	8,50136	6,62812	10,66284	4,31406	1,91571
1,523	2,31320	7,73614	8,48001	6,62640	10,64818	4,31320	1,91205
1,524	2,31234	7,72519	8,45877	6,62467	10,63359	4,31234	1,90840
1,525	2,31147	7,71429	8,43764	6,62295	10,61905	4,31148	1,90476
1,526	2,31062	7,70342	8,41662	6,62123	10,60456	4,31062	1,90114
1,527	2,30976	7,69260	8,39570	6,61951	10,59013	4,30976	1,89753
1,528	2,30890	7,68182	8,37489	6,61780	10,57576	4,30890	1,89394
1,529	2,30804	7,67108	8,35418	6,61609	10,56144	4,30804	1,89036
1,530	2,30719	7,66038	8,33357	6,61438	10,54717	4,30719	1,88679

TABLE I. (SUITE.)

$\mu$	A $\frac{\mu+2}{\mu}$	B $\frac{2\mu+1}{\mu-1}$	E $\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}$	G $\frac{4\mu+4}{\mu}$	J $\frac{3\mu+1}{\mu-1}$	L $\frac{3\mu+2}{\mu}$	$\alpha$ $\frac{1}{\mu-1}$
1,530	2,30719	7,66038	8,33357	6,61438	10,54717	4,30719	1,88679
1,531	2,30634	7,64972	8,31307	6,61267	10,53296	4,30634	1,88324
1,532	2,30548	7,63910	8,29267	6,61097	10,51880	4,30548	1,87970
1,533	2,30463	7,62852	8,27237	6,60926	10,50470	4,30463	1,87617
1,534	2,30378	7,61797	8,25217	6,60756	10,49064	4,30378	1,87266
1,535	2,30293	7,60748	8,23207	6,60586	10,47664	4,30293	1,86916
1,536	2,30208	7,59701	8,21207	6,60417	10,46269	4,30208	1,86567
1,537	2,30124	7,58659	8,19218	6,60247	10,44879	4,30124	1,86220
1,538	2,30039	7,57621	8,17237	6,60078	10,43494	4,30039	1,85874
1,539	2,29955	7,56586	8,15267	6,59909	10,42115	4,29954	1,85529
1,540	2,29870	7,55555	8,13306	6,59740	10,40741	4,29870	1,85185
1,541	2,29786	7,54528	8,11354	6,59572	10,39371	4,29786	1,84843
1,542	2,29702	7,53505	8,09413	6,59403	10,38007	4,29702	1,84502
1,543	2,29618	7,52486	8,07481	6,59235	10,36648	4,29618	1,84162
1,544	2,29534	7,51471	8,05558	6,59067	10,35294	4,29534	1,83824
1,545	2,29450	7,50459	8,03645	6,58900	10,33945	4,29450	1,83486
1,546	2,29366	7,49450	8,01740	6,58732	10,32601	4,29366	1,83150
1,547	2,29282	7,48446	7,99845	6,58565	10,31261	4,29282	1,82815
1,548	2,29199	7,47445	7,97960	6,58398	10,29927	4,29199	1,82482
1,549	2,29115	7,46448	7,96083	6,58231	10,28597	4,29116	1,82149
1,550	2,29032	7,45454	7,94215	6,58065	10,27272	4,29032	1,81818
1,551	2,28949	7,44465	7,92356	6,57898	10,25953	4,28949	1,81488
1,552	2,28866	7,43478	7,90506	6,57732	10,24638	4,28866	1,81160
1,553	2,28783	7,42495	7,88665	6,57566	10,23327	4,28783	1,80832
1,554	2,28700	7,41516	7,86833	6,57400	10,22022	4,28700	1,80505
1,555	2,28617	7,40540	7,85009	6,57235	10,20721	4,28617	1,80180
1,556	2,28525	7,39568	7,83195	6,57069	10,19425	4,28535	1,79856
1,557	2,28452	7,38600	7,81388	6,56904	10,18133	4,28452	1,79533
1,558	2,28370	7,37634	7,79590	6,56739	10,16846	4,28370	1,79211
1,559	2,28287	7,36673	7,77801	6,56575	10,15563	4,28287	1,78891
1,560	2,28205	7,35714	7,76021	6,56410	10,14286	4,28205	1,78572

TABLE I. (SUITE.)

$\mu$	A $\frac{\mu + 2}{\mu}$	B $\frac{2\mu + 1}{\mu - 1}$	E $\frac{\mu^2}{(\mu - 1)^2}$	G $\frac{4\mu + 4}{\mu}$	J $\frac{3\mu + 1}{\mu - 1}$	L $\frac{3\mu + 2}{\mu}$	$\alpha$ $\frac{1}{\mu - 1}$
1,560	2,28205	7,35714	7,76021	6,56410	10,14286	4,28205	1,78572
1,561	2,28123	7,34760	7,74248	6,56246	10,13012	4,28123	1,78253
1,562	2,28041	7,33808	7,72484	6,56082	10,11744	4,28041	1,77936
1,563	2,27959	7,32860	7,70728	6,55918	10,10479	4,27959	1,77620
1,564	2,27877	7,31915	7,68980	6,55754	10,09220	4,27877	1,77305
1,565	2,27795	7,30973	7,67241	6,55591	10,07965	4,27796	1,76991
1,566	2,27714	7,30035	7,65510	6,55428	10,06714	4,27714	1,76678
1,567	2,27632	7,29100	7,63786	6,55265	10,05467	4,27632	1,76367
1,568	2,27551	7,28169	7,62071	6,55102	10,04225	4,27551	1,76056
1,569	2,27470	7,27241	7,60363	6,54940	10,02988	4,27470	1,75747
1,570	2,27388	7,26316	7,58664	6,54777	10,01754	4,27388	1,75439
1,571	2,27307	7,25394	7,56973	6,54615	10,00525	4,27307	1,75131
1,572	2,27226	7,24476	7,55289	6,54453	9,99300	4,27227	1,74825
1,573	2,27145	7,23560	7,53612	6,54291	9,98080	4,27146	1,74520
1,574	2,27065	7,22648	7,51944	6,54130	9,96864	4,27065	1,74216
1,575	2,26984	7,21739	7,50284	6,53968	9,95652	4,26984	1,73913
1,576	2,26904	7,20833	7,48630	6,53807	9,94444	4,26904	1,73611
1,577	2,26823	7,19931	7,46985	6,53646	9,93241	4,26823	1,73310
1,578	2,26743	7,19031	7,45347	6,53485	9,92042	4,26743	1,73010
1,579	2,26662	7,18135	7,43716	6,53325	9,90846	4,26662	1,72712
1,580	2,26582	7,17241	7,42093	6,53165	9,89655	4,26582	1,72414
1,581	2,26502	7,16351	7,40477	6,53004	9,88468	4,26502	1,72117
1,582	2,26422	7,15464	7,38868	6,52844	9,87285	4,26422	1,71821
1,583	2,26342	7,14580	7,37267	6,52685	9,86106	4,26342	1,71526
1,584	2,26263	7,13699	7,35673	6,52525	9,84932	4,26262	1,71233
1,585	2,26183	7,12820	7,34086	6,52366	9,83760	4,26183	1,70940
1,586	2,26103	7,11945	7,32506	6,52207	9,82594	4,26103	1,70649
1,587	2,26024	7,11073	7,30933	6,52048	9,81431	4,26024	1,70358
1,588	2,25944	7,10204	7,29368	6,51889	9,80272	4,25944	1,70068
1,589	2,25865	7,09338	7,27809	6,51731	9,79117	4,25865	1,69779
1,590	2,25786	7,08475	7,26257	6,51572	9,77966	4,25786	1,69491

S.6.



TABLE I. (SUITE.)

$\mu$	A $\frac{\mu+2}{\mu}$	B $\frac{2\mu+1}{\mu-1}$	E $\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}$	G $\frac{4\mu+4}{\mu}$	J $\frac{3\mu+1}{\mu-1}$	L $\frac{3\mu+2}{\mu}$	$\alpha$ $\frac{1}{\mu-1}$
1,590	2,25786	7,08475	7,26257	6,51572	9,77966	4,25786	1,69491
1,591	2,25707	7,07614	7,24712	6,51414	9,76819	4,25707	1,69205
1,592	2,25628	7,06757	7,23174	6,51256	9,75675	4,25628	1,68919
1,593	2,25549	7,05902	7,21643	6,51098	9,74536	4,25549	1,68634
1,594	2,25470	7,05051	7,20118	6,50941	9,73401	4,25470	1,68350
1,595	2,25392	7,04202	7,18600	6,50784	9,72269	4,25392	1,68067
1,596	2,25313	7,03356	7,17089	6,50627	9,71141	4,25313	1,67785
1,597	2,25235	7,02513	7,15585	6,50470	9,70017	4,25235	1,67504
1,598	2,25156	7,01672	7,14087	6,50313	9,68896	4,25156	1,67224
1,599	2,25078	7,00835	7,12596	6,50156	9,67780	4,25078	1,66945
1,600	2,25000	7,00000	7,11111	6,50000	9,66666	4,25000	1,66666
1,601	2,24922	6,99168	7,09633	6,49844	9,65557	4,24922	1,66389
1,602	2,24844	6,98339	7,08161	6,49688	9,64452	4,24844	1,66113
1,603	2,24766	6,97513	7,06696	6,49532	9,63350	4,24766	1,65837
1,604	2,24688	6,96689	7,05237	6,49377	9,62252	4,24688	1,65563
1,605	2,24611	6,95868	7,03784	6,49221	9,61157	4,24611	1,65289
1,606	2,24533	6,95050	7,02337	6,49066	9,60066	4,24533	1,65016
1,607	2,24455	6,94234	7,00897	6,48911	9,58979	4,24455	1,64745
1,608	2,24378	6,93421	6,99463	6,48756	9,57895	4,24378	1,64474
1,609	2,24301	6,92611	6,98035	6,48602	9,56814	4,24301	1,64204
1,610	2,24224	6,91803	6,96614	6,48447	9,55738	4,24224	1,63935
1,611	2,24147	6,90998	6,95198	6,48293	9,54665	4,24147	1,63666
1,612	2,24070	6,90196	6,93789	6,48139	9,53595	4,24069	1,63399
1,613	2,23993	6,89397	6,92385	6,47985	9,52529	4,23993	1,63132
1,614	2,23916	6,88599	6,90987	6,47832	9,51466	4,23916	1,62866
1,615	2,23839	6,87805	6,89596	6,47678	9,50406	4,23839	1,62602
1,616	2,23762	6,87013	6,88211	6,47525	9,49350	4,23762	1,62338
1,617	2,23686	6,86224	6,86830	6,47372	9,48298	4,23686	1,62075
1,618	2,23610	6,85437	6,85457	6,47219	9,47249	4,23610	1,61812
1,619	2,23533	6,84653	6,84090	6,47066	9,46204	4,23533	1,61551
1,620	2,23457	6,83871	6,82726	6,46914	9,45161	4,23457	1,61290

TABLE I. (SUITE.)

$\mu$	A $\frac{\mu+2}{\mu}$	B $\frac{2\mu+1}{\mu-1}$	E $\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}$	G $\frac{4\mu+4}{\mu}$	J $\frac{3\mu+1}{\mu-1}$	L $\frac{3\mu+2}{\mu}$	$\alpha$ $\frac{1}{\mu-1}$
1,620	2,23457	6,83871	6,82726	6,46914	9,45161	4,23457	1,61290
1,621	2,23381	6,83092	6,81370	6,46761	9,44121	4,23380	1,61031
1,622	2,23305	6,82315	6,80019	6,46609	9,43087	4,23305	1,60772
1,623	2,23229	6,81541	6,78674	6,46457	9,42054	4,23228	1,60514
1,624	2,23153	6,80769	6,77334	6,46305	9,41025	4,23153	1,60256
1,625	2,23077	6,80000	6,76000	6,46154	9,40000	4,23077	1,60000
1,626	2,23001	6,79233	6,74672	6,46002	9,38978	4,23001	1,59744
1,627	2,22926	6,78469	6,73349	6,45851	9,37959	4,22926	1,59490
1,628	2,22850	6,77707	6,72031	6,45700	9,36943	4,22850	1,59236
1,629	2,22775	6,76948	6,70720	6,45549	9,35930	4,22775	1,58983
1,630	2,22699	6,76191	6,69413	6,45399	9,34920	4,22699	1,58730
1,631	2,22624	6,75436	6,68112	6,45248	9,33914	4,22624	1,58469
1,632	2,22549	6,74684	6,66816	6,45098	9,32911	4,22549	1,58228
1,633	2,22474	6,73934	6,65526	6,44948	9,31911	4,22474	1,57978
1,634	2,22399	6,73186	6,64241	6,44798	9,30914	4,22399	1,57739
1,635	2,22324	6,72441	6,62961	6,44648	9,29921	4,22324	1,57480
1,636	2,22249	6,71698	6,61687	6,44499	9,28931	4,22249	1,57232
1,637	2,22175	6,70957	6,60418	6,44349	9,27944	4,22175	1,56986
1,638	2,22100	6,70219	6,59153	6,44200	9,26959	4,22100	1,56740
1,639	2,22025	6,69484	6,57894	6,44051	9,25978	4,22026	1,56494
1,640	2,21951	6,68750	6,56640	6,43903	9,25000	4,21951	1,56250
1,641	2,21877	6,68019	6,55392	6,43754	9,24025	4,21877	1,56006
1,642	2,21803	6,67290	6,54148	6,43605	9,23053	4,21803	1,55763
1,643	2,21729	6,66563	6,52910	6,43457	9,22084	4,21728	1,55521
1,644	2,21655	6,65838	6,51676	6,43309	9,21117	4,21655	1,55280
1,645	2,21581	6,65116	6,50448	6,43161	9,20155	4,21580	1,55039
1,646	2,21507	6,64396	6,49224	6,43013	9,19195	4,21507	1,54799
1,647	2,21433	6,63678	6,48005	6,42866	9,18238	4,21433	1,54560
1,648	2,21359	6,62963	6,46792	6,42719	9,17073	4,21359	1,54321
1,649	2,21285	6,62250	6,45583	6,42571	9,16333	4,21286	1,54083
1,650	2,21212	6,61538	6,44378	6,42424	9,15384	4,21212	1,53846

TABLE II.

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\omega^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 1}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,580.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,24620	1,42275	0,58715	3,59240	1,69869	2,34620	0,94827
0,56	1,26881	1,40845	0,58853	3,65771	1,67416	2,38886	0,96552
0,57	1,29151	1,39272	0,59043	3,72303	1,64765	2,43152	0,98272
0,58	1,31412	1,37555	0,59289	3,78835	1,61915	2,47417	1,00000
0,59	1,33683	1,35695	0,59595	3,85367	1,58868	2,51683	1,01724
0,60	1,35949	1,33691	0,59965	3,91898	1,55622	2,55949	1,03448
0,61	1,38215	1,31544	0,60405	3,98430	1,52180	2,60215	1,05172
0,62	1,40480	1,29254	0,60919	4,04962	1,48539	2,64481	1,06896
0,63	1,42746	1,26820	0,61510	4,11493	1,44699	2,68746	1,08621
0,64	1,45012	1,24243	0,62185	4,18025	1,40662	2,73012	1,10345
0,65	1,47278	1,21522	0,62946	4,24557	1,36427	2,77278	1,12069
0,66	1,49544	1,18658	0,63799	4,31088	1,31995	2,81544	1,13793
0,67	1,51809	1,15651	0,64747	4,37620	1,27364	2,85810	1,15517
0,68	1,54075	1,12499	0,65797	4,44152	1,22536	2,90076	1,17241
0,69	1,56341	1,09205	0,66951	4,50684	1,17509	2,94341	1,18965
0,70	1,58607	1,05767	0,68214	4,57215	1,12284	2,98607	1,20690
0,71	1,60873	1,02186	0,69591	4,63747	1,06861	3,02873	1,22414
0,72	1,63139	0,98461	0,71086	4,70279	1,01241	3,07139	1,24138
0,73	1,65405	0,94593	0,72703	4,76810	1,95423	3,11405	1,25862
0,74	1,67671	0,90581	0,74448	4,83342	1,89406	3,15671	1,27586
0,75	1,69937	0,86426	0,76325	4,89874	1,83192	3,19937	1,29310

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^3} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1}.$$

$$\mu' = 1,585.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,24400	1,43173	0,58946	3,58801	1,71215	2,34401	0,94017
0,56	1,26663	1,41784	0,59072	3,65324	1,68819	2,38663	0,95726
0,57	1,28924	1,40253	0,59248	3,71848	1,66226	2,42924	0,97436
0,58	1,31186	1,38579	0,59478	3,78372	1,63436	2,47186	0,99145
0,59	1,33448	1,36763	0,59767	3,84895	1,60449	2,51448	1,00855
0,60	1,35710	1,34804	0,60119	3,91419	1,57266	2,55710	1,02564
0,61	1,37972	1,32703	0,60538	3,97943	1,53886	2,59972	1,04273
0,62	1,40233	1,30458	0,61029	4,04466	1,50310	2,64233	1,05983
0,63	1,42495	1,28071	0,61597	4,10990	1,46537	2,68495	1,07692
0,64	1,44757	1,25542	0,62245	4,17514	1,42567	2,72757	1,09402
0,65	1,47019	1,22871	0,62979	4,24038	1,38400	2,77019	1,11111
0,66	1,49281	1,20057	0,63802	4,30561	1,34036	2,81281	1,12820
0,67	1,51542	1,17100	0,64719	4,37085	1,29475	2,85542	1,14530
0,68	1,53804	1,14001	0,65734	4,43609	1,24718	2,89804	1,16239
0,69	1,56066	1,10758	0,66852	4,50132	1,19764	2,94066	1,17949
0,70	1,58328	1,07374	0,68077	4,56656	1,14614	2,98328	1,19658
0,71	1,60590	1,03847	0,69414	4,63180	1,09267	3,02590	1,21367
0,72	1,62851	1,00177	0,70866	4,69703	1,03723	3,06851	1,23077
0,73	1,65113	0,96365	0,72439	4,76227	0,97982	3,11113	1,24786
0,74	1,67375	0,92410	0,74137	4,82751	0,92044	3,15375	1,26496
0,75	1,69637	0,88312	0,76964	4,89274	0,85909	3,19637	1,28205

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu'} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,590.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,24182	1,44051	0,59178	3,58365	1,72530	2,34182	0,93220
0,56	1,26440	1,42703	0,59292	3,64880	1,70190	2,38440	0,94915
0,57	1,28698	1,41213	0,59454	3,71396	1,67655	2,42698	0,96610
0,58	1,30955	1,39581	0,59669	3,77912	1,64924	2,46956	0,98305
0,59	1,33213	1,37808	0,59942	3,84428	1,61998	2,51214	1,00000
0,60	1,35471	1,35893	0,60275	3,90943	1,58876	2,55471	1,01695
0,61	1,37729	1,33835	0,60675	3,97459	1,55559	2,59730	1,03390
0,62	1,39987	1,31637	0,61144	4,03975	1,52046	2,53988	1,05085
0,63	1,42245	1,29297	0,61689	4,10490	1,48337	2,68246	1,06779
0,64	1,44503	1,26815	0,62312	4,17006	1,44432	2,72503	1,08474
0,65	1,46761	1,24191	0,63018	4,23522	1,40332	2,76761	1,10169
0,66	1,49019	1,21426	0,63813	4,30037	1,36037	2,81019	1,11864
0,67	1,51277	1,18519	0,64699	4,36553	1,31545	2,85277	1,13559
0,68	1,53534	1,15470	0,65681	4,43069	1,26858	2,89535	1,15254
0,69	1,55792	1,12280	0,66764	4,49585	1,21975	2,93792	1,16949
0,70	1,58050	1,08948	0,67952	4,56100	1,16897	2,98050	1,18644
0,71	1,60308	1,05474	0,69250	4,62616	1,11624	3,02308	1,20339
0,72	1,62566	1,01859	0,70662	4,69132	1,06155	3,06566	1,22034
0,73	1,64824	0,98101	0,72192	4,75647	1,00490	3,10824	1,23729
0,74	1,67082	0,94203	0,73844	4,82163	1,94630	3,15082	1,25423
0,75	1,69340	0,90162	0,75623	4,88679	1,88574	3,19340	1,27118

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,595.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,23965	1,44910	0,59411	3,57931	1,73820	2,33965	0,92437
0,56	1,26219	1,43601	0,59513	3,64439	1,71536	2,38219	0,94117
0,57	1,28473	1,42151	0,59663	3,70946	1,69057	2,42473	0,95798
0,58	1,30727	1,40561	0,59863	3,77454	1,66383	2,46727	0,97479
0,59	1,32981	1,38830	0,60120	3,83962	1,63515	2,50981	0,99160
0,60	1,35235	1,36957	0,60436	3,90470	1,60453	2,55235	1,00840
0,61	1,37489	1,34944	0,60816	3,96978	1,57197	2,59489	1,02521
0,62	1,39743	1,32791	0,61265	4,03486	1,53746	2,63743	1,04202
0,63	1,41997	1,30496	0,61787	4,09993	1,50100	2,67997	1,05882
0,64	1,44250	1,28060	0,62386	4,16501	1,46260	2,72250	1,07563
0,65	1,46505	1,25484	0,63067	4,23009	1,42226	2,76505	1,09244
0,66	1,48758	1,22767	0,63833	4,29517	1,37997	2,80758	1,10924
0,67	1,51013	1,19909	0,64690	4,36025	1,33574	2,85012	1,12605
0,68	1,53266	1,16910	0,65641	4,42533	1,28956	2,89266	1,14286
0,69	1,55521	1,13770	0,66690	4,49041	1,24144	2,93520	1,15966
0,70	1,57774	1,10489	0,67843	4,55548	1,19136	2,97774	1,17647
0,71	1,60028	1,07068	0,69103	4,62056	1,13935	3,02028	1,19328
0,72	1,62282	1,03506	0,70474	4,68564	1,08540	3,06282	1,21008
0,73	1,64536	1,99803	0,71962	4,75072	1,02950	3,10536	1,22689
0,74	1,66789	1,95959	0,73569	4,81580	0,97166	3,14790	1,24370
0,75	1,69044	1,91974	0,74301	4,88088	0,91187	3,19044	1,26050

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,600.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,23750	1,45750	0,59644	3,57500	1,75084	2,33750	0,91666
0,56	1,26000	1,44480	0,59735	3,64000	1,72854	2,38000	0,93333
0,57	1,28250	1,43070	0,59872	3,70500	1,70430	2,42250	0,95000
0,58	1,30500	1,41520	0,60059	3,77000	1,67814	2,46500	0,96666
0,59	1,32750	1,39830	0,60300	3,83500	1,65004	2,50750	0,98333
0,60	1,35000	1,38000	0,60600	3,90000	1,62000	2,55000	1,00000
0,61	1,37250	1,36030	0,60962	3,96500	1,58804	2,59250	1,01666
0,62	1,39500	1,33920	0,61391	4,03000	1,55414	2,63500	1,03333
0,63	1,41750	1,31670	0,61892	4,09500	1,51830	2,67750	1,05000
0,64	1,44000	1,29280	0,62467	4,16000	1,48054	2,72000	1,06666
0,65	1,46250	1,26750	0,63122	4,22500	1,44084	2,76250	1,08333
0,66	1,48500	1,24080	0,63861	4,29000	1,39920	2,80500	1,10000
0,67	1,50750	1,21270	0,64689	4,35500	1,35564	2,84750	1,11666
0,68	1,53000	1,18320	0,65619	4,42000	1,31014	2,89000	1,13333
0,69	1,55250	1,15230	0,66626	4,48500	1,26270	2,93250	1,15000
0,70	1,57500	1,12000	0,67744	4,55000	1,21334	2,97500	1,16666
0,71	1,59750	1,08630	0,68967	4,61500	1,16204	3,01750	1,18333
0,72	1,62000	1,05120	0,70300	4,68000	1,10880	3,06000	1,20000
0,73	1,64250	1,01470	0,71747	4,74500	1,05364	3,10250	1,21666
0,74	1,66500	0,97680	0,73312	4,81000	0,99654	3,14500	1,23333
0,75	1,68750	0,93750	0,75000	4,87500	0,93750	3,18750	1,25000

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,605.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha$
0,55	1,23536	1,46572	0,59878	3,57072	1,76322	2,33536	0,90909
0,56	1,25782	1,45340	0,59959	3,63564	1,74145	2,37782	0,92562
0,57	1,28028	1,43969	0,60084	3,70056	1,71776	2,42028	0,94215
0,58	1,30274	1,42458	0,60257	3,76548	1,69215	2,46274	0,95868
0,59	1,32520	1,40809	0,60484	3,83041	1,66462	2,50520	0,97520
0,60	1,34766	1,39020	0,60767	3,89533	1,63517	2,54766	0,99173
0,61	1,37012	1,37092	0,61111	3,96025	1,60379	2,59012	1,00826
0,62	1,39258	1,35026	0,61521	4,02517	1,57049	2,63258	1,02479
0,63	1,41505	1,32819	0,62000	4,09009	1,53527	2,67505	1,04132
0,64	1,43751	1,30474	0,62553	4,15502	1,49812	2,71751	1,05785
0,65	1,45997	1,27990	0,63185	4,21994	1,45905	2,75997	1,07438
0,66	1,48243	1,25366	0,63898	4,28486	1,41806	2,80243	1,09091
0,67	1,50489	1,22603	0,64697	4,34978	1,37515	2,84489	1,10744
0,68	1,52735	1,19701	0,65588	4,41470	1,33031	2,88735	1,12396
0,69	1,54981	1,16660	0,66573	4,47963	1,28356	2,92981	1,14049
0,70	1,57227	1,13480	0,67658	4,54455	1,23488	2,97227	1,15702
0,71	1,59473	1,10160	0,68846	4,60947	1,18428	3,01473	1,17355
0,72	1,61719	1,06701	0,70141	4,67439	1,13175	3,05719	1,19008
0,73	1,63966	1,03103	0,71549	4,73931	1,07731	3,09966	1,20661
0,74	1,66212	0,99367	0,73072	4,80424	1,02094	3,14212	1,22314
0,75	1,68458	0,95490	0,74716	4,86916	1,96265	3,18458	1,23967

S.7.



TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^2,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,610.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,23323	1,47375	0,60111	3,56646	1,77536	2,33323	0,90164
0,56	1,25565	1,46181	0,60182	3,63130	1,75411	2,37565	0,91803
0,57	1,27807	1,44848	0,60296	3,69615	1,73096	2,41807	0,93442
0,58	1,30050	1,43377	0,60457	3,76099	1,70589	2,46049	0,95082
0,59	1,32292	1,41767	0,60669	3,82584	1,67892	2,50292	0,96721
0,60	1,34534	1,40019	0,60937	3,89068	1,65003	2,54534	0,98361
0,61	1,36776	1,38132	0,61264	3,95552	1,61922	2,58776	1,00000
0,62	1,39019	1,36108	0,61655	4,02037	1,58651	2,63018	1,01639
0,63	1,41261	1,33945	0,62115	4,08521	1,55189	2,67260	1,03279
0,64	1,43503	1,31643	0,62646	4,15006	1,51536	2,71503	1,04918
0,65	1,45745	1,29203	0,63253	4,21490	1,47691	2,75745	1,06557
0,66	1,47987	1,26625	0,63942	4,27975	1,43655	2,79987	1,08197
0,67	1,50230	1,23909	0,64714	4,34459	1,39428	2,84229	1,09836
0,68	1,52472	1,21054	0,65576	4,40944	1,35010	2,88471	1,11475
0,69	1,54714	1,18061	0,66531	4,47428	1,30401	2,92714	1,13115
0,70	1,56957	1,14929	0,67583	4,53912	1,25601	2,96956	1,14754
0,71	1,59199	1,11659	0,68736	4,60397	1,20610	3,01198	1,16393
0,72	1,61441	1,08250	0,69996	4,66881	1,15427	3,05440	1,18033
0,73	1,63683	1,04704	0,71364	4,73366	1,10053	3,09682	1,19672
0,74	1,65926	1,01019	0,72847	4,79850	1,04488	3,13925	1,21311
0,75	1,68168	0,97195	0,74448	4,86335	1,98732	3,18167	1,22951

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,615.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,23111	1,48162	0,60345	3,56223	1,78725	2,33111	0,89431
0,56	1,25350	1,47004	0,60406	3,62699	1,76653	2,37350	0,91057
0,57	1,27588	1,45708	0,60509	3,69176	1,74390	2,41588	0,92683
0,58	1,29826	1,44276	0,60658	3,75653	1,71937	2,45826	0,94309
0,59	1,32065	1,42705	0,60857	3,82130	1,69294	2,50065	0,95935
0,60	1,34303	1,40997	0,61110	3,88607	1,66461	2,54303	0,97561
0,61	1,36541	1,39151	0,61421	3,95083	1,63438	2,58542	0,99187
0,62	1,38780	1,37168	0,61794	4,01560	1,60225	2,62780	1,00813
0,63	1,41018	1,35047	0,62233	4,08037	1,56821	2,67018	1,02439
0,64	1,43256	1,32788	0,62744	4,14513	1,53228	2,71257	1,04065
0,65	1,45495	1,30393	0,63329	4,20990	1,49444	2,75495	1,05691
0,66	1,47733	1,27859	0,63993	4,27467	1,45471	2,79734	1,07317
0,67	1,49971	1,25188	0,64739	4,33944	1,41307	2,83972	1,08943
0,68	1,52210	1,22379	0,65573	4,40420	1,36953	2,88210	1,10569
0,69	1,54448	1,19433	0,66499	4,46897	1,32409	2,92449	1,12195
0,70	1,56686	1,16349	0,67519	4,53374	1,27675	2,96687	1,13821
0,71	1,58925	1,13128	0,68640	4,59851	1,22752	3,00926	1,15447
0,72	1,61163	1,09769	0,69864	4,66327	1,17638	3,05164	1,17073
0,73	1,63401	1,06273	0,71195	4,72804	1,12334	3,09402	1,18699
0,74	1,65640	1,02639	0,72639	4,79281	1,06840	3,23641	1,20325
0,75	1,67878	0,98868	0,74199	4,85758	1,01155	3,17879	1,21951

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,620.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,22901	1,48931	0,60578	3,55802	1,79891	2,32901	0,88710
0,56	1,25135	1,47809	0,60631	3,62271	1,77869	2,37135	0,90323
0,57	1,27370	1,46551	0,60723	3,68741	1,75658	2,41370	0,91936
0,58	1,29605	1,45156	0,60860	3,75210	1,73258	2,45605	0,93548
0,59	1,31839	1,43623	0,61046	3,81679	1,70669	2,49839	0,95161
0,60	1,34074	1,41954	0,61285	3,88148	1,67891	2,54074	0,96774
0,61	1,36308	1,40149	0,61580	3,94617	1,64924	2,58308	0,98387
0,62	1,38543	1,38206	0,61936	4,01086	1,61767	2,62543	1,00000
0,63	1,40778	1,36127	0,62357	4,07555	1,58422	2,66778	1,01613
0,64	1,43012	1,33911	0,62847	4,14250	1,54887	2,71012	1,03226
0,65	1,45247	1,31558	0,63410	4,20494	1,51164	2,75247	1,04839
0,66	1,47481	1,29069	0,64050	4,26963	1,47251	2,79481	1,06451
0,67	1,49716	1,26442	0,64772	4,33432	1,43150	2,83716	1,08064
0,68	1,51950	1,23679	0,65579	4,39901	1,38860	2,87951	1,09677
0,69	1,54185	1,20779	0,66476	4,46370	1,34380	2,92185	1,11290
0,70	1,56419	1,17742	0,67466	4,52839	1,29711	2,96420	1,12903
0,71	1,58654	1,14569	0,68554	4,59308	1,24854	3,00654	1,14516
0,72	1,60888	1,11259	0,69743	4,65778	1,19807	3,04889	1,16129
0,73	1,63122	1,07812	0,71039	4,72247	1,14572	3,09124	1,17742
0,74	1,65357	1,04228	0,72445	4,78716	1,09147	3,13358	1,19355
0,75	1,67592	1,00507	0,73964	4,85185	1,03533	3,17593	1,20968

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad z' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,625.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$z'$
0,55	1,22692	1,49684	0,60812	3,55384	1,81034	2,32692	0,88000
0,56	1,24923	1,48598	0,60855	3,61846	1,79062	2,36923	0,89600
0,57	1,27153	1,47375	0,60938	3,68307	1,76901	2,41153	0,91200
0,58	1,29384	1,46017	0,61064	3,74769	1,74553	2,45384	0,92800
0,59	1,31615	1,44522	0,61237	3,81230	1,72016	2,49615	0,94400
0,60	1,33846	1,42892	0,61462	3,87692	1,69292	2,53846	0,96000
0,61	1,36077	1,41126	0,61742	3,94154	1,66380	2,58077	0,97600
0,62	1,38307	1,39223	0,62081	4,00615	1,63279	2,62307	0,99200
0,63	1,40538	1,37185	0,62484	4,07077	1,59991	2,66538	1,00800
0,64	1,42769	1,35010	0,62954	4,13538	1,56514	2,70769	1,02400
0,65	1,45000	1,32700	0,63496	4,20000	1,52850	2,75000	1,04000
0,66	1,47231	1,30253	0,64114	4,26461	1,48998	2,79231	1,05600
0,67	1,49461	1,27671	0,64811	4,32923	1,44957	2,83461	1,07200
0,68	1,51692	1,24952	0,65592	4,39384	1,40729	2,87692	1,08800
0,69	1,53923	1,22098	0,66461	4,45846	1,36312	2,91923	1,10400
0,70	1,56154	1,19107	0,67422	4,52307	1,31708	2,96154	1,12000
0,71	1,58385	1,15981	0,68478	4,58769	1,26916	3,00385	1,13600
0,72	1,60615	1,12718	0,69635	4,65231	1,21935	3,04615	1,15200
0,73	1,62846	1,09320	0,70896	4,71692	1,16767	3,08846	1,16800
0,74	1,65077	1,05785	0,72264	4,78154	1,11410	3,13077	1,18400
0,75	1,67308	1,02115	0,73745	4,84615	1,05866	3,17308	1,20000

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad F = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,630.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,22485	1,50422	0,61044	3,54969	1,82156	2,32484	0,87301
0,56	1,24712	1,49369	0,61080	3,61423	1,80232	2,36711	0,88889
0,57	1,27939	1,48182	0,61153	3,67877	1,78122	2,40938	0,90476
0,58	1,29166	1,46860	0,61269	3,74331	1,75824	2,45165	0,92063
0,59	1,31393	1,45403	0,61430	3,80785	1,73339	2,49392	0,93641
0,60	1,33620	1,43810	0,61641	3,87239	1,70668	2,53619	0,95238
0,61	1,35847	1,42082	0,61906	3,93693	1,67809	2,57846	0,96825
0,62	1,38074	1,40219	0,62230	4,00147	1,64764	2,62073	0,98413
0,63	1,40301	1,38221	0,62615	4,06601	1,61531	2,66300	1,00000
0,64	1,42528	1,36087	0,63066	4,13055	1,58112	2,70527	1,01587
0,65	1,44755	1,33818	0,63588	4,19509	1,54505	2,74754	1,03174
0,66	1,46982	1,31414	0,64183	4,25963	1,50712	2,78981	1,04762
0,67	1,49208	1,28875	0,64857	4,32417	1,46731	2,83208	1,06349
0,68	1,51435	1,26200	0,65613	4,38871	1,42564	2,87435	1,07936
0,69	1,53662	1,23390	0,66455	4,45325	1,38209	2,91662	1,09524
0,70	1,55889	1,20445	0,67387	4,51779	1,33668	2,95889	1,11111
0,71	1,58116	1,17365	0,68413	4,58233	1,28940	3,00116	1,12698
0,72	1,60343	1,14150	0,69537	4,64687	1,24024	3,04343	1,14286
0,73	1,62570	1,10799	0,70764	4,71141	1,18922	3,08570	1,15873
0,74	1,64797	1,07313	0,72097	4,77595	1,13633	3,12797	1,17460
0,75	1,67024	1,03692	0,73540	4,84049	1,08156	3,17024	1,19047

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,635.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,22278	1,51143	0,61277	3,54556	1,83255	2,32278	0,86614
0,56	1,24501	1,50125	0,61305	3,61003	1,81379	2,36501	0,88189
0,57	1,26724	1,48973	0,61369	3,67449	1,79318	2,40724	0,89764
0,58	1,28948	1,47687	0,61474	3,73896	1,77070	2,44947	0,91338
0,59	1,31171	1,46265	0,61624	3,80342	1,74637	2,49171	0,92913
0,60	1,33394	1,44710	0,61822	3,86789	1,72017	2,53394	0,94488
0,61	1,35617	1,43020	0,62073	3,93235	1,69212	2,57617	0,96063
0,62	1,37841	1,41195	0,62381	3,99682	1,66221	2,61841	0,97638
0,63	1,40064	1,39236	0,62750	4,06128	1,63043	2,66064	0,99212
0,64	1,42287	1,37142	0,63183	4,12574	1,59680	2,70287	1,00787
0,65	1,44510	1,34914	0,63685	4,19021	1,56130	2,74510	1,02362
0,66	1,46734	1,32552	0,64259	4,25467	1,52395	2,78734	1,03937
0,67	1,48957	1,30055	0,64910	4,31914	1,48473	2,82957	1,05512
0,68	1,51180	1,27424	0,65641	4,38360	1,44366	2,87180	1,07086
0,69	1,53403	1,24658	0,66457	4,44807	1,40072	2,91403	1,08661
0,70	1,55627	1,21757	0,67361	4,51253	1,35593	2,95627	1,10236
0,71	1,57850	1,18722	0,68358	4,57700	1,30927	2,99850	1,11811
0,72	1,60073	1,15553	0,69451	4,64146	1,16076	3,04073	1,13386
0,73	1,62296	1,12249	0,70645	4,70593	1,21038	3,08296	1,14960
0,74	1,64520	1,08811	0,71943	4,77039	1,15815	3,12520	1,16535
0,75	1,66743	1,05238	0,73349	4,83486	1,10406	3,16743	1,18110

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,640.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,22073	1,51849	0,61509	3,54146	1,84334	2,32073	0,85937
0,56	1,24292	1,50865	0,61529	3,60585	1,82505	2,36292	0,87500
0,57	1,26512	1,49747	0,61585	3,67024	1,80492	2,40512	0,89062
0,58	1,28731	1,48496	0,61680	3,73463	1,78293	2,44731	0,90625
0,59	1,30951	1,47110	0,61819	3,79902	1,75910	2,48951	0,92187
0,60	1,33170	1,45591	0,62005	3,86341	1,73342	2,53171	0,93750
0,61	1,35390	1,43939	0,62242	3,92780	1,70589	2,57390	0,95312
0,62	1,37609	1,42152	0,62535	3,99220	1,67650	2,61610	0,96875
0,63	1,39829	1,40232	0,62887	4,05659	1,64527	2,65829	0,98437
0,64	1,42048	1,38178	0,63303	4,12098	1,61218	2,70049	1,00000
0,65	1,44268	1,35990	0,63786	4,18537	1,57725	2,74268	1,01562
0,66	1,46487	1,33668	0,64339	4,24976	1,54046	2,78488	1,03125
0,67	1,48707	1,31213	0,64968	4,31415	1,50183	2,82707	1,04687
0,68	1,50926	1,28624	0,65676	4,37854	1,46134	2,86927	1,06250
0,69	1,53146	1,25901	0,66466	4,44293	1,41901	2,91146	1,07812
0,70	1,55366	1,23044	0,67343	4,50732	1,37481	2,95366	1,09375
0,71	1,57585	1,20054	0,68311	4,57171	1,32879	2,99585	1,10937
0,72	1,59805	1,16930	0,69374	4,63610	1,28090	3,03805	1,12500
0,73	1,62024	1,13672	0,70536	4,70049	1,23117	3,08024	1,14062
0,74	1,64244	1,10280	0,71800	4,76488	1,17958	3,12244	1,15625
0,75	1,66463	1,06755	0,73171	4,82927	1,12615	3,16463	1,17187

TABLE II. (SUITE.)

$$C = \frac{\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad D = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{2\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad F = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2 + \frac{\mu'^2}{(\mu' - 1)^2} \omega^3,$$

$$H = \frac{4\mu' + 4}{\mu'} \omega, \quad K = \frac{6\mu' + 4}{\mu'} \omega - \frac{3\mu' + 1}{\mu' - 1} \omega^2, \quad M = \frac{3\mu' + 2}{\mu'} \omega, \quad \alpha' = \frac{\omega}{\mu' - 1},$$

$$\mu' = 1,650.$$

$\omega$	C	D	F	H	K	M	$\alpha'$
0,55	1,21667	1,53218	0,61971	3,53333	1,86429	2,31666	0,84615
0,56	1,23879	1,52299	0,61977	3,59757	1,84693	2,35878	0,86154
0,57	1,26091	1,51248	0,62017	3,66182	1,82773	2,40090	0,87692
0,58	1,28303	1,50064	0,62093	3,72606	1,80671	2,44303	0,89231
0,59	1,30515	1,48748	0,62211	3,79030	1,78385	2,48515	0,90769
0,60	1,32727	1,47300	0,62375	3,85454	1,75916	2,52727	0,92307
0,61	1,34939	1,45720	0,62586	3,91878	1,73264	2,56939	0,93846
0,62	1,37151	1,44007	0,62851	3,98303	1,70429	2,61151	0,95384
0,63	1,39364	1,42161	0,63172	4,04727	1,67411	2,65363	0,96923
0,64	1,41576	1,40184	0,63554	4,11151	1,64210	2,69575	0,98461
0,65	1,43788	1,38075	0,64000	4,17575	1,60826	2,73788	1,00000
0,66	1,46000	1,35834	0,64514	4,24000	1,57259	2,78000	1,01538
0,67	1,48212	1,33459	0,65101	4,30424	1,53508	2,82212	1,03077
0,68	1,50424	1,30953	0,65763	4,36848	1,49575	2,86424	1,04615
0,69	1,52636	1,28314	0,66506	4,43272	1,45459	2,90636	1,06154
0,70	1,54848	1,25543	0,67332	4,49697	1,41159	2,94848	1,07692
0,71	1,57060	1,22639	0,68245	4,56121	1,36676	2,99060	1,09231
0,72	1,59272	1,19604	0,69250	4,62545	1,32011	3,03273	1,10769
0,73	1,61484	1,16436	0,70350	4,68970	1,27162	3,07485	1,12308
0,74	1,63697	1,12135	0,71550	4,75394	1,22130	3,11697	1,13846
0,75	1,65909	1,09703	0,72852	4,81818	1,16914	3,15909	1,15384

S.8.



TABLE III.

 $\rho = r'$ , système de Clairaut. $r = \rho$ , Klügel et Littrow.

$\mu$	$2A\alpha$	$A\alpha^2$	$B\alpha$	$\frac{\alpha}{2} = r = \rho$	$A r^2 - B r + E$
	$\frac{2(\mu+2)}{\mu} \frac{1}{\mu-1}$	$\frac{\mu+2}{\mu} \frac{1}{(\mu-1)^2}$	$\frac{2\mu+1}{\mu-1} \frac{1}{\mu-1}$	$\frac{1}{2(\mu-1)}$	$\frac{\mu+2}{\mu} r^2 - \frac{2\mu+1}{\mu-1} r + \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^2$
1,500	9,33333	9,33333	16,00000	1,000000	3,33333
1,501	9,31116	9,29257	15,94416	0,998004	3,32713
1,502	9,28907	9,25206	15,88864	0,996016	3,32095
1,503	9,26708	9,21181	15,83343	0,994036	3,31480
1,504	9,24519	9,17181	15,77854	0,992064	3,30870
1,505	9,22338	9,13206	15,72395	0,990099	3,30263
1,506	9,20166	9,09255	15,66967	0,988143	3,29658
1,507	9,18004	9,05329	15,61570	0,986194	3,29055
1,508	9,15851	9,01428	15,56203	0,984252	3,28456
1,509	9,13706	8,97550	15,50866	0,982318	3,27861
1,510	9,11570	8,93696	15,45559	0,980392	3,27268
1,511	9,09443	8,89866	15,40282	0,978474	3,26680
1,512	9,07325	8,86060	15,35034	0,976563	3,26093
1,513	9,05215	8,82276	15,29816	0,974659	3,25509
1,514	9,03114	8,78516	15,24626	0,972763	3,24928
1,515	9,01022	8,74779	15,19465	0,970874	3,24350
1,516	8,98939	8,71064	15,14332	0,968992	3,23775
1,517	8,96863	8,67373	15,09228	0,967118	3,23203
1,518	8,94796	8,63703	15,04151	0,965251	3,22634
1,519	8,92738	8,60056	14,99103	0,963391	3,22068
1,520	8,90688	8,56431	14,94083	0,961538	3,21505
1,521	8,88646	8,52828	14,89090	0,959693	3,20944
1,522	8,86613	8,49246	14,84124	0,957854	3,20386
1,523	8,84588	8,45686	14,79185	0,956023	3,19830
1,524	8,82571	8,42148	14,74273	0,954198	3,19278
1,525	8,80562	8,38630	14,69388	0,952381	3,18728
1,526	8,78561	8,35134	14,64529	0,950570	3,18182
1,527	8,76568	8,31659	14,59696	0,948767	3,17637
1,528	8,74584	8,28204	14,54890	0,946970	3,17095
1,529	8,72607	8,24770	14,50109	0,945180	3,16556
1,530	8,70638	8,21356	14,45354	0,943396	3,16019
1,531	8,68676	8,17963	14,40625	0,941620	3,15485
1,532	8,66723	8,14589	14,35921	0,939850	3,14954
1,533	8,64777	8,11236	14,31242	0,938086	3,14425
1,534	8,62839	8,07902	14,26587	0,936330	3,13899
1,535	8,60908	8,04587	14,21958	0,934579	3,13375
1,536	8,58986	8,01293	14,17353	0,932836	3,12853
1,537	8,57071	7,98018	14,12773	0,931099	3,12335
1,538	8,55163	7,94762	14,08217	0,929368	3,11819
1,539	8,53263	7,91525	14,03685	0,927644	3,11305
1,540	8,51371	7,88306	13,99177	0,925926	3,10795

TABLE IV.

$\omega$	$\omega^2$	$\omega^3$	$\frac{1}{1-\omega}$
0,550	0,302500	0,166375000	2,22222
0,555	0,308025	0,170953875	2,24719
0,560	0,313600	0,175616000	2,27272
0,565	0,319225	0,180362125	2,29885
0,570	0,324900	0,185193000	2,32558
0,575	0,330625	0,190109375	2,35294
0,580	0,336400	0,195112000	2,38093
0,585	0,342225	0,200201625	2,40964
0,590	0,348100	0,205379000	2,43902
0,595	0,354025	0,210644875	2,46913
0,600	0,360000	0,216000000	2,50000
0,605	0,366025	0,221445125	2,53164
0,610	0,372100	0,226981000	2,56410
0,615	0,378225	0,232608375	2,59740
0,620	0,384400	0,238328000	2,63158
0,625	0,390625	0,244140625	2,66666
0,630	0,396900	0,250047000	2,70270
0,635	0,403225	0,256047875	2,73973
0,640	0,409600	0,262144000	2,77777
0,645	0,416025	0,268336125	2,81691
0,650	0,422500	0,274625000	2,85714
0,655	0,429025	0,281011375	2,89855
0,660	0,435600	0,287496000	2,94117
0,665	0,442225	0,294079625	2,98507
0,670	0,448900	0,300763000	3,03030
0,675	0,455625	0,307546875	3,07692
0,680	0,462400	0,314432000	3,12500
0,685	0,469225	0,321419125	3,17460
0,690	0,476100	0,328509000	3,22580
0,695	0,483025	0,335702375	3,27869
0,700	0,490000	0,343000000	3,33333
0,705	0,497025	0,350402625	3,38982
0,710	0,504100	0,357911000	3,44832
0,715	0,511225	0,365525875	3,50877
0,720	0,518400	0,373248000	3,57143
0,725	0,525625	0,381078125	3,63636
0,730	0,532900	0,389017000	3,70370
0,735	0,540225	0,397065375	3,77358
0,740	0,547600	0,405224000	3,84615
0,745	0,555025	0,413493625	3,92157
0,750	0,562500	0,421875000	4,00000



---

DE LA

# CHALEUR DE COMBINAISON

RAPPORTÉE

A L'ÉTAT GAZEUX,

PAR M. BERTHELOT,

MEMBRE DE L'INSTITUT (ACADÉMIE DES SCIENCES).

---

## § I. — Combinaisons formées sans condensation.

1. Lorsque deux éléments, pris dans un état aussi voisin que possible de celui de gaz parfait, se combinent sans condensation, la chaleur dégagée est indépendante de la température : c'est une constante que l'on peut appeler la *chaleur atomique de combinaison*.

En effet, la variation de la chaleur de combinaison est exprimée, comme je l'ai dit ailleurs <sup>(1)</sup>, par la différence  $U - V$ ,  $U$  étant la chaleur absorbée par les éléments pendant l'intervalle de température que l'on considère, et  $V$  étant la chaleur absorbée par le composé : chacune de ces quantités est égale au produit des chaleurs spécifiques des corps envisagés par l'intervalle de température, dans le cas où il n'y a pas de changement d'état. Or les expériences de M. Regnault ont établi que les gaz composés formés à volumes égaux et sans condensation (gaz chlorhydrique, bioxyde d'azote) possèdent une chaleur spécifique égale à celle des gaz simples, sous le même volume. Tous les gaz simples ayant en principe la même chaleur spécifique sous le même volume, il en résulte que la chaleur spécifique moléculaire des gaz composés formés sans condensation est égale à la somme de celles des gaz simples

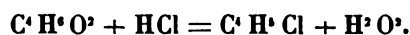
---

<sup>(1)</sup> *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. VI, p. 303.

qui les composent. Pour de tels gaz composés, on a dès lors à toute température  $U = V$ , c'est-à-dire que la variation de la chaleur de combinaison avec la température :  $U - V = 0$ .

2. Ces relations sont également vraies, que l'on opère à pression constante ou à volume constant. La chaleur de combinaison pour les gaz parfaits formés sans condensation est donc indépendante de la pression, aussi bien que de la température.

3. On peut admettre qu'il existe en principe des relations semblables pour toutes les réactions entre gaz simples ou composés, telles que *la somme des volumes demeure constante*. Soit, par exemple, la formation des éthers



En appelant  $c$  la chaleur spécifique rapportée au poids moléculaire, je tire des nombres de M. Regnault

$$\Sigma c = 20,8 + 6,7 = 27,5 = U,$$

$$\Sigma c_1 = 17,7 + 8,6 = 26,3 = V,$$

valeurs très-voisines de l'égalité.

Toutefois les chaleurs spécifiques des gaz composés étant généralement variables avec la température et la pression, et cela suivant des lois propres à chaque gaz, l'égalité précédente ne saurait être regardée que comme approximative.

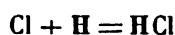
Examinons maintenant quels changements la combinaison apporte à ces trois données caractéristiques des gaz : la température, la pression et le volume.

4. On appelle *température de combustion* d'un mélange gazeux la température que prendraient les gaz formés dans une réaction, si toute la chaleur dégagée était employée à les échauffer. Si deux gaz, voisins de l'état parfait, se combinent sans condensation, en dégageant une quantité de chaleur  $Q$ , l'excès de température  $T$  que prendra le système sera donné par la formule

$$T = \frac{Q}{C},$$

$C$  étant la chaleur spécifique moléculaire du composé, évaluée entre la

température initiale et la température  $T$ . Soit, par exemple, l'union du chlore et de l'hydrogène; la réaction



dégage  $+ 22^{\circ},000$  ou  $22000$  calories.

La chaleur moléculaire du gaz chlorhydrique à pression constante, rapportée au poids  $36^{\text{gr}},5$ , étant égale à  $6^{\text{cal}},8$ , on aura

$$T = 3235^{\circ} \text{ à pression constante.}$$

A volume constant, la chaleur moléculaire du gaz chlorhydrique étant égale à  $4,8$  :

$$T_1 = 4166^{\circ}.$$

Si la température initiale était égale à zéro,  $3235$  degrés seraient donc en théorie la température acquise par les produits de la combustion opérée à pression constante :  $4166$  degrés, à volume constant.

Si la température initiale est  $t$ , les produits devront acquérir une température  $T + t$ , c'est-à-dire que *la température initiale s'ajoute à la température de combustion théorique*. Il y aurait donc avantage à échauffer à l'avance les gaz élémentaires, pour obtenir une température finale plus élevée.

5. *Dissociation*. — Mais ces conclusions supposent que le composé puisse exister, sans éprouver aucune décomposition à la température de combustion indiquée par le calcul. Or il n'en est point ainsi, le gaz éprouvant en général, à cette température, une décomposition plus ou moins avancée. C'est là ce que M. H. Sainte-Claire Deville a désigné sous le nom de *dissociation*. A mesure que la température s'abaisse, les gaz élémentaires se recombinent; la proportion combinée s'accroît ainsi, pour ne devenir totale qu'à une température beaucoup plus basse. A une température donnée, la proportion combinée est, en général, d'autant plus grande que la pression est plus considérable. Les lois précises de ces variations ne sont pas encore bien connues. Nous y reviendrons. Nous nous bornerons à remarquer ici que la température réelle atteinte dans la formation d'un composé dépend évidemment de la proportion réellement combinée. La connaissance de cette température réelle est

essentielle, lorsqu'on veut évaluer l'effet utile des flammes dans les applications (<sup>1</sup>).

Supposons que la chaleur de combinaison correspondant à la portion qui se combine soit constante et identique (pour un même poids de matière réellement combinée) avec la chaleur qui répond à la combinaison intégrale, hypothèse qui peut être admise pour les gaz composés formés sans condensation. Admettons, en outre, que cette portion représente une fraction  $k$  du poids total; alors on aura

$$T = k \frac{Q}{C}.$$

Observons que  $k$  pourrait être calculé par un simple problème de maximum, si l'on connaissait la relation générale qui existe entre cette quantité et la température

$$k = f(t).$$

Il est essentiel de faire remarquer encore que les phénomènes de dissociation ne changent pas l'*effet utile* des combustions dans une circonstance donnée, toutes les fois qu'ils ne s'exercent qu'à une température supérieure à celle à laquelle l'effet utile est produit

6. *Pression.* — Supposons la réaction entre deux gaz élémentaires opérée à volume constant sans condensation, la température initiale étant zéro et la pression initiale  $H$ . Le mélange prendrait, si la combinaison pouvait être intégrale, une température  $T_1$ ,

$$T_1 = \frac{Q}{C_1},$$

$Q$  étant la chaleur dégagée et  $C_1$  la chaleur moléculaire du composé à volume constant.

Dès lors la pression deviendra

$$P = H \left( 1 + \alpha \frac{Q}{C_1} \right) = H \left( 1 + \frac{1}{273} \frac{Q}{C_1} \right).$$

---

(<sup>1</sup>) Voir la *Leçon* faite par M. Debray devant la Société chimique de Paris en 1861, p. 62 et 66; chez Hachette.

Soit pour la combinaison du chlore et de l'hydrogène, pris sous une pression initiale de 1 atmosphère,

$$P = 16^{\text{atm}}, 2.$$

Mais c'est là une limite théorique, à cause des phénomènes de dissociation.

Soit  $k$  la fraction réellement combinée, on aura, en supposant que la chaleur spécifique du gaz chlorhydrique soit constante, indépendante de la température et de la pression, et égale à celle de ses éléments,

$$P = H \left( 1 + \frac{1}{273} k \frac{Q}{C_i} \right),$$

expression qui permettra de calculer  $k$  et  $T$ , si  $P$  est déterminé par expérience, comme la chose peut se faire. Le problème de la dissociation devient par là accessible à des expériences directes.

7. *Volume.* — Supposons encore la réaction intégrale de deux gaz élémentaires unis sans condensation, la température initiale étant zéro et le volume initial  $V_0$ . En opérant à pression constante, ce volume deviendra

$$V = V_0 \left( 1 + \frac{1}{273} \frac{Q}{C} \right).$$

Soit, pour la combinaison du chlore et de l'hydrogène,

$$V = V_0 \times 12, 8.$$

C'est encore là une limite théorique, à cause de la dissociation.

La connaissance du volume réel, si elle pouvait être obtenue par expérience, permettrait d'évaluer la proportion réellement combinée.

8. Nous allons appliquer ces principes généraux aux divers cas où l'on a mesuré la chaleur dégagée par la réaction des gaz simples, combinés sans condensation.



*Chaleur dégagée par la formation des gaz composés obtenus  
sans condensation <sup>(1)</sup>.*

Noms,	Éléments gazeux.	Composé.	Équivalent du composé gazeux (poids moléculaire).	Chaleur dégagée.	
				Nombre adopté.	Nombres donnés par divers auteurs.
Acide chlorhydrique..	H + Cl	HCl	36,5	[+ 22,0] Th.;	+ 23,8 F. S.; + 24,0 Ab.
» bromhydrique..	H + Br	HBr	81	[+ 13,5] B.;	+ 14,3 F. S.; + 12,4 Th.
» iodhydrique....	H + I	HI	127	[− 0,8] Th. B.;	+ 1,2 F. S.
Bioxyde d'azote.....	Az + O <sup>2</sup>	Az O <sup>2</sup>	30	[− 43,3] B.	

Ces nombres donnent lieu à diverses remarques.

La chaleur de formation du bioxyde d'azote est la seule qui puisse être regardée en fait comme complètement indépendante de la température, du moins entre zéro et 200 degrés, la chaleur moléculaire du bioxyde d'azote étant réellement égale à la somme de celle de ses éléments, d'après les expériences de M. Regnault faites entre ces limites.

Mais il n'en est pas de même pour les hydracides; en effet, la chaleur moléculaire du chlore et du brome gazeux, au moins jusque vers 200 degrés, surpasse celle de l'hydrogène, étant égale à + 8,6 pour le chlore,  $\text{Cl}^2 = 71^{\text{gr}}$ , et à + 8,8 pour le brome,  $\text{Br}^2 = 160^{\text{gr}}$ . Par suite, la variation de la chaleur de combinaison avec la température n'est pas nulle, mais égale à

$$(4,3 + 3,4 - 6,8 = + 0,9) (T - t)$$

pour l'acide chlorhydrique. Les acides bromhydrique et iodhydrique doivent offrir une variation analogue, mais la chaleur moléculaire de ces gaz n'a pas été déterminée. Si cette variation conservait la même valeur jusqu'à 500 degrés, ce qui est admissible, la chaleur de formation de ces trois gaz serait accrue de + 0,45 : variation minime pour le gaz chlorhydrique, mais qui tend à rapprocher de zéro la chaleur

(<sup>1</sup>) Les nombres ci-dessus ont été déduits des expériences, en tenant compte des chaleurs de fusion et de vaporisation du brome et de l'iode, aussi bien que de leurs chaleurs spécifiques, dans l'état solide et liquide. — Les noms des auteurs des expériences sont remplacés par les initiales suivantes : Ab = Abria; An = Andrews; B = Berthelot; D = Dulong; Dv = Deville; F = Favre; Gr = Grassi; H = Hautefeuille; Hs = Hess; R = Regnault; S = Silbermann; Th = Thomsen; Tr = Troost.

de formation du gaz iodhydrique à 500 degrés. A cette température, le dernier gaz est d'ailleurs en partie dissocié.

Si j'insiste sur ces observations, c'est qu'elles vont trouver une application importante.

9. *Rapports multiples entre les quantités de chaleur dégagées.* — On s'est demandé si les quantités de chaleur dégagées dans les réactions chimiques ne seraient pas des multiples d'une même unité, qui devrait se retrouver dans toutes les réactions; cette question, soulevée à l'occasion des expériences de Dulong sur les deux degrés d'oxydation de l'étain, a été depuis agitée par Hess, par MM. Favre et Silberman, en dernier lieu par M. Thomsen. Aucun raisonnement, *a priori*, n'établit la probabilité d'une telle relation. C'est donc une question purement empirique. Pour que la recherche de ces relations multiples ait quelque chance de succès, il est indispensable d'éliminer l'influence, variable d'un corps à l'autre, des changements d'états physiques, changements dont les effets s'ajoutent à ceux des changements purement chimiques. On y parvient en rapportant les réactions à l'état gazeux parfait, et en comparant des corps qui occupent tous le même volume gazeux, tant avant qu'après la réaction. Les trois hydracides dérivés des éléments halogènes remplissent très-bien ces conditions; en outre, ils appartiennent à une même famille chimique, ce qui rend la comparaison plus étroite.

Or la formation des trois hydracides gazeux, au moyen des éléments gazeux, dégage :

Pour HCl.....	+ 22,0
Pour HBr.....	+ 13,5
Pour HI.....	— 0,8

Ces nombres ne sont pas les multiples d'une même unité; cependant on ne peut s'empêcher de remarquer qu'ils sont fort voisins des nombres 0, 11 et 22, qui appartiennent tous les trois à la progression 11 *n*. Ce rapprochement est-il fortuit? ou bien les nombres observés s'y conformeraient-ils exactement, si l'on pouvait écarter toute cause perturbatrice?

Poursuivons cette discussion. On peut se demander encore si la relation cherchée n'existerait pas entre les températures, ou les volumes,

ou les pressions des trois gaz au moment de leur formation ; c'est-à-dire en supposant qu'ils conservent toute la chaleur dégagée par la réaction des éléments. Les changements de volume, par exemple, sont-ils régis dans ce cas par quelque loi analogue à celle qui a été observée lorsque les combinaisons gazeuses sont ramenées à la même température ?

On a, d'après les quantités de chaleurs dégagées :

	Températures à pression constante.	Volumes à pression constante.	Pressions à volume constant.
Pour HCl. ....	+ 3235°	$V_1 \times 12,8$	16,2 <sup>atm</sup>
Pour HBr. ....	+ 1985	$V_1 \times 8,3$	11,3
Pour HI. ....	— 118	$V_1 \times 0,6$	0,4

Les relations de proportionnalité sont plus éloignées d'être ainsi vérifiées que si l'on compare directement les quantités de chaleur ; cependant les rapports demeurent assez simples, soit 0 : 2 : 3, pour les volumes comme pour les pressions.

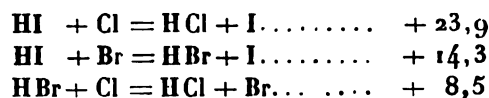
10. Entre les trois hydracides, il en est un qui paraît *formé avec absorption de chaleur*, du moins à la température ordinaire : c'est l'acide iodhydrique. Pour un tel corps, la chaleur de combinaison serait négative, et il y aurait diminution de volume ou de pression lors de la combinaison des éléments. Mais il convient d'observer que cette combinaison n'a pas lieu à la température ordinaire : elle s'effectue seulement vers le rouge sombre, et dans des conditions de dissociation, dont il est difficile d'évaluer avec précision l'influence sur la chaleur de combinaison.

*A fortiori*, la formation directe du bioxyde d'azote, qui absorberait — 43,3 en donnant lieu à un abaissement théorique de — 6037 degrés, est-elle impossible.

11. *Réactions diverses opérées sans changement de volume.* — Examinons encore quelques réactions entre les gaz, opérées à pression constante, sans changement de volume.

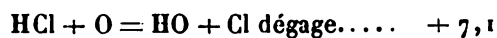
1° Telles sont les *substitutions entre le chlore, le brome, l'iode*. Tous

les corps supposés gazeux, on aurait :



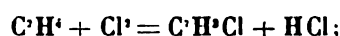
Ces quantités ne changent guère avec la température initiale.

Mais il en serait autrement si le volume des produits n'était pas égal à celui des composants, comme il arrive dans la réaction suivante :



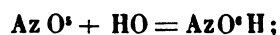
Les composants occupant ici 5 volumes et les produits 4 volumes, le travail extérieur développé pendant un changement de température ne serait plus le même si l'on opérait à des températures initiales différentes. Par suite, la chaleur dégagée par la réaction irait sans cesse en augmentant avec l'élévation de température, soit de + 0,1 environ pour chaque intervalle de 200 degrés.

2° *La substitution des corps halogènes à l'hydrogène dans les composés organiques* s'opère également sans changement de volume : soit la synthèse de l'éther méthylechlorhydrique



mais il n'existe aucun cas de ce genre pour lequel nous possédions les données d'un calcul thermique complet.

3° De même encore, *la fixation de l'eau sur les acides anhydres monobasiques*



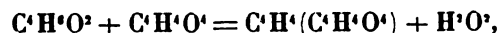
cette réaction dégage, entre les corps liquides, + 5,3. Elle doit produire une quantité de chaleur peu différente entre les corps gazeux; mais nous ne pouvons pas la préciser exactement, faute de savoir la chaleur de vaporisation de l'acide azotique.

4° Citons également la *substitution réciproque des hydracides* dans les composés organiques, substitution qui s'opère si aisément:



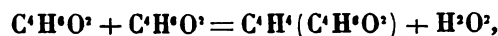
entre les corps gazeux.

5° La *formation des éthers composés* au moyen des acides et des alcools, soit l'éther acétique



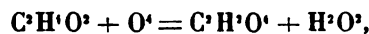
absorbe, tous les corps gazeux, — 6,6;

Celle des *éthers mixtes*, soit l'éther ordinaire



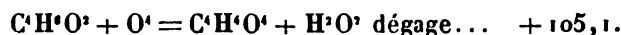
absorberait, tous les corps gazeux, — 3,6.

6° La *transformation des alcools en acides* par oxydation, soit l'alcool méthylique en acide formique, a lieu aussi sans changement de volume. Elle dégage



tous les corps gazeux : + 93,3;

De même, l'alcool ordinaire changé en acide acétique, tous les corps gazeux,



Dans toutes ces réactions, les quantités de chaleurs ne doivent guère varier avec la température, du moins entre les limites compatibles avec l'existence des corps réagissants et des produits.

## § II. — Combinaisons gazeuses formées avec condensation.

1. Voici les tableaux des quantités de chaleur dégagées par les combinaisons de cette nature; ces tableaux comprennent tous les cas observés :

### I. — Composés oxygénés de l'azote.

	Éléments gazeux.	Équivalent gazeux du composé (poids moléculaire.)	Chaleur dégagée ou absorbée. Chiffre adopté.
Protoxyde d'azote.....	2(Az+ O)	2 AzO = 22 × 2	[— 9,0 × 2] (F. et S.); (Th.)
Bioxyde d'azote.....	Az+ O <sup>2</sup>	AzO <sup>2</sup> = 30	[— 43,3] (B.)
Acide azoteux.....	2(Az+ O <sup>3</sup> )	2 AzO <sup>3</sup> = 38 × 2	[— 32,8 × 2] (B.)
Acide hypoazotique...	Az+ O <sup>4</sup>	AzO <sup>4</sup> = 46	[— 24,3] (B.)
Acide azotique.....	2(Az+ O <sup>5</sup> )	2 AzO <sup>5</sup> = 54 × 2	[— 22,3] (B.)

II. — *Corps formés avec condensation, dans le rapport de 3 volumes à 2 volumes.*

	Éléments gazeux.	Équivalent gazeux du composé.	Chaleur dégagée ou absorbée.	
			Chiffre adopté.	Données des auteurs.
Ozone.....	$2(O + O^2)$	$2O^3 = 24 \times 2$	$[-14,8 \times 2](B.)$	
Eau gazeuse.....	$2(O + H)$	$2HO = 9 \times 2$	$[+29,0 (^{1})]$	+29,3 (D., H.) +29,0 (F. et S.); +29,2 (Gr.) +28,4 (An.); +28,7 (Th.)
Hydrog. sulfuré..	$2(S + H)$	$2HS = 17 \times 2$	$[+ 3,6 \times 2](H., Th.)(^{2})$	
Ac. hypochloreux.	$2(O + Cl)$	$2ClO = 43,5 \times 2$	$[- 8,3 \times 2];$	$- 9,0 (Th.); - 7,6 (B.)$
Acides sulfureux...	$2(S + O^2)$	$2SO^2 = 32 \times 2$	$[+34,55]B.$	+41,6 (D.); +41,1 (Hs.) +36,9 (An.); +35,6 (F.S.)
Ac. carbonique(^{3}).	$2(O + CO)$	$2CO^2 = 22 \times 2$	$[+34,5 \times 2];$	+36,9 (D.); +33,6 (F.S.) +33,0 (Gr.); +34,0 (An.) +33,4 (Th.); +34,25 (B.)

III. — *Corps composés formés avec condensation, dans le rapport de 2 volumes à 1 volume.*

Ammoniaque.....  $Az + H^3$   $AzH^3 = 17$   $[+26,7] (Th.); + 22,7 (F. S.)$

Les données de ces tableaux fournissent les éléments convenables pour la discussion de nombreuses questions, les unes chimiques, les autres physiques, relatives à la formation des corps composés. Nous allons en signaler quelques-unes.

2. *Proportions multiples.* — Soit d'abord la question fondamentale des proportions multiples. La série des cinq combinaisons entre l'azote et l'oxygène, toutes combinaisons formées avec absorption de chaleur,

(<sup>1</sup>) On admet que la chaleur de vaporisation de l'eau à zéro est égale à 5,45 pour 9 grammes d'eau, d'après les données de M. Regnault.

(<sup>2</sup>) On admet que la transformation du soufre solide en soufre gazeux absorbe  $- 1,3$  pour  $S = 16^{gr}$ ; d'après les données connues relatives aux chaleurs de fusion et de vaporisation de ce corps.

(<sup>3</sup>) Le calcul a été fait pour la combustion de l'oxyde de carbone, l'état gazeux du carbone ne pouvant être calculé.

donne lieu aux rapprochements suivants :

$Az + O = AzO$	absorbe ...	- 9,6
$AzO + O = AzO^2$	» ...	-34,3
$AzO^2 + O = AzO^3$	dégage ....	+10,5
$AzO^3 + O = AzO^4$	» ...	+ 8,5
$AzO^4 + O = AzO^5$	» ....	+ 2,0

Les deux premiers composés sont formés, par voie indirecte, avec une absorption de chaleur croissante; comme s'il se constituait par là un groupement spécial ou radical, apte à former ensuite, par voie de combinaison directe, les autres composés. A partir du bioxyde d'azote, en effet, il y a dégagement de chaleur dans la formation directe de l'acide azoteux et de l'acide hypoazotique.

Le caractère successif de ces deux formations, également directes, peut être établi par l'expérience (<sup>1</sup>). La chaleur dégagée va en diminuant : de l'acide azoteux à l'acide hypoazotique et à l'acide azotique, dernier composé qui ne peut être obtenu par fixation immédiate d'oxygène sur le composé précédent.

Bien que sa formation ne réponde pas au dégagement maximum de chaleur, l'acide hypoazotique constitue le terme le plus stable de la série, du moins quant à l'aptitude à se décomposer par la chaleur : l'acide azoteux n'existant guère qu'à l'état dissocié, et l'acide azotique se décomposant de même sous l'influence d'une faible élévation de température, en formant de l'acide hypoazotique, mais sans donner lieu à une dissociation réversible.

Le bioxyde d'azote est également moins stable que le protoxyde, qu'il reproduit d'abord, en même temps que l'acide hypoazotique, lorsqu'on le décompose soit par une température voisine de 500 degrés, soit par l'effluve électrique.

Ce sont là des relations assez compliquées, qui montrent la difficulté d'établir une relation générale : soit entre la *stabilité* des corps et la chaleur dégagée dans leur formation, soit entre la *proportion* des éléments et celle de la chaleur dégagée.

Les autres combinaisons inscrites dans le tableau ne fournissent au-

---

(<sup>1</sup>) *Annales de Chimie et de Physique*, 5<sup>e</sup> série, t. VI, p. 193 et 194.

cune nouvelle donnée, correspondante à la question des proportions multiples. Cependant voici quelques autres nombres relatifs à des corps gazeux, dont les éléments ne sont pas connus sous forme gazeuse, mais qui forment des composés gazeux en proportion multiple.

Tels sont les *hydrures de carbone* :

L'acétylène et l'hydrogène,  $2(C^2H + H)$ , forment l'éthylène  $(C^2H^2)^2$ , en dégageant . . . . .  $+ 28^{cal}$ .

L'éthylène et l'hydrogène,  $2(C^2H^2 + H)$ , forment le méthyle  $(C^2H^3)^2$ , en dégageant une quantité de chaleur qui n'a pas été mesurée directement, mais qui doit être voisine de. . . . .  $+ 18$ .

Enfin le méthyle et l'hydrogène,  $2(C^2H^3 + H)$ , produiraient le formène  $C^2H^4$ , en dégageant. . . . .  $+ 8$ .

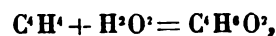
On observe ici une progression décroissante des quantités de chaleur, analogue à celle qui caractérise les oxydes de l'azote.

Il y a également changement dans la condensation en passant du méthyle au formène, précisément comme en passant de l'acide azoteux à l'acide hypoazotique.

Enfin, et cette remarque est capitale, les quatre hydrures de carbone, acétylène, éthylène, méthyle et formène, se transforment réciproquement les uns dans les autres à la température rouge, en formant des systèmes en équilibre; précisément comme le font le bioxyde d'azote, l'acide azoteux et l'acide hypoazotique, ceux-ci dès la température ordinaire. Les mêmes caractères généraux président à ces deux groupes de combinaisons formées en proportions multiples: rapprochement qui devient plus frappant encore, si l'on remarque que le terme fondamental dans la série des hydrures de carbone, c'est-à-dire l'acétylène  $(C^2H)^2$ , est formé depuis les éléments avec absorption de chaleur ( $- 32,0$ ), précisément comme le bioxyde d'azote ( $- 43,3$ ).

Voici encore deux groupes de composés formés en proportions multiples, avec des dégagements de chaleur susceptibles d'être évalués.

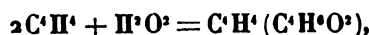
L'éthylène et l'eau gazeuse forment, en effet, suivant les proportions relatives, l'alcool gazeux,



réaction qui dégage. . . . .  $+ 16,9$ ,  
S.10.

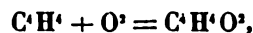


et l'éther gazeux,

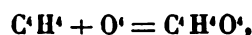


réaction qui dégage. . . . . + 36,3; soit 16,9 + 19,4.  
Mais ces deux combinaisons ne peuvent être produites que par voie indirecte.

De même, l'éthylène et l'oxygène forment successivement : l'aldéhyde gazeux,



réaction qui dégage. . . . . + 48,  
et l'acide acétique gazeux



réaction qui dégage. . . . . + 118; soit 48 + 70.  
Ces deux combinaisons sont encore formées en proportions multiples. Le premier composé (aldéhyde) s'unit en effet directement à l'oxygène libre.

Dans ces deux exemples, la chaleur dégagée n'est pas égale pour les deux proportions; mais elle va croissant du premier terme au second, contrairement à ce qui arrive pour les hydrures de carbone et les oxydes d'azote.

3. Au lieu de comparer les proportions multiples, on pourrait chercher quelque relation numérique soit entre les composés d'une même famille, soit entre les composés formés avec une condensation pareille, soit encore entre les composés homologues. Mais les cas étudiés sont trop peu nombreux pour donner lieu à quelque observation générale : ni la comparaison entre l'hydrogène sulfuré et l'eau, ni celle des gaz formés dans le rapport de 3 volumes à 2 volumes ne manifeste de relation digne de quelque intérêt.

Le seul cas remarquable est celui de l'ozone, corps obtenu par la condensation de 3 équivalents d'oxygène, réduits aux deux tiers de leur volume primitif. Malgré cette condensation, l'ozone est formé avec absorption de chaleur, précisément comme les oxydes de l'azote, avec lesquels il offre tant de ressemblance. Réciproquement, l'ozone, en oxydant les autres corps, dégage plus de chaleur que l'oxygène libre : excès thermique qui explique l'énergie plus grande manifestée par l'ozone dans ses réactions.

4. Tous les rapprochements de nombres que l'on pourrait faire entre les quantités de chaleur dégagées par la combinaison des gaz et leur composition chimique sont sujets à des réserves, qui tiennent aux propriétés physiques des gaz et qu'il importe de développer maintenant.

En effet, pour que la chaleur dégagée par une réaction quelconque, opérée à volume constant et sur des gaz parfaits, fût une quantité invariable (*chaleur atomique de combinaison*), il faudrait admettre avec M. Clausius que la chaleur spécifique atomique de tous les gaz composés, prise à volume constant et dans l'état parfait, est la somme des chaleurs spécifiques atomiques de leurs éléments.

Malheureusement on ne connaît aujourd'hui avec certitude la chaleur spécifique à volume constant de presque aucun gaz composé, qui soit comparable à un gaz parfait. Aucune expérience n'a été faite sur de tels gaz à des températures et sous des pressions différentes.

Toutefois on ne peut être très-éloigné de la vérité, du moins pour les faibles pressions, en concluant leur chaleur spécifique moléculaire à volume constant de la chaleur spécifique moléculaire à pression constante : il suffit de regarder la différence de ces deux quantités comme équivalente au travail extérieur, c'est-à-dire comme égale à  $1^{\text{cal}}, 93$  (<sup>1</sup>).

5. Ce que nous connaissons, ce sont les chaleurs spécifiques à pression constante d'un certain nombre de gaz et de vapeurs, entre zéro et 200 degrés. Mais, toutes les fois qu'il y a *condensation* dans la combinaison opérée sous pression constante, le travail extérieur, produit par une variation quelconque de température, n'est pas le même pour les gaz primitifs et pour les produits de la réaction : la variation de la chaleur de combinaison comprend dès lors deux termes, dont l'un ne dépend pas des travaux intérieurs, seuls comparables en toute rigueur, au point de vue des affinités chimiques.

Il est facile de faire la part de ces deux effets par le calcul. Prenons en effet comme unité des volumes gazeux le volume occupé par 2 équivalents d'hydrogène,  $H^2 = 2^{\text{gr}}$ , soit  $22^{\text{lit}}, 32$ , et appelons  $n$  le

---

(<sup>1</sup>) J'obtiens ce nombre en admettant le volume moléculaire d'un gaz quelconque égal à  $22^{\text{m}}, 32$  sous la pression normale et à zéro ; et l'équivalent mécanique de la chaleur comme égal à 436,1 (Regnault).

nombre de ces unités qui représente le volume occupé par les corps positifs,  $n'$  répondant au volume occupé par les produits :  $n - n'$  représente la contraction produite par la réaction, valeur positive dans toutes les réactions, à deux ou trois exceptions près <sup>(1)</sup>. Or, la quantité de chaleur absorbée par le travail extérieur de dilatation de l'unité de volume, envisagée pendant 1 degré, est égale à 1<sup>cal</sup>,93. Pour  $n - n'$  unités de volume, on aura donc  $(n - n')$  1,93, et pour l'intervalle  $(T - t)$

$$1,93(n - n')(T - t).$$

Cette quantité est fort petite pour des intervalles de température inférieurs à 100 ou 200 degrés; mais elle devient considérable, si l'on envisage les intervalles de 1000 degrés.

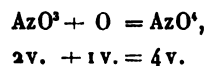
Pour l'eau, par exemple,  $n - n' = \frac{1}{2}$ ; le travail extérieur absorbe donc

$$0,96(T - t),$$

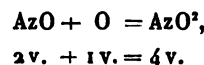
soit 96 calories pour un intervalle de 100 degrés, quantité fort petite par rapport à la chaleur de combinaison observée, qui est +29050 calories à zéro. Pour un intervalle de 1000 degrés, ce serait un accroissement de 960 calories, c'est-à-dire  $\frac{1}{30}$  de la quantité totale.

6. Mais ce n'est pas là la principale difficulté qui se présente, dans l'évaluation absolue des quantités de chaleur dégagées par les combinaisons formées avec condensation. En effet, étant donnée la chaleur dégagée par une réaction opérée à la température ordinaire entre des corps gazeux, pour savoir ce qui se passe à une température beaucoup plus haute ou beaucoup plus basse, il faudrait connaître la valeur de la fonction  $U - V$ , laquelle dépend des *chaleurs spécifiques*

(1) Telles que la transformation directe de l'acide azoteux en acide hypoazotique



ou le changement théorique du protoxyde d'azote en bioxyde



des gaz simples et des gaz composés, pris à diverses températures et sous diverses pressions.

D'après les nombres observés par M. Regnault, la somme des chaleurs moléculaires à pression constante des gaz composants (évaluées entre zéro et 200 degrés) est, dans la plupart des cas, plus grande que celle des gaz composés. D'où il résulte que l'on a  $U > V$ , au voisinage de la température ordinaire, jusque vers 200 degrés au moins, et même beaucoup plus loin, c'est-à-dire que la chaleur de combinaison sous pression constante croît, en général, avec la température.

Entre ces limites, on a, par exemple, pour le protoxyde d'azote,  $Az^2O^2 = 44^{\text{gr}}$ ,

$$U - V = (10,3 - 9,9 = 0,4)(T - t),$$

pour la vapeur d'eau,  $H^2O^2 = 18^{\text{gr}}$ ,

$$U - V = (10,3 - 8,6 = 1,7)(T - t),$$

pour l'ammoniaque,  $AzH^3 = 17^{\text{gr}}$ ,

$$U - V = (13,7 - 9,6 = 4,1)(T - t), \dots$$

Si l'on opérait à volume constant, il conviendrait de retrancher de ces quantités un nombre qui ne doit pas s'écarter beaucoup de la chaleur correspondante au changement de travail extérieur produit par la condensation : soit  $1,0(T - t)$  pour l'eau et le protoxyde d'azote ;  $2,0(T - t)$  pour le gaz ammoniac, etc.

La chaleur de combinaison à volume constant doit donc croître avec la température pour l'eau gazeuse et le gaz ammoniac pris entre zéro et 200 degrés ; tandis qu'elle décroîtrait pour le protoxyde d'azote. Mais ces conclusions sont subordonnées aux valeurs adoptées pour les chaleurs spécifiques des gaz composés. Or les chaleurs spécifiques sont des quantités qui s'accroissent elles-mêmes rapidement avec la température, comme on le dira tout à l'heure ; de telle façon que la fonction  $U - V$  ne tarde pas à prendre une valeur négative. La chaleur de combinaison, à partir de ce terme, deviendra au contraire décroissante avec la température, tant à pression constante qu'à volume constant ; le décroissement commençant même plus tôt et étant plus

rapide dans cette dernière condition. Je reviendrai tout à l'heure sur cette question.

Entre les limites mêmes de zéro et 200 degrés, les vapeurs des protochlorures de phosphore et d'arsenic, celles des chlorures de silicium, de titane et d'étain, ainsi que les vapeurs du sulfure de carbone et du chloroforme, réalisent, d'après les nombres de M. Regnault, la relation inverse  $U < V$ ; d'après laquelle la chaleur de formation de ces composés depuis leurs éléments décroît à mesure que la température s'élève : décroissement d'autant plus net que les effets du travail extérieur sont de signe contraire; c'est-à-dire que, si l'on opérait à volume constant, la variation serait encore plus considérable.

Non-seulement ce décroissement a lieu, en envisageant les chaleurs spécifiques des éléments, telles qu'elles ont été observées, c'est-à-dire dans l'état solide du phosphore, de l'arsenic, du silicium, du soufre, du carbone, etc.; mais il n'est guère moins manifeste, si l'on suppose que ces éléments amenés à l'état gazeux possèdent la même chaleur moléculaire que les autres gaz simples. D'après cette hypothèse fort vraisemblable, on aurait, en effet, entre 0 et 200 degrés, et à pression constante, pour le chlorure de phosphore,  $\text{PCl}^3 = 137^{\text{gr}}, 5$ ,

$$U - V = (13,7 - 18,6 = -4,9) (T - t),$$

pour le chlorure d'arsenic,  $\text{AsCl}^3 = 181^{\text{gr}}, 5$ ,

$$U - V = (13,7 - 20,3 = -6,7) (T - t),$$

pour le sulfure de carbone,  $\text{C}^2\text{S}^4 = 78^{\text{gr}}, 5$ ,

$$U - V = (10,3 - 11,9 = -1,6) (T - t),$$

pour le chloroforme,  $\text{C}^3\text{HCl}^3 = 119^{\text{gr}}, 5$ ,

$$U - V = (17,1 - 19,1 = -2,0) (T - t),$$

pour le chlorure de silicium,  $\text{Si}^2\text{Cl}^4$ ,

$$U - V = (17,1 - 22,4 = -5,3) (T - t),$$

pour le chlorure d'étain,  $\text{Sn}^2\text{Cl}^4$ ,

$$U - V = (17,1 - 24,4 = -7,3) (T - t).$$

A volume constant, la décroissance devient plus considérable encore, puisqu'il faut en augmenter la valeur absolue des effets dus au travail extérieur. De là résulte un changement fort notable dans la chaleur de formation de ces composés avec la température : changement qui s'élèverait sous pression constante à 4900 calories pour le chlorure de phosphore, à 7300 calories pour le perchlorure d'étain, etc., étant donné un intervalle de 1000 degrés.

7. *Stabilité.* — Ce changement peut être tel que le signe de la chaleur de formation d'un composé vienne à changer avec la température : la combinaison dégageant de la chaleur à la température ordinaire, et en absorbant à une température plus haute. Par suite, une combinaison peut se produire directement à une certaine température et devenir impossible à une température plus haute. Cela est une conséquence de la relation  $U - V < 0$ . Elle s'accorde avec le fait bien connu que la stabilité des composés diminue en général avec la température.

Réciproquement, dans les cas où la relation inverse  $U - V > 0$  subsiste pendant un intervalle considérable de température, il peut arriver qu'une combinaison directe, impossible à basse température parce qu'elle absorberait de la chaleur, devienne possible à une température plus élevée, à laquelle la réaction dégage de la chaleur. C'est ici le cas d'un composé gazeux dont la stabilité augmente avec la température : cas exceptionnel, mais dont on connaît cependant plusieurs exemples en Chimie.

8. Quoi qu'il en soit, les variations de la chaleur de combinaison  $Q_T$ , déterminée à une température  $T$ , sont faibles en général, pour les corps gazeux pris dans un intervalle de 100 à 200 degrés, parce qu'elles représentent une petite fraction de la valeur observée pour  $Q_T$ , laquelle, au contraire, est presque toujours un grand nombre. La chaleur de combinaison peut donc être regardée comme sensiblement constante dans la plupart des réactions gazeuses, tant qu'on n'opère pas entre des limites de température très-écartées.

Pour prévoir ce qui se passe entre des limites beaucoup plus étendues, telles que celles qui comprennent la *dissociation*, il faudrait connaître les chaleurs spécifiques des gaz composés à diverses températures.

9. Discutons les résultats, malheureusement peu nombreux, que nous possédons sur cette question; ils s'appliquent seulement au protoxyde d'azote, à l'acide carbonique, au gaz ammoniac, et par extension au sulfure de carbone et à l'éthylène.

Quelque limités que soient ces résultats, l'intérêt en est cependant considérable, attendu qu'ils comprennent les cas les plus généraux : à savoir les combinaisons exothermiques, aussi bien que les combinaisons endothermiques; les dissociations réversibles, aussi bien que les décompositions non réversibles.

1° La *chaleur moléculaire à pression constante* du protoxyde d'azote ( $\text{Az}^2\text{O}^2 = 44^{\text{gr}}$ ) est représentée en fonction de la température par la relation

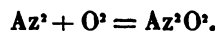
$$8,76 + 0,0055t \text{ (Regnault)}$$

ou

$$9,16 + 0,0057t \text{ (Wiedemann),}$$

celle des éléments étant égale à  $+10,33$ .

La chaleur moléculaire du gaz composé est donc moindre que celle de ses composants pour toute température inférieure à 285 degrés, d'après les nombres de Regnault; ou pour toute température inférieure à 206 degrés, d'après ceux de Wiedemann. Par suite on a  $U > V$  jusqu'à cette limite, c'est-à-dire que la chaleur de combinaison des deux gaz, à pression constante, croît avec la température. Mais cette chaleur est négative (voir p. 72), et égale à  $-18000$  calories pour la réaction théorique (')



Vers 206 degrés (ou vers 285 degrés) sa valeur absolue serait accrue seulement de  $+0,1$  environ.

Vers 285 degrés (ou vers 206 degrés) elle ne varie pas, car  $U = V$ .

Au-dessus de cette limite,

$$U < V,$$

c'est-à-dire que la chaleur dégagée va en diminuant; ou bien, ce qui est

(') Rappelons ici que les chaleurs spécifiques sont exprimées en petites *calories* (quantités de chaleur capables d'élever de zéro à 1 degré 1 gramme d'eau); tandis que les chaleurs de combinaison sont exprimées en grandes *Calories* (quantités de chaleur capables d'élever de zéro à 1 degré 1 kilogramme d'eau), c'est-à-dire en unités mille fois aussi grandes.

la même chose, la chaleur absorbée devient de plus en plus considérable. Ce dernier effet est d'autant plus digne d'intérêt que le protoxyde d'azote se décompose en azote et oxygène au-dessus de 500 degrés, en dégageant de la chaleur. Mais l'azote et l'oxygène ne se recombinent pas lorsqu'on abaisse la température, c'est-à-dire que *la décomposition n'est pas réversible*, aucune combinaison directe entre les gaz ne pouvant avoir lieu avec absorption de chaleur.

Les déductions seraient analogues, mais pour des limites de température différentes, si l'on faisait intervenir la *chaleur spécifique à volume constant*; malheureusement cette quantité n'a pas été déterminée à diverses températures. Cependant on peut en général l'évaluer, au moins d'une manière approchée, en retranchant de la chaleur moléculaire à pression constante un nombre équivalent au travail extérieur, lequel absorbe 1<sup>cal</sup>,93 pour l'unité de volume moléculaire des gaz qui obéissent aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac. La chaleur spécifique moléculaire à volume constant du protoxyde d'azote ainsi calculée serait vers zéro, d'après les nombres de M. Regnault, 6,89; d'après ceux de M. Wiedemann, 7,23. D'après ces nombres, on devrait avoir le rapport des deux chaleurs

$$\frac{C}{K'} = 1,27.$$

En fait, les expériences de M. Regnault sur la vitesse du son donnent à peu près 1,33. La chaleur spécifique du protoxyde d'azote à volume constant vers zéro sera égale à 6,6 ou 6,9 suivant que l'on adopte l'un ou l'autre des chiffres ci-dessus pour la chaleur spécifique à pression constante : différence qui ne modifie pas sensiblement nos calculs ni nos conclusions. Mais on ne connaît aucune expérience qui permette de calculer la chaleur spécifique à volume constant aux températures élevées. Dès lors, nous admettrons, pour simplifier et comme susceptible de fournir des valeurs au moins très-approchées, le calcul théorique qui déduit la chaleur à volume constant de la chaleur à pression constante, en tenant compte seulement de la différence due au travail extérieur.

Nous aurons ainsi à diverses températures :

Pour les éléments.....  $K = 7,46$

Et pour le composé.....  $K = 6,89 + 0,0055 t.$

S.11.



Dès lors, on a  $U > V$  jusqu'à 100 degrés : la chaleur de combinaison croît jusqu'à cette température.

$U = V$  vers 100 degrés : la variation est nulle.

$U < V$  au delà de 100 degrés : la chaleur de combinaison décroît au delà de 100 degrés.

La formation du protoxyde d'azote est une réaction endothermique, la valeur de la chaleur dégagée étant négative et voisine de  $-18,000$  vers zéro. Les divers changements que l'on vient de discuter ne sont pas susceptibles d'en changer le signe, ni même d'en altérer beaucoup la valeur absolue entre les limites de température envisagées ici.

Cependant il a paru utile de donner, au moins pour un seul exemple, le calcul régulier de la variation  $U - V$ , dans l'hypothèse d'une réaction opérée à volume constant. Nous n'y reviendrons pas pour les autres gaz, les données expérimentales étant insuffisantes et la discussion offrant dès lors peu d'intérêt.

2° Soit maintenant le gaz ammoniac, composé qui se forme (par voie indirecte), en dégageant pour les poids équivalents (17 grammes),



La chaleur moléculaire à pression constante du gaz ammoniac est représentée en fonction de la température par la formule

$$8,51 + 0,0053t \text{ (Wiedemann),}$$

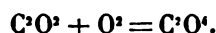
valeur inférieure à la somme des chaleurs moléculaires des composants (+ 13,7) pour toute température inférieure à 1000 degrés, mais qui lui deviendrait égale vers ce terme, pour la surpasser ensuite.

La chaleur dégagée sous pression constante par la formation théorique du gaz ammoniac croît donc sans cesse avec la température jusque vers 1000 degrés, température à laquelle elle atteindrait + 29,300. Au delà elle diminuerait. Mais à cette température le gaz ammoniac est décomposé complètement, ou à peu près. L'azote et l'hydrogène, une fois séparés à 1000 degrés, ne se recombinent point d'ailleurs par le fait d'un abaissement de température.

A volume constant :  $U = V$  vers 600 degrés environ ; à cette température la chaleur dégagée serait + 27,600 ; à 1000 degrés : + 27,000.

3° Venons à l'acide carbonique, et, pour arriver à des résultats plus

certain, envisageons la formation de ce gaz, non à partir du carbone, dont l'état gazeux est hypothétique et ne se réaliserait d'ailleurs qu'à une température excessivement élevée, mais à partir de deux gaz réels, l'oxyde de carbone et l'oxygène



La réaction de ces deux gaz dégage + 69,000 calories.

Il s'agit ici d'une *combinaison exothermique* et d'une *réaction réversible*, ces deux gaz pouvant être séparés au moins partiellement par une élévation de température et se recombinant à mesure pendant le refroidissement.

D'après M. Regnault, la chaleur moléculaire de l'oxyde de carbone sous pression constante est constante et égale à celle de ses éléments supposés gazeux sous le même volume : + 6,86. L'oxyde de carbone peut donc être assimilé aux composés formés sans condensation. La chaleur moléculaire de l'oxygène  $\text{O}^{\circ}$  étant 3,47, on a  $\Sigma c = + 10,33$  pour les composants. Quant au composé, sa chaleur moléculaire à pression constante, évaluée en fonction de la température,

$$C = 8,23 + 0,0117t, \text{ d'après Regnault,}$$

ou

$$8,59 + 0,0095t, \text{ d'après Wiedemann.}$$

Cette quantité est inférieure à la chaleur moléculaire des éléments jusque vers 180 degrés; elle lui devient égale vers cette température; puis elle la surpasse de plus en plus.

On aura donc jusqu'à 180 degrés

$$U > V.$$

Entre zéro et 180 degrés, l'accroissement dans la chaleur de combinaison sera égale à + 0,18, c'est-à-dire négligeable par rapport à 69,000.

A cette température

$$U = V;$$

au-dessus

$$U > V.$$

Jusqu'ici nous sommes restés dans la limite des faits observés; mais, si l'on veut prendre quelque idée de la dissociation, il est nécessaire

d'aller plus loin. Supposons, par exemple, que la chaleur spécifique de l'acide carbonique continue à croître avec la température, suivant la même loi que de  $-30$  à  $+180$  degrés : à la température  $T + 180$ , elle deviendra à peu près

$$10,3 + 1,06 \frac{T}{100}.$$

La chaleur absorbée par le gaz carbonique entre  $180$  degrés et  $T$  sera

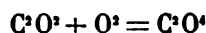
$$10,3T + 1,06 \frac{T^2}{200}.$$

La diminution de la chaleur de combinaison, à partir de  $200$  degrés, sera

$$U - V = 10,3T - 10,3T - 1,06 \frac{T^2}{200} = -\frac{1,06}{200} T^2,$$

très-sensiblement.

Si l'on admet que la réaction



dégage  $+69000$  calories vers  $200$  degrés, on peut maintenant calculer à quelle température ce nombre deviendra nul :

$$T = \sqrt{\frac{69000 \times 200}{1,06}} = 3610 \text{ environ; } 180 + T = 3790.$$

A cette température de  $3790$  degrés, l'oxyde de carbone et l'oxygène ne dégageront plus de chaleur. Au-dessus leur union en absorberait. On peut admettre que telle serait la limite à laquelle l'acide carbonique est complètement décomposé sous la pression ordinaire. Cette limite est d'ailleurs dans l'ordre de grandeur que les observations de M. H. Sainte-Claire Deville auraient permis de prévoir.

L'acide carbonique posséderait donc, à partir de  $200$  degrés et au-dessus, une chaleur spécifique sous pression constante supérieure à celle de ses composants gazeux; de même que les protochlorures de phosphore et d'arsenic et les chlorures de silicium d'étain et de titane au-dessous de  $200$  degrés. Comme l'acide carbonique ne paraît offrir ni à cette température, ni même bien au delà, aucun indice de dissociation, pas plus que les chlorures phosphoreux et arsénieux, dans la condition

où leur chaleur spécifique a été mesurée réellement, on serait conduit à admettre que l'excès des chaleurs spécifiques représente une sorte de *transformation du gaz, laquelle en précède la décomposition*.

On voit, en outre, que la chaleur de combinaison qui répond à la portion des deux composants réellement combinés, soit avant, soit pendant la période de dissociation, ne saurait être regardée comme une constante.

Cependant, à partir d'une température voisine du rouge, la décomposition réelle de l'acide carbonique commence, et l'expression théorique donnée plus haut pour sa chaleur spécifique ne semble plus devoir être appliquée qu'à la partie du gaz carbonique non décomposé.

Toutes ces déductions se rapportent à une réaction opérée sous pression constante. A volume constant, on aurait, d'après les conventions présentées plus haut,

$$U - V = [7,44 - 6,48 - 0,0053(T - t)](T - t).$$

Jusqu'à 90 degrés,  $U > V$ ;  $U = V$  vers 90 degrés. Puis la chaleur dégagée décroît; la loi de variation indiquée donnant 3700 degrés environ, pour la température à laquelle la réaction ne produirait plus de chaleur.

Ces résultats sont indépendants de la dissociation; c'est-à-dire qu'ils s'appliquent soit à la totalité des gaz, dans l'hypothèse d'une combinaison totale, soit à la fraction réellement combinée, dans l'hypothèse d'une combinaison incomplète.

Dans un cas comme dans l'autre, la formule donnée plus haut représente ce que j'appellerai la *température de dissociation totale*. Elle ne présente une signification chimique définie que dans les cas de *décomposition réversible*, c'est-à-dire dans les cas où le composé détruit par l'échauffement se reforme en sens inverse pendant le refroidissement.

La température de dissociation totale, à volume constant, se déduit aisément de la température limite calculée d'après les hypothèses précédentes pour une pression constante.

En général, soit  $Q_0$  la quantité de chaleur dégagée par la réaction d'un système quelconque de composants à la température zéro; soit  $Q_T$  la quantité analogue à la température  $T$ ; soient  $c_1, c_2, \dots$  les chaleurs

spécifiques élémentaires des composants, c'est-à-dire le rapport limite  $\frac{dc}{dt}$  pour chacun de ces corps; de même, soient  $c'_1, c'_2, \dots$  les chaleurs spécifiques élémentaires des composés, toutes ces chaleurs spécifiques étant rapportées aux poids moléculaires; les quantités  $c_1, c_2, c_3, \dots, c'_1, c'_2, \dots$  sont des fonctions de la température :

$$\begin{aligned} c_1 &= f_1(t), & c_2 &= f_2(t), & \dots, \\ c'_1 &= f'_1(t), & c'_2 &= f'_2(t), & \dots \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, d'après la relation connue (*Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. VI, p. 304),

$$\begin{aligned} Q_T &= Q_0 + U - V; \\ U &= \int_0^T [f_1(t) + f_2(t) + \dots] dt = \int_0^T \Sigma f(t) dt, \\ V &= \int_0^T \Sigma f'(t) dt. \end{aligned}$$

La température théorique de dissociation totale T sera donnée par la relation

$$(1) \quad Q_0 = \int_0^T \Sigma f'(t) dt - \int_0^T \Sigma f(t) dt.$$

Or l'expérience prouve que les chaleurs spécifiques élémentaires peuvent être représentées par une équation empirique de la forme

$$f(t) = a + bt + gt' + \dots$$

Pour les gaz simples,  $f(t)$  se réduit à la constante  $a$ , laquelle a même une valeur sensiblement identique : 6,8 pour un même volume (22<sup>lit</sup>, 32) de ces divers gaz. Pour les gaz composés formés par l'union de  $n$  unités de volume des gaz simples combinés avec condensation, l'équation (1) se réduit dès lors à

$$(2) \quad Q_0 = (a_1 + a_2 + \dots - a'_1 - a'_2 - \dots) T - \frac{1}{2} (b'_1 + b'_2 + \dots) T^2 - \frac{1}{3} (g'_1 + g'_2 + \dots) T^3 \dots$$

La détermination de la température T à laquelle la réaction ne développerait plus de chaleur sera donc donnée par une équation du premier degré, si les chaleurs spécifiques élémentaires des composés sont

constantes; par une équation du deuxième degré, si elles sont représentées par la formule  $a + bt$ , etc.

Cette dernière expression suffit pour représenter les chaleurs spécifiques des gaz étudiés jusqu'ici. C'est donc une équation du second degré, telle que la suivante, qui s'appliquera au calcul de  $T$ ; par exemple, on aura pour un gaz composé, formé par l'union de deux gaz simples :

$$Q_0 - \frac{b'}{2} T^2 + (a_1 + a_2 - a'_1) T = 0,$$

d'où (')

$$T = - \frac{a_1 + a_2 - a'_1}{b'} + \frac{1}{b'} \sqrt{(a_1 + a_2 - a'_1)^2 + 2b' Q_0}.$$

Ce calcul théorique s'applique également aux réactions opérées à pression constante et aux réactions opérées à volume constant, sauf les changements convenables dans les coefficients numériques.

J'ai cru utile de développer ces calculs, malgré les hypothèses qu'ils renferment, parce qu'il importe au progrès de la Science que toute conjecture suffisamment vraisemblable soit poursuivie jusqu'à ses dernières conséquences; il convient seulement de présenter celles-ci avec réserve et de les distinguer avec soin des vérités démontrées.

Le fait le plus frappant qui ressort de cette discussion, c'est l'existence d'une sorte de transformation des gaz, qui précéderait leur décomposition, transformation attestée par l'accroissement incessant de leur chaleur spécifique.

Mais cette transformation ne paraît dépendre ni du caractère endothermique ou exothermique de la combinaison, ni de la possibilité d'une dissociation réversible; attendu qu'elle existe également pour l'acide carbonique, combinaison exothermique qui se produit directement et qui est susceptible de dissociation réversible; pour le gaz ammoniac, combinaison exothermique qui ne se produit pas directement et qui n'est pas susceptible de dissociation réversible; enfin, pour le protoxyde d'azote, combinaison endothermique qui ne se produit pas directement.

L'existence d'une transformation analogue est également facile à

---

(') La seconde racine, étant négative, n'est pas applicable au problème.

vérifier pour deux autres gaz, dont la chaleur spécifique a été étudiée à des températures différentes.

4° Soit le sulfure de carbone,  $C^2S^1$ ; d'après les données de M. Regnault,

$$C = 10,62 + 0,014t.$$

La somme théorique des chaleurs spécifiques moléculaires des éléments supposés gazeux serait 10,33, c'est-à-dire que la chaleur dégagée par la formation du sulfure de carbone demeure constante vers  $-20$  degrés; elle augmente au-dessous de cette température; mais elle diminue au-dessus. Pour un intervalle de 1000 degrés, la variation de la chaleur de combinaison est très-considérable. L'écart serait plus grand encore si l'on faisait entrer en ligne le carbone solide, avec sa chaleur spécifique variable, et le soufre, sous les formes successives qu'il traverse entre zéro et 1000 degrés.

L'union du soufre et du carbone, pris dans leur état actuel, absorbe d'ailleurs de la chaleur  $-6,3$ ; absorption qui irait croissant jusqu'à 1000 degrés et au delà, d'après ce qui précède.

Mais la combinaison deviendrait probablement exothermique, au moins vers zéro, si l'on pouvait la rapporter au carbone gazeux et au soufre gazeux; la chaleur dégagée irait alors en diminuant avec la température, et finirait par changer de signe à une température élevée, précisément comme pour l'acide carbonique.

Observons en effet que la combinaison du soufre avec le carbone s'opère directement. Mais elle a lieu dans des conditions toutes spéciales, la dissociation du composé se manifestant dès la température à laquelle la combinaison s'effectue; de telle façon que le sulfure de carbone peut se décomposer partiellement, dans les conditions mêmes dans lesquelles le soufre et le carbone commencent à se combiner. C'est ce que j'ai reconnu par des expériences très-nettes (<sup>1</sup>), faites à l'aide d'un système de tubes concentriques que l'on chauffait au rouge, le soufre et le carbone s'unissant dans le tube intérieur, tandis que le sulfure de carbone se décomposait dans le tube enveloppant.

5° Examinons enfin la formation de l'éthylène. La chaleur spéci-

---

(<sup>1</sup>) *Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 168.

fique de ce gaz à pression constante, d'après M. Wiedemann,

$$C = 9,42 + 0,023 t.$$

Cette fonction croît plus rapidement avec la température qu'aucune autre analogue jusqu'ici connue : elle doublerait pour un intervalle de 400 degrés. Mais il faudrait 500 degrés environ pour qu'elle atteigne la somme des chaleurs spécifiques des éléments supposés gazeux, 20,5. L'intervalle serait seulement de 300 degrés, si l'on envisageait la chaleur spécifique du carbone solide.

La chaleur de formation de l'éthylène avec ses éléments, dans leur état actuel, est négative ( $-8,0$  pour  $C^sH^g$ ); mais elle serait probablement positive, si l'on pouvait la rapporter au carbone gazeux. En tout cas, la variation de cette quantité  $U - V$  est positive jusque vers 300 degrés pour les éléments actuels, c'est-à-dire que la chaleur absorbée va en diminuant, dans une proportion minime à la vérité. Au delà, la variation  $U - V$  devient négative; la chaleur absorbée croît de nouveau et suivant une progression assez rapide pour que la chaleur dégagée par la combinaison de l'hydrogène avec le carbone (même supposé gazeux) devienne nulle ou négative vers la température rouge.

C'est en effet vers le rouge que l'éthylène se décompose; mais sa décomposition est accompagnée de phénomènes d'équilibre plus compliqués qu'une simple dissociation et dans lesquels interviennent les quatre hydrures de carbone fondamentaux, l'acétylène ( $C^sH$ )<sup>2</sup>, l'éthylène ( $C^sH^2$ )<sup>2</sup>, le méthyle ( $C^sH^3$ )<sup>2</sup> et le formène,  $C^sH^4$ , ainsi que les produits de leurs condensations et combinaisons réciproques.

Ce n'est pas ici le lieu de discuter ces effets complexes; mais il a paru utile de montrer encore une fois comment la stabilité des composés et leur état de dissociation sont en relation directe avec le signe de la chaleur de leur formation, et avec les valeurs variables des chaleurs spécifiques.

Il serait à désirer que cette discussion pût être étendue à des exemples plus nombreux, et spécialement à toutes les combinaisons formées avec des éléments gazeux dont la chaleur spécifique est parfaitement connue.

#### 10. La question des quantités absolues de chaleur dégagées par les



réactions des gaz à diverses températures étant ainsi définie, nous allons examiner brièvement les conséquences qui en résultent pour la température, la pression et le volume des gaz produits au moment de la combinaison.

La *température de combustion* d'un mélange gazeux est, comme on l'a dit plus haut, l'excès de température qui serait acquis par les produits gazeux de la combustion, s'ils conservaient la totalité de la chaleur dégagée dans la réaction.  $Q$  étant cette quantité de chaleur et  $C$  la chaleur spécifique en poids des produits, on a la formule déjà donnée

$$t = \frac{Q}{C};$$

formule qui s'applique également lorsque deux gaz brûlent en proportion équivalente et lorsqu'ils sont mélangés avec des gaz qui ne brûlent pas.

Dans la plupart des cas, comme l'a montré M. H. Sainte-Claire Deville, une portion seulement des gaz combustibles entre en réaction, une autre portion subsistant en présence d'une dose correspondante d'oxygène, parce que la température développée est assez haute pour déterminer la décomposition partielle de la combinaison qui tend à se produire (dissociation). Soient  $k$  cette fraction combinée et  $C_1$  la chaleur spécifique moyenne (entre zéro et  $t$ ) du système, tel qu'il existe au moment de la combustion; on aura, en général, pour les gaz formés avec condensation,

$$(1) \quad t = k \frac{Q}{C_1}.$$

$Q$  est une constante qui dépend seulement de la température initiale, laquelle est supposée ici égale à zéro; mais  $t$ ,  $k$ ,  $C_1$  sont trois variables, liées entre elles par l'équation (1).

On peut trouver une seconde relation entre ces variables, en s'appuyant sur les expériences de M. Bunsen (*Annales de Poggendorff*, 1867) : cet illustre savant a eu l'idée de brûler le mélange combustible à volume constant et de mesurer la pression  $P$ , développée au moment de la combustion. En effet, en appelant  $g$  la condensation théorique, c'est-à-dire le rapport du volume des gaz produits dans une réaction

totale, après refroidissement, au volume des gaz primitifs, on a la relation

$$(2) \quad P = P_0(1 - k + kg)(1 + \alpha t).$$

Soient encore  $\alpha$  la chaleur spécifique moyenne, à volume constant, des gaz composants et  $b$  celle du composé, on a

$$(3) \quad C_1 = (1 - k)a + kb,$$

$$(4) \quad t = \frac{kQ}{(1 - k)a + kb},$$

$$(5) \quad \frac{P}{P_0} = (1 - k + kg) \left[ 1 + \frac{akQ}{(1 - k)a + kb} \right].$$

Aux trois inconnues  $t$ ,  $k$ ,  $C_1$ , liées par l'équation (1), nous en avons substitué cinq, liées par les trois équations (3), (4), (5) : le problème demeure donc indéterminé.

M. Bunsen avait pensé le résoudre par deux hypothèses, qui consistent à admettre que la chaleur spécifique des gaz composants  $a$  et celle des produits  $b$  sont des quantités constantes, indépendantes de la température et de la pression. Dès lors  $k$  et  $t$  sont donnés par deux équations du deuxième degré.

Le tableau suivant résume les résultats de M. Bunsen, que je demande la permission de transcrire :

Mélange combustible, en volumes.		$\frac{P}{P_0}$ (expérience).	$k$ (calcul).	$t$ (calcul).
I. . . . .	$\frac{2}{3}\text{CO} + \frac{1}{3}\text{O} \dots\dots\dots$	10,78	0,351	3172 }
II. . . . .	Id. . . . .	10,19	0,319	2893 }
III. . . . .	$\frac{2}{3}\text{CO} + \frac{1}{3}\text{O} + 0,1079\text{O} \dots\dots\dots$	9,05	0,314	2558
IV. . . . .	Id. + 0,6857CO . . . . .	8,89	0,460	2471
V. . . . .	Id. + 0,8554O . . . . .	8,44	0,478	2325
VI. . . . .	Id. + 1,0861O . . . . .	7,86	0,490	2117
VII. . . . .	Id. + 1,2563 Az (air) . . . . .	7,73	0,515	2084 }
VIII. . . . .	Id. id. . . . .	7,35	0,470	1909 }
IX. . . . .	Id. + 1,7145O . . . . .	6,67	0,520	1726
X. . . . .	Id. + 2,1559O . . . . .	5,83	0,512	1460
XI. . . . .	Id. + 3,1629CO . . . . .	4,79	0,527	1146
XII. . . . .	$\frac{2}{3}\text{H} + \frac{1}{3}\text{O} \dots\dots\dots$	9,97	0,338	2854 }
XIII. . . . .	Id. . . . .	9,75	0,336	2833 }
XIV. . . . .	$\frac{2}{3}\text{H} + \frac{1}{3}\text{O} + 1,2599\text{Az (air)} \dots\dots\dots$	7,49	0,547	2024

D'après les nombres de ses expériences, ainsi calculés,  $k$ , c'est-à-dire la fraction réellement combinée, croîtrait de 0,31 à 0,53, à mesure que la présence d'une plus forte proportion de gaz inerte abaisse davantage la température de combustion; la variation aurait un maximum au voisinage de 2500. Les écarts d'une expérience à une autre, faite dans les mêmes conditions, s'élèvent à 6 pour 100 sur la pression mesurée, ce qui répond à des écarts d'un dixième sur la fraction combinée et sur la température. M. Bunsen a cru cependant pouvoir en conclure que  $k$  restait invariable et égal à un tiers, de 3200 à 2500 degrés; température vers laquelle il s'élèverait subitement à la moitié du gaz explosif, pour conserver de nouveau une valeur constante jusque vers 1150 et au-dessous. On pourrait objecter que les limites d'erreur sont trop étendues pour autoriser l'admission d'une loi simple de rapports numériques discontinus; mais il ne me paraît pas utile de discuter cette question d'une manière plus approfondie, parce que l'hypothèse fondamentale, relative à la constance de la chaleur spécifique de l'acide carbonique, n'est pas exacte.

C'est seulement pour les gaz simples voisins de l'état parfait et pour l'oxyde de carbone, composé assimilable aux gaz formés sans condensation, que les expériences de M. Regnault et celles de M. E. Wiedemann autorisent à admettre la constance des chaleurs spécifiques sous pression constante, entre zéro et 200 degrés. Aucune expérience n'a été faite sur la chaleur spécifique des gaz sous volume constant à diverses températures. Si l'on admettait, à titre d'hypothèses que chacun appréciera à son gré, que ces conclusions sont applicables au gaz chlorhydrique, seul composé formé sans condensation dont on puisse déterminer la formation par combustion directe, la chaleur spécifique de ce gaz étant d'ailleurs réputée égale à celle de ses éléments (<sup>1</sup>), les équations du premier degré

$$t = k \frac{Q}{C} \quad \text{et} \quad P = P_0 \left( 1 + \alpha k \frac{Q}{C} \right)$$

permettraient de calculer  $t$  et  $k$ , c'est-à-dire la dissociation, par des

---

(<sup>1</sup>) On sait que cette dernière supposition n'est pas tout à fait exacte, le chlore ayant une chaleur spécifique supérieure à celle des autres gaz simples sous le même volume.

expériences analogues à celles de M. Bunsen : j'ai déjà signalé cette relation.

Mais aucune de ces hypothèses, et, par suite, aucun de ces calculs ne sont autorisés par l'expérience pour les gaz formés avec condensation, tel que l'acide carbonique. En fait, la chaleur spécifique de tels gaz varie, et cela fort rapidement, avec la température. En rapportant la chaleur spécifique sous pression constante au poids moléculaire (lequel occupe 22<sup>lit</sup>,32 à zéro et 0<sup>m</sup>,760), on a trouvé plus haut pour les valeurs moyennes de cette quantité entre zéro et 200 degrés :

Pour C<sup>2</sup>O' = 44<sup>gr</sup>...  $C = 8,41 + 0,0053t$  (moy. de Regnault et de Wiedemann).

La condensation est  $\frac{2}{3}$  pour l'acide carbonique. On ne saurait douter que la vapeur d'eau n'offre des variations analogues.

Les chaleurs spécifiques à volume constant n'ont pas été mesurées à diverses températures; mais on a vu que l'on peut en obtenir une valeur approchée pour les gaz qui suivent les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, en regardant la différence des deux chaleurs spécifiques comme équivalente au travail extérieur de dilatation, c'est-à-dire comme représentée par 1,93. On aurait dès lors la valeur moyenne

$$\text{Pour C}^2\text{O}', \dots \quad C' = 6,48 + 0,0053t.$$

Mais il est plus que douteux que cette valeur soit applicable sous des pressions voisines de 10 atmosphères.

Essayons cependant de calculer la température de combustion de l'oxyde de carbone et de l'oxygène, pris à volumes équivalents. D'après ces nouvelles données, et en admettant  $Q = 69000$ , on aurait

$$t = \frac{69000}{8,41 + 0,0053t} = 2900^\circ \text{ environ,}$$

à pression constante;

$$t' = 3060^\circ \text{ environ,}$$

à volume constant; températures bien plus basses que 7200 et 8300 degrés, auxquelles conduit l'hypothèse des chaleurs spécifiques constantes. D'après la formule empirique ci-dessus,  $C = 24,3$  entre zéro et 3000 degrés, valeur un peu plus que double de la chaleur spécifique des

éléments supposés gazeux. Cette relation n'a rien d'impossible, d'après les analogies; car elle existe en fait pour les chlorures de phosphore et d'arsenic gazeux, suivant les expériences de M. Regnault. A volume constant, le calcul donne  $C' = 21,4$ . Si l'oxyde de carbone brûlait dans l'air, il faudrait tenir compte de la chaleur absorbée par l'azote qui accompagne l'oxygène, quantité facile à calculer, puisque la chaleur spécifique de l'azote est regardée comme constante. La température de combustion à pression constante serait réduite par là à 2100 environ; à volume constant à 2400. La dissociation abaisse encore ces températures, puisqu'elle équivaut à l'introduction d'une certaine fraction d'oxyde de carbone et d'oxygène, simplement échauffés par la combinaison du surplus.

Rappelons ici que, d'après la formule empirique des chaleurs spécifiques, la combinaison entre l'oxyde de carbone et l'oxygène cesserait de dégager de la chaleur vers 3800 degrés, température qui ne surpasse que de 900 degrés la température de combustion calculée.

Hâtons-nous d'ajouter que la formule empirique ci-dessus représente la chaleur spécifique du gaz carbonique seulement entre zéro et 200 degrés; son extension jusqu'à 3000 degrés ne saurait être regardée que comme une simple hypothèse, destinée à mettre en évidence l'inexactitude des anciennes évaluations.

On peut montrer d'ailleurs que les valeurs qui en sont tirées sont trop fortes pour être applicables à la totalité du gaz combustible. En effet, on en déduit une pression inférieure d'un cinquième environ aux nombres trouvés par M. Bunsen. Mais il suffirait d'admettre une dissociation partielle, pour rendre les pressions et les températures compatibles avec les chaleurs spécifiques tirées de la formule.

Les expériences de M. Bunsen ne procurent donc aucune donnée certaine relativement au degré, à la nature ou même à l'existence de la dissociation.

Cependant ces mesures, supposées exactes, n'en demeurent pas moins très-précieuses, parce qu'elles permettent de calculer, sans faire aucune hypothèse sur les chaleurs spécifiques, deux limites entre lesquelles la température de combustion est nécessairement comprise. On admet seulement, dans le calcul, la généralité des lois de Mariotte et de Gay-Lussac, jusqu'à ces hautes températures.

De l'équation (2) on tire, en effet,

$$t = 273 \left( \frac{P}{P_0} \frac{1}{1 - k - kg} - 1 \right).$$

Il est clair que la fraction combinée au moment de l'explosion est comprise entre zéro et 1 pour un mélange formé en proportion équivalente; entre zéro et  $m$  pour un mélange renfermant  $1 - m$  volumes de gaz inerte. Dès lors, en remplaçant  $k$  successivement par zéro et 1, ou par zéro et  $m$ , on obtiendrait les deux limites cherchées. En voici le tableau :

			$\frac{P}{P_0}$	$t_0$	$t_1$
I....	{	$\frac{2}{3}\text{CO} + \frac{1}{3}\text{O}$ .....	10,78	4140	2612 }
II...	{	Id. ....	10,19	3900	2537 }
III...		Id. + 0,1079O .....	9,05	3066	2198
IV...		Id. + 0,6857O .....	8,89	2760	2154
V...		Id. + 0,8554O .....	8,44	2537	2031
VI...		Id. + 1,0861O .....	7,86	2280	1875
VII.	{	Id. + 1,2563Az .....	7,73	2203	1838 }
VIII.	{	Id. id. ....	7,35	2083	1734 }
IX...		Id. + 1,7145O .....	6,67	1875	1548
X...		Id. + 2,1559O .....	5,83	1505	1319
XI..		Id. + 3,1629O .....	4,79	1150	1034
XII..	{	$\frac{2}{3}\text{H} + \frac{1}{3}\text{O}$ .....	9,97	3809	2449 }
XIII.	{	Id. ....	9,75	3718	2389 }
XIV.		Id. + 1,2599Az .....	7,49	2126	1715

Ainsi la température de combustion de l'oxyde de carbone par l'oxygène, à volume constant, est comprise entre 4000 et 2600; par l'air, entre 2200 et 1750, limites déjà fort resserrées; celle de l'hydrogène par l'oxygène entre 3800 et 2400; par l'air entre 2100 et 1700.

Ces derniers nombres pourront sembler un peu faibles si on les rapproche de la fusion du platine, évaluée à 2000 degrés; mais, dans cette dernière évaluation, la chaleur spécifique du platine a été supposée constante, tandis qu'elle varie avec la température. Si l'on adoptait la loi de variation tirée des mesures de Dulong, le platine devrait fondre vers 1400 degrés. Le nombre vrai est probablement intermédiaire (').

(') M. Violle a trouvé récemment 1800 degrés dans des expériences qu'il n'a pas encore publiées.

On sait qu'il est controversé; au delà de la limite des mesures faites avec le thermomètre à air, nulle température n'est connue jusqu'ici avec certitude.

Mais les expériences qui viennent d'être discutées paraissent établir la possibilité de produire des températures réelles voisines de 3000 degrés.

11. Établissons une dernière proposition relative aux changements de pression et de volume, produits par la combinaison chimique.

*Lorsque deux ou plusieurs gaz réagissent directement les uns sur les autres, avec formation exclusive de produits gazeux, la chaleur dégagée est telle qu'il y a toujours accroissement de pression, lorsqu'on opère à volume constant; ou, ce qui revient au même, accroissement de volume, lorsqu'on opère à pression constante.*

Soient  $t$  la température développée par la réaction à volume constant;  $V_0$  le volume des gaz initiaux réduit à zéro et 0<sup>m</sup>, 760;  $V_1$  le volume des produits,  $\frac{V_1}{V_0} = k$  sera la condensation. A  $t$  degrés on aura

$$P = P_0 k (1 + \alpha t).$$

Dès lors :

$$P > P_0 \text{ si } 1 + \alpha t > \frac{1}{k},$$

$$P < P_0 \text{ si } 1 + \alpha t < \frac{1}{k}.$$

Le premier cas se présente évidemment lorsque la condensation est égale à l'unité (chlore et hydrogène; cyanogène et oxygène supposés produire une combustion totale), ou lorsqu'il y a dilatation (acétylène et oxygène).

Reste le cas où la réaction donne lieu à une contraction. Pour y faire intervenir la chaleur dégagée, posons comme plus haut :  $t = \frac{Q}{C}$ ; la relation  $P > P_0$  exige dès lors

$$1 + \frac{Q}{273 C} > \frac{1}{k}.$$

Or l'expérience donne, dans tous les cas connus,

$$Q > 273 \left( \frac{1}{k} - 1 \right) C;$$

ce qui vérifie notre proposition. L'écart entre ces deux quantités est d'ordinaire très-considérable.

Cette vérification est purement empirique, attendu qu'on ne connaît aucune théorie qui permette de calculer *a priori*, soit la chaleur spécifique des corps composés à diverses températures, soit la chaleur dégagée par une réaction.





---

# TABLE DES MATIÈRES

## DU TOME SIXIÈME.

---

	Pages
Sur la réfraction des gaz (avec une planche); par M. <i>Mascart</i> , Professeur au Collège de France.....	10
Mémoires sur les fonctions elliptiques qui correspondent à la fonction $\cos x + i \sin x$ ; par M. <i>Lemonnier</i> , Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Henri IV. (Deuxième Mémoire.).....	79
Recherches sur les composés du niobium et du tantale; par M. <i>A. Joly</i> .....	125
Observations sur deux points du Calcul des variations; par M. <i>Ch. Méray</i> , Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. ....	187
Étude expérimentale sur les phénomènes d'induction électrodynamique; par M. <i>L. Mouton</i> , Agrégé préparateur à l'École Normale.....	217
Développements en séries des fonctions elliptiques et de leur puissance; par M. <i>Désiré André</i> . ....	265
Applications de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches; par M. <i>Émile Picard</i> , Élève à l'École Normale supérieure.....	329
Recherches sur la dispersion anormale; par M. <i>A. Hurion</i> , Agrégé préparateur au Collège de France.....	367

### SUPPLÉMENT AU TOME VI.

Mémoire sur les méthodes employées pour la détermination des courbures des objectifs, accompagné de Tables propres à en abrégier le calcul; par M. <i>Adolphe Martin</i> , Docteur ès sciences.....	S. 3
De la chaleur de combinaison rapportée à l'état gazeux; par M. <i>Berthelot</i> , Membre de l'Institut (Académie des Sciences).....	S. 63

### PLANCHES.

PLANCHE I. — Sur la réfraction des gaz.

---

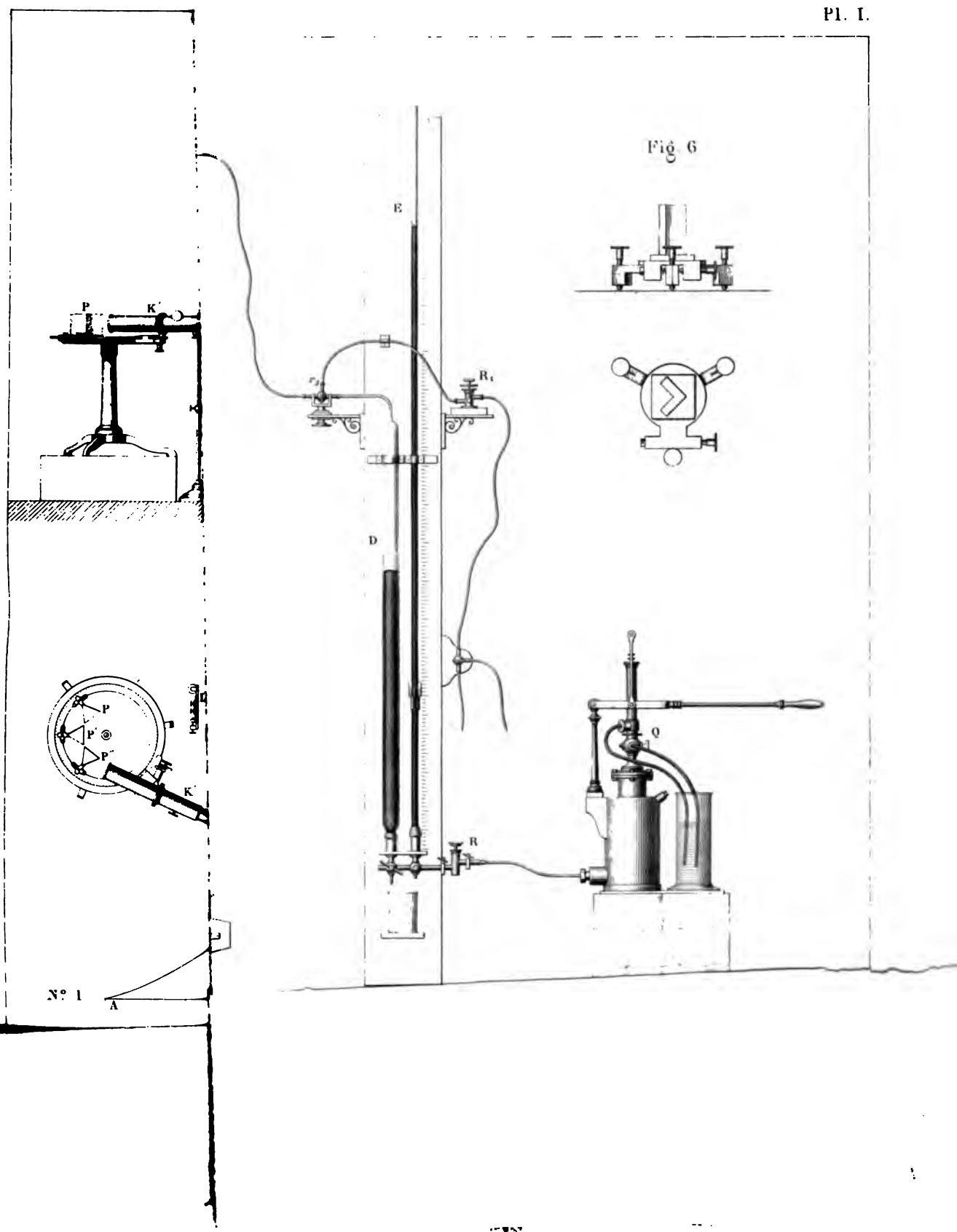
---

## *ERRATA.*

---

Page S. 10, ligne 10, *au lieu de* : Gibbert, *lisez* Gilbert.

- » S. 12, lignes 9, 10 et 11, *au lieu de la phrase* : « Je considère, etc., ... négatif », *lisez* :  
« Je considère comme positifs les rayons des surfaces convexes ; les rayons des surfaces concaves seront négatifs ».
-





1

1

1

1

211



